

长波在弯曲管道中的传播—I 变截面 弯管中长波传播的基本分析*

顾圣士 方光熊

(上海交通大学应用数学系, 1982年3月20日收到)

摘 要

本文研究长波在三维变截面弯管中的传播问题。通过建立正交曲线坐标系, 以波数 k 和管道横截面的特征半径 a 的乘积 ka 作为小参数, 对波动方程进行无量纲处理, 用正则摄动法, 把三维的 Helmholtz 方程化为二维的 Laplace (或 Poisson) 方程和一维的 Webster 方程, 并分析了管道的几何参数 (横截面面积、管道中心线的曲率和挠度) 对复速度势渐近展开的各阶项的影响。文中指出, 横截面面积的变化首先影响渐近解的零阶项, 在横截面的形状具有某种对称性时, 管道中心线的曲率首先影响渐近解的二阶项, 而挠度首先影响渐近解的三阶项。最后, 给出了长波在弯曲圆管中传播的实例。

一、引 言

Helmholtz^[1]和 Rayleigh^[2]最早研究了长波从管道开口处的声学辐射问题。他们得到了当 $ka \ll 1$ 时问题近似解, 这里 k 是波数, a 是管道的特征半径。Rayleigh 在解决这个问题时一半基于分析, 一半基于直觉。因此他的方法很难用于其它问题。Lesser 和 Lewis^{[3][4]}首先指出, 对于长波来说, 管道辐射问题以及不连续管道中传播问题可以用匹配渐近展开法 (MAE) 来处理, 并且对两个二维管道问题作了研究。Keller 和 Ting^[5]把匹配渐近展开和数值计算结合在一起, 成功地解决了长波从柱形管口和锥形管口的辐射等问题。

在 Keller 和 Ting 工作的基础上, 本文研究长波在三维变截面弯管中的传播问题。对于 $ka \ll 1$ 的情形, 我们假定管道中心线的曲率和挠度都较小 (与波数 k 为同一量级), 管壁是刚性的。通过建立正交曲线坐标系, 写出复速度势 ϕ 所满足的约化波动方程和在管壁上的边界条件的表达式, 然后对方程进行无量纲化, 再用正则摄动法导出复速度势 ϕ 渐近展开各阶项所满足的方程和边界条件。我们把三维的 Helmholtz 方程化为二维的 Laplace (或 Poisson) 方程和一维的 Webster 方程。Laplace (或 Poisson) 方程的解与横截面的形状相关, 而每一阶 Webster 方程都可由下两阶截面上 Poisson 方程的可解性条件确定。本文还分析了管道的几何参数 (横截面面积、管道中心线的曲率和挠度) 对复速度势渐近展开各阶项的影响。最后研究了长波在弯曲圆管中传播的实例。

* 段祝平推荐。

二、正交曲线坐标下的波动方程和边界条件

我们研究长波在弯管中的传播问题。考虑一个变截面的弯管（见图 1），它的中心线由矢径 $\vec{X}_0(s)$ 给出， s 是一个参数，代表中心线的弧长。对于给定的中心线 $\vec{X}_0(s)$ ，我们有 Frenet 坐标系 $\{\hat{\tau}, \hat{n}, \hat{b}\}$ （见图 2），其中 $\hat{\tau}$ 表示沿中心线切线方向的单位矢量， \hat{n} 是主法线矢量， \hat{b} 是副法线矢量。在与中心线垂直的平面内，设管壁到中心线的距离（见图 3）为：

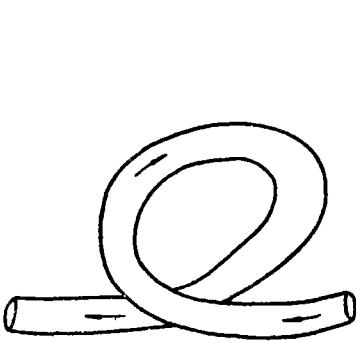


图 1 变截面弯管

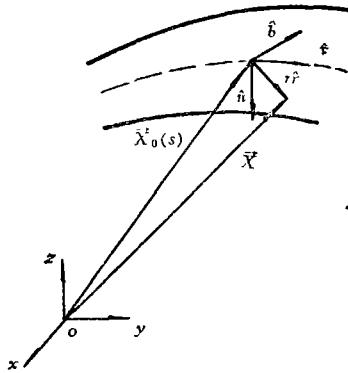


图 2 自然标架坐标系

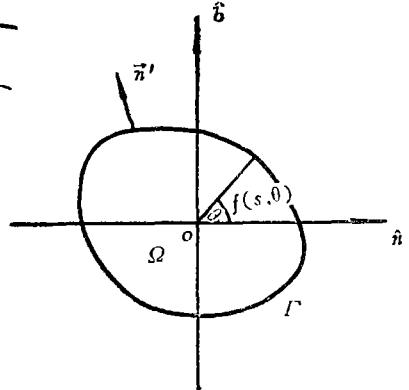


图 3 管道的横截面

$$r = f(s, \theta) \quad (2.1)$$

并且假定中心线通过横截面的形心，即有

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\Omega} r^2 \cos \theta dr d\theta &= 0 \\ \iint_{\Omega} r^2 \sin \theta dr d\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Ω 表示横截面所示的区域。

设 k 为波数， a 为管道中心线垂直的横截面的特征半径， $A(s)$ 表示横截面的面积。当波长 $2\pi/k$ 比特征半径 a 大得多的时候，我们就有小参数

$$\varepsilon = ka \ll 1 \quad (2.3)$$

设 $f = O(a)$ ，它的中心线的曲率 $K(s)$ 和挠度 $T(s)$ 都较小： $K = O(k)$ ， $T = O(k)$ 。我们还假定管壁是刚性的，因此波在管壁上法向速度为零。管道可以是有限长的（中心线长度的量级至少是 $O(k^{-1})$ ），也可以是无限长的。我们将求出复速度势 ϕ 的渐近解的各阶项所满足的方程，而这些解的最后确定，对于有限长的管道要由边界条件或匹配条件来定，对于无限长管道，要由边界条件及辐射条件来定。

考虑弯管中介质是均匀的（介质的折射指数为 1）。我们知道，在管道内行进的声场的复速度势 ϕ 满足约化的波动方程及管壁上法向速度为零的边界条件：

$$\begin{cases} \Delta \phi + k^2 \phi = 0 & (2.4) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 & \text{在管壁上} \end{cases} \quad (2.5)$$

下面我们建立正交曲线坐标系。根据著名的 Frenet-Serret 公式有

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{X}_0(s)}{ds} &= \hat{\tau}, & \frac{d\hat{\tau}}{ds} &= K\hat{n} \\ \frac{d\hat{n}}{ds} &= -K\hat{\tau} + T\hat{b}, & \frac{d\hat{b}}{ds} &= -T\hat{n} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

在与中心线垂直的平面内取极坐标系 $\{\hat{r}, \hat{\theta}\}$, 我们按照 Ting^[6] 的办法在 \hat{n} 与 $\hat{\tau}$ 之间附加一个角度 $\theta_0(s)$, $\theta_0(s)$ 是 s 的函数 (见图 4), 则管内任一点的坐标为:

$$\vec{X} = \vec{X}_0(s) + r\hat{r} = \vec{X}_0(s) + r \cos(\theta_0 + \theta)\hat{n} + r \sin(\theta_0 + \theta)\hat{b} \quad (2.7)$$

由 $\{\hat{n}, \hat{b}\}$ 与 $\{\hat{r}, \hat{\theta}\}$ 之间的基变换公式, 对 (2.7) 式分别求关于 r, θ, s 的偏导数:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial r} = \hat{r} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta} = r\hat{\theta} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} &= \hat{\tau} - r \sin(\theta_0 + \theta) \frac{d\theta_0}{ds} \hat{n} + r \cos(\theta_0 + \theta) (-K\hat{\tau} + T\hat{b}) \\ &\quad + r \cos(\theta_0 + \theta) \frac{d\theta_0}{ds} \hat{b} + r \sin(\theta_0 + \theta) (-T)\hat{n} \end{aligned}$$

为了使 $\{\hat{\tau}, \hat{r}, \hat{\theta}\}$ 组成正交曲线坐标系, 令 $\frac{d\theta_0(s)}{ds} = -T$

$$\text{即} \quad \theta_0(s) = -\int_0^s T ds \quad (2.10)$$

$$\text{从而} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = [1 - Kr \cos(\theta_0 + \theta)] \hat{\tau} \quad (2.11)$$

因此, 正交曲线坐标系 $\{\hat{\tau}, \hat{r}, \hat{\theta}\}$ 的 Lamé 系数 h_1, h_2, h_3 为:

$$h_1 = 1 - Kr \cos(\theta_0 + \theta), \quad h_2 = 1, \quad h_3 = r \quad (2.12)$$

这样, 方程 (2.4) 在正交曲线坐标系中可化为:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{[1 - Kr \cos(\theta_0 + \theta)]^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + \frac{rKT \sin(\theta_0 + \theta)}{[1 - Kr \cos(\theta_0 + \theta)]^3} \frac{\partial \phi}{\partial s} \\ &+ \frac{r \cos(\theta_0 + \theta)}{[1 - Kr \cos(\theta_0 + \theta)]^3} \frac{dK}{ds} \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{K \sin(\theta_0 + \theta)}{r[1 - Kr \cos(\theta_0 + \theta)]} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1 - 2Kr \cos(\theta_0 + \theta)}{r[1 - Kr \cos(\theta_0 + \theta)]} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + k^2 \phi = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

管壁上任一点的坐标为:

$$\vec{X} = \vec{X}_0(s) + f(s, \theta)\hat{r} \quad (2.14)$$

因而边界条件 (2.5) 可化为:

$$f \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = [1 - Kf \cos(\theta_0 + \theta)]^{-2} f \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (2.15)$$

其中 $r = f(s, \theta)$

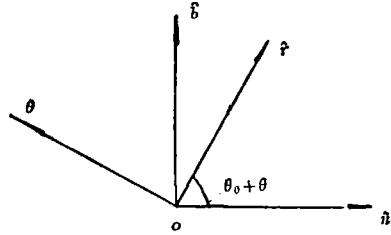


图 4 在横截面上建立极坐标系

三、复速度势渐近展开各阶项所满足的方程

我们分别在中心线的切线方向和法线方向选择不同的长度尺度, 切线方向以 k^{-1} 为长度尺度, 法线方向以 a 为长度尺度, 对方程和边界条件进行无量纲化, 于是令

$$\bar{s}=s/k^{-1}, \quad \bar{r}=r/a, \quad \bar{f}=f/a \quad (3.1)$$

则曲率 K 与挠度 T 无量纲化后为:

$$\bar{K}=Kk^{-1}, \quad \bar{T}=Tk^{-1} \quad (3.1)'$$

以(2.3), (3.1), (3.1)'代入方程(2.13)和边界条件(2.15), 下面我们为方便计, 仍以不带“~”、“-”的符号来表示无量纲化后的量, 整理后得:

$$\begin{aligned} & [1-\varepsilon Kr \cos(\theta_0+\theta)]^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + [1-\varepsilon Kr \cos(\theta_0+\theta)]^2 [1-2\varepsilon Kr \cos(\theta_0+\theta)] \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ & + [1-\varepsilon Kr \cos(\theta_0+\theta)]^3 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \varepsilon K \sin(\theta_0+\theta) [1-\varepsilon Kr \cos(\theta_0+\theta)]^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ & + \varepsilon^2 [1-\varepsilon Kr \cos(\theta_0+\theta)] \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + \varepsilon^2 [1-\varepsilon Kr \cos(\theta_0+\theta)]^3 \phi \\ & + \varepsilon^3 r K \sin(\theta_0+\theta) T \frac{\partial \phi}{\partial s} + \varepsilon^3 r \cos(\theta_0+\theta) \frac{dK}{ds} \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$f \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \varepsilon^2 [1-\varepsilon K f \cos(\theta_0+\theta)]^{-2} f \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (3.3)$$

设
$$\phi = \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \dots \quad (3.4)$$

并记
$$\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial n'} \equiv \left(f \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) / \sqrt{f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2} \quad (3.6)$$

符号 Δ_2 代表二维的 Laplace 算子, $\frac{\partial}{\partial n'}$ 代表截线 Γ 单位外法线上的微商 (见图 3)。

把(3.4)式代入方程(3.2)和边界条件(3.3), 然后以 ε 的幂次展开, 比较 ε 同次幂的系数, 可得渐近展开各阶项所满足的方程和相应的边界条件。

零阶方程和边界条件是

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 \phi_0 &= 0 && \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial n'} \Big|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

问题(3.7)表明 ϕ_0 与 r, θ 无关, 它只是一个关于 s 的任意函数:

$$\phi_0 = \phi_0(s) \quad (3.8)$$

这个任意函数满足的方程由下两阶方程的可解性条件给出。

由于 $\frac{\partial \phi_0}{\partial r} = 0, \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} = 0$, 故一阶方程和边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 \phi_1 &= 0 && \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial n'} \Big|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

由问题 (3.9) 同样可知:

$$\phi_1 = \phi_1(s) \quad (3.10)$$

$\phi_1(s)$ 满足的方程也同样由下两阶方程的可解性条件给出.

由 $\frac{\partial \phi_1}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} = 0$, 二阶方程和边界条件是:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 \phi_2 &= -\frac{d^2 \phi_0}{ds^2} - \phi_0 && \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial n'} \Big|_{\Gamma} &= f \frac{\partial f}{\partial s} \frac{d\phi_0}{ds} / \sqrt{f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

由 Neumann 问题 (3.11) 的可解性条件可得:

$$\iint_{\Omega} -\left(\frac{d^2 \phi_0}{ds^2} + \phi_0\right) d\sigma = \oint_{\Gamma} \left[f \frac{\partial f}{\partial s} \frac{d\phi_0}{ds} / \sqrt{f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2} \right] dl \quad (3.12)$$

由 (3.8) 式, (3.12) 式左边的被积函数可移到积分号外面. 而 (3.12) 式右边由弧微分 $dl = \sqrt{f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2} d\theta$, 横截面面积 $A(s) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f^2(s, \theta) d\theta$, 可化为:

$$\left(\frac{d^2 \phi_0}{ds^2} + \phi_0\right) A(s) + \frac{d\phi_0}{ds} \frac{dA}{ds} = 0 \quad (3.13)$$

或写成

$$A(s)\phi_0(s) + \frac{d}{ds} \left[A(s) \frac{d\phi_0}{ds} \right] = 0 \quad (3.13)'$$

我们由问题 (3.11) 的可解性条件确定了 ϕ_0 满足 Webster 方程. 这是一个二阶的常微分方程, 如果知道截面面积 $A(s)$, 就可求出 ϕ_0 的两个基本解, 基本解前面的系数要由边界条件或匹配条件来确定.

由 (3.13) 式 $\frac{d^2 \phi_0}{ds^2} + \phi_0 = -\frac{1}{A} \frac{dA}{ds} \frac{d\phi_0}{ds}$ 代入 (3.11) 式得

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 \phi_2 &= \frac{1}{A} \frac{dA}{ds} \frac{d\phi_0}{ds} && \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial n'} \Big|_{\Gamma} &= f \frac{\partial f}{\partial s} \frac{d\phi_0}{ds} / \sqrt{f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)'$$

设 $\phi_2 = \frac{d\phi_0}{ds} U = \frac{d\phi_0}{ds} (u_1 + u_2 + u_3)$, $U = u_1 + u_2 + u_3$

其中 $u_1 = \frac{1}{4A} \frac{dA}{ds} r^2$

u_2 满足 $\left. \begin{aligned} \Delta_2 u_2 &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial n'} \Big|_{\Gamma} &= \left(f \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{1}{2A} \frac{dA}{ds} f^2 \right) / \sqrt{f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$

u_3 只是 s 的任意函数. 我们把 ϕ_2 分成两部分的乘积, 一部分 $\frac{d\phi_0}{ds}$ 与波的传播有关, 一部分 U 与管道横截面的几何形状有关. 满足方程 (3.14) 的解 u_2 可以相差一个关于 s 的任意函数,

但对于 $\frac{\partial u_2}{\partial r}$, $\frac{\partial u_2}{\partial \theta}$ 来说是唯一确定的. 记

$$\phi_H^{(2)}(s) = \frac{d\phi_0}{ds} u_3(s)$$

这是一个关于 s 的任意函数, 它同样由下两阶方程的可解性条件确定. 因而

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_2}{\partial r} = \frac{d\phi_0}{ds} \left[\frac{1}{2A} \frac{dA}{ds} r + \frac{\partial u_2}{\partial r} \right] \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} = \frac{d\phi_0}{ds} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \end{cases}$$

三阶方程和边界条件是:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 \phi_3 &= -2Kr \cos(\theta_0 + \theta) \frac{d^2 \phi_0}{ds^2} - rKT \sin(\theta_0 + \theta) \frac{d\phi_0}{ds} \\ &\quad - r \cos(\theta_0 + \theta) \frac{dK}{ds} \frac{d\phi_0}{ds} - \frac{d^2 \phi_1}{ds^2} - \phi_1 + K \cos(\theta_0 + \theta) \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \\ &\quad - K \sin(\theta_0 + \theta) \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial n'} \Big|_{\Gamma} &= \left[2Kf^2 \frac{\partial f}{\partial s} \cos(\theta_0 + \theta) \frac{d\phi_0}{ds} + f \frac{\partial f}{\partial s} \frac{d\phi_1}{ds} \right] / \sqrt{f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

利用形心条件(2.2)和问题(3.15)的可解性条件可得:

$$\left(\frac{d^2 \phi_1}{ds^2} + \phi_1 \right) A + \frac{dA}{ds} \frac{d\phi_1}{ds} = K \frac{d\phi_0}{ds} \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial u_2}{\partial r} \cos(\theta_0 + \theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \sin(\theta_0 + \theta) \right] d\sigma \quad (3.16)$$

(3.16)式表明 ϕ_1 在一般情况下满足非齐次的 Webster 方程, 非齐次项中积分只与管道横截面的几何形状有关.

四阶方程和边界条件是:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 \phi_4 &= -3K^2 r^2 \cos^2(\theta_0 + \theta) \frac{d^2 \phi_0}{ds^2} - 3K^2 r^2 \sin(\theta_0 + \theta) \cos(\theta_0 + \theta) T \frac{d\phi_0}{ds} \\ &\quad - 3Kr^2 \cos^2(\theta_0 + \theta) \frac{dK}{ds} \frac{d\phi_0}{ds} - 2Kr \cos(\theta_0 + \theta) \frac{d^2 \phi_1}{ds^2} \\ &\quad - rKT \sin(\theta_0 + \theta) \frac{d\phi_1}{ds} - r \cos(\theta_0 + \theta) \frac{dK}{ds} \frac{d\phi_1}{ds} - \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial s^2} - \phi_2 \\ &\quad - K^2 \sin(\theta_0 + \theta) \cos(\theta_0 + \theta) \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + K^2 r \cos^2(\theta_0 + \theta) \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \\ &\quad - \frac{1}{r} K \sin(\theta_0 + \theta) \frac{\partial \phi_3}{\partial \theta} + K \cos(\theta_0 + \theta) \frac{\partial \phi_3}{\partial r} \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \frac{\partial \phi_4}{\partial n'} \Big|_{\Gamma} &= \left[3K^2 f^3 \cos^2(\theta_0 + \theta) \frac{\partial f}{\partial s} \frac{d\phi_0}{ds} + 2Kf^2 \frac{\partial f}{\partial s} \cos(\theta_0 + \theta) \frac{d\phi_1}{ds} \right. \\ &\quad \left. + f \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial \phi_2}{\partial s} \right] / \sqrt{f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

在截面 Ω 上求解方程(3.15), 可得 $\frac{\partial \phi_3}{\partial r}$, $\frac{\partial \phi_3}{\partial \theta}$ 的确定解, 然后由问题(3.17)的可解性条

件, 可求得 $\phi_H^{(2)}(s)$ 所满足的非齐次的 Webster 方程. 这样的过程可以进行到高阶项. 我们把三维波动方程化为二维的 Poisson 方程和一维的 Webster 方程. 对于横截面为圆 (见第四节)、矩形等弯曲管道, 可以利用分离变量法求解. 对于任意形状的横截面, 可以利用数值计算来求解. 这样把摄动方法和数值计算结合在一起, 既使问题大为简化, 又能获得渐近的解析解.

四、管道的几何参数对复速度势渐近展开的各阶项的影响

我们对管道横截面面积的变化, 管道中心线的曲率、挠度在复速度势渐近展开的各阶项的影响作一基本分析.

由方程 (3.13) 我们看到面积的变化 $\frac{dA}{ds}$ 出现在零阶方程中, 所以管道横截面面积的变化最早影响波动方程的解. 如果面积不变, 即 $\frac{dA}{ds} = 0$, 那么 ϕ_0 满足

$$\frac{d^2\phi_0}{ds^2} + \phi_0 = 0 \quad (4.1)$$

ϕ_0 是两个基本解的线性组合, 这两个基本解, 如果换回无量纲化前的坐标则为 e^{iks} 和 e^{-iks} , 它前面的系数由边界条件、辐射条件或匹配条件来确定. 这表明在横截面面积不变时, 零级解是平面波, 一个是前进波, 一个是反射波.

由方程 (3.16) 可知在一般情况下, 曲率 K 出现在一阶方程中. 下面我们讨论截面是什么样的几何形状时, 方程 (3.16) 右边的积分为零, 从而曲率 K 就不影响 ϕ_1 ?

由问题 (3.14), ①当 f 关于副法线 \hat{b} 对称时, 即 $f(s, \pi - \theta) = f(s, \theta)$ (图 5 是一个例子); ②当 f 关于 θ 以 $\frac{2\pi}{m}$ ($m=2, 3, 4, \dots$) 为周期时 (图 6 是一个例子), 即 $f\left(s, \theta + \frac{2\pi}{m}\right) = f(s, \theta)$, 可以证明问题 (3.14) 的解 u_2 也有同样的性质.

因此在条件①时, 有

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial u_2}{\partial r} \cos(\theta_0 + \theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \sin(\theta_0 + \theta) \right] d\sigma &= \iint_{\sigma} \frac{\partial u_2}{\partial n} dndb \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [u_2(h_2(b), b) - u_2(h_1(b), b)] db = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

这里的 (n, b) 表示在直角坐标系 $\{\hat{n}, \hat{b}\}$ 中的坐标.

在条件②时, 令 $\theta_0 + \theta = \psi$, 则 $f(s, \theta) = f(s, \psi - \theta)$. 容易证明

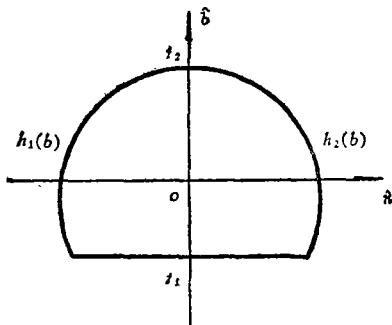


图 5 关于副法线 \hat{b} 对称的截面

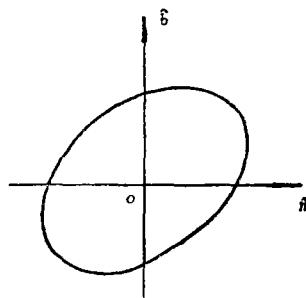


图 6 以 π 为周期的截面

$$\sum_{i=0}^{m-1} \cos\left(\psi + i\frac{2\pi}{m}\right) = 0; \quad \sum_{i=0}^{m-1} \sin\left(\psi + i\frac{2\pi}{m}\right) = 0 \quad (4.3)$$

把 $[0, 2\pi]$ 分成 m 等分, 取适当的变量替换, 积分(3.16)式右边的第一项:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial r} \cos(\theta_0 + \theta) d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{f(s, \psi - \theta_0)} \frac{\partial u_2(s, r, \psi - \theta_0)}{\partial r} \cos \psi r dr \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{m}} d\psi \int_0^{f(s, \psi - \theta_0)} \frac{\partial u_2(s, r, \psi - \theta_0)}{\partial r} \sum_{i=0}^{m-1} \cos\left(\psi + i\frac{2\pi}{m}\right) r dr = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

(3.16)右边积分的第二项同样为0. 因而当 f 满足条件①或②时, ϕ_1 满足齐次的 Webster 方程, 曲率 K 不影响 ϕ_1 所满足的方程. 这也就是说, 对长波来说, 在截面形状为①或②时, 如果只考虑复速度势的零阶项和一阶项, 弯管可以作为直管来处理.

由问题(3.17)的可解性条件, 因为

$$-3K^2 \frac{d^2 \phi_0}{ds^2} \iint_{\Omega} r^2 \cos^2(\theta_0 + \theta) d\sigma = -3K^2 \frac{d^2 \phi_0}{ds^2} \iint_{\Omega} n^2 dndb \quad (4.5)$$

其中积分 $\iint_{\Omega} n^2 dndb \neq 0$, 所以曲率 K 会在 ϕ_2 的方程中出现.

由形心条件(2.2)和问题(3.17)的可解性条件, 用以上同样的方法, 可以证明在 f 具有下列一个性质时, 挠度 T 不出现在 ϕ_2 满足的方程中, 而会出现在 ϕ_3 的方程中.

条件③: f 关于主法线 \hat{n} 和副法线 \hat{b} 都对称(图7是一个例子), 即

$$f(s, \pi - \theta) = f(s, \theta), \quad f(s, -\theta) = f(s, \theta)$$

条件④: f 关于 θ 以 $\frac{\pi}{m}$ 为周期($m=2, 3, 4, \dots$)(图8是一个例子), 即

$$f\left(s, \theta + \frac{\pi}{m}\right) = f(s, \theta)$$

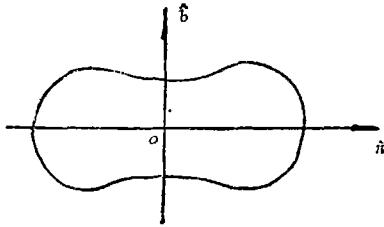


图7 关于主法线 \hat{n} 和副法线 \hat{b} 都对称的截面

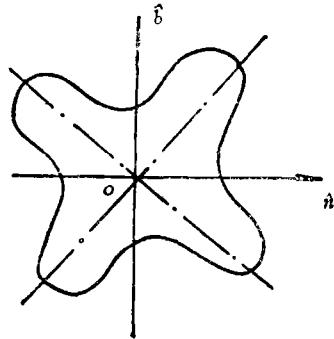


图8 以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期的截面

五、长波在弯曲圆管中的传播

我们研究长波在弯曲圆管中的传播问题.

设

$$r = f(s)$$

(5.1)

则复速度势 ϕ 满足方程(3.2), 而在管壁上的边界条件是:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=f(s)} = \varepsilon^2 [1 - \varepsilon K f \cos(\theta_0 + \theta)]^{-2} \frac{df}{ds} \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (5.2)$$

如前一样的讨论可得： ϕ_0 ， ϕ_1 满足

$$\left(\frac{d^2 \phi_i}{ds^2} + \phi_i \right) f(s) + 2 \frac{df}{ds} \frac{d\phi_i}{ds} = 0 \quad i=0,1 \quad (5.3)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2f} \frac{df}{ds} \frac{d\phi_0}{ds} r^2 + \phi_H^{(2)}(s) \quad (5.4)$$

$\phi_H^{(2)}(s)$ 满足

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2 \phi_H^{(2)}(s)}{ds^2} + \phi_H^{(2)} \right] f + 2 \frac{df}{ds} \frac{d\phi_H^{(2)}}{ds} \\ &= \frac{1}{4} K^2 f^3 \phi_0 - \frac{1}{2} K f^3 \frac{dK}{ds} \frac{d\phi_0}{ds} - \frac{1}{2} K^2 f^2 \frac{df}{ds} \frac{d\phi_0}{ds} \\ & \quad - \frac{1}{4} f^2 \frac{df}{ds} \frac{d\phi_0}{ds} - 2f^2 \frac{df}{ds} P(s) - \frac{1}{2} f^3 Q(s) \end{aligned} \quad (5.5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} P(s) &= \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2f} \frac{df}{ds} \frac{d\phi_0}{ds} \right) \\ Q(s) &= \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{2f} \frac{df}{ds} \frac{d\phi_0}{ds} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \frac{1}{2f} \frac{df}{ds} \frac{d\phi_1}{ds} r^2 + \frac{1}{8} M(s) (r^3 - 3f^2 r) \cos(\theta_0 + \theta) \\ & \quad - \frac{1}{8} N(s) (r^3 - 3f^2 r) \sin(\theta_0 + \theta) + 2Kf \frac{df}{ds} \frac{d\phi_0}{ds} r \cos(\theta_0 + \theta) + \phi_H^{(3)}(s) \end{aligned} \quad (5.7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} M(s) &= -2K \frac{d^2 \phi_0}{ds^2} - \frac{dK}{ds} \frac{d\phi_0}{ds} + K \frac{1}{f} \frac{df}{ds} \frac{d\phi_0}{ds} \\ N(s) &= KT \frac{d\phi_0}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

.....

从上面的分析我们可以看到， ϕ_0 ， ϕ_1 满足齐次的 Webster 方程， ϕ_2 是 s ， r 的函数， $\phi_H^{(2)}(s)$ 满足非齐次的 Webster 方程。面积的变化率首先出现在渐近解的首项。中心线的曲率 K 首先出现在 $\phi_H^{(2)}(s)$ 的方程中，而挠度 T 已在 ϕ_3 的特解之中（见 (5.8) 式 $N(s)$ ）。

如果横截面的圆半径 $f(s)$ 是 s 的幂函数，

$$\text{设 } f(s) = s^{\frac{1-2\nu}{2}}, \quad \left(\nu \neq \frac{1}{2} \right)$$

如图 9，我们以 $s=1$ 作为 s 的起始点，考虑有限长的管道（中心线的长度与 k^{-1} 为同一量级），则由方程 (5.3) 知， ϕ_0 ， ϕ_1 满足 Bessel 方程：

$$s^2 \phi_0'' + (1-2\nu) s \phi_0' + s^2 \phi_0 = 0 \quad (5.9)$$

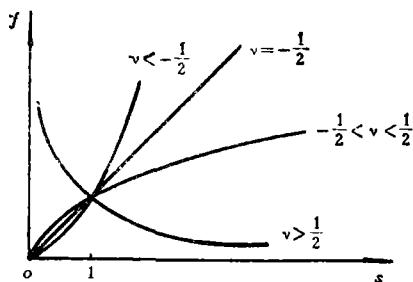


图 9 $f(s)$ 是 s 的幂函数

ϕ_0, ϕ_1 的两个基本解为:

$$\left. \begin{aligned} q_1(s) &= s^\nu H_{|\nu|}^{(1)}(s) \\ q_2(s) &= s^\nu H_{|\nu|}^{(2)}(s) \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

其中 $H_{|\nu|}^{(1)}(s), H_{|\nu|}^{(2)}(s)$ 代表 $|\nu|$ 阶的 Hankel 函数. $H_{|\nu|}^{(1)}(s)$ 代表前进波, $H_{|\nu|}^{(2)}(s)$ 代表反射波. 所以

$$\phi_i(s) = A_{i1}q_1(s) + A_{i2}q_2(s) \quad i=0, 1 \quad (5.11)$$

其中的系数 A_{i1}, A_{i2} 由边界条件或匹配条件确定.

ϕ_0, ϕ_1 确定之后, 代入方程(5.5), 则得 $\phi_H^{(2)}$ 满足的方程:

$$s^2 \ddot{\phi}_H^{(2)} + (1-2\nu)s \dot{\phi}_H^{(2)} + s^2 \phi_H^{(2)} = F(s) \quad (5.12)$$

其中

$$F(s) = s^{\nu+\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{4} K^2 f^3 \phi_0 - \frac{1}{2} K f^3 \frac{dK}{ds} \frac{d\phi_0}{ds} - \frac{1}{2} K^2 f^2 \frac{df}{ds} \frac{d\phi_0}{ds} \right. \\ \left. - \frac{1}{4} f^2 \frac{df}{ds} \frac{d\phi_0}{ds} - 2f^2 \frac{df}{ds} P(s) - \frac{1}{2} f^3 Q(s) \right]$$

所以

$$\phi_H^{(2)}(s) = A_{21}q_1(s) + A_{22}q_2(s) + \int_1^s F(\tau) \begin{vmatrix} q_1(\tau) & q_2(\tau) \\ q_1(s) & q_2(s) \\ q_1(\tau) & q_2(\tau) \\ q_1'(\tau) & q_2'(\tau) \end{vmatrix} d\tau \quad (5.13)$$

代入(5.4)式有

$$\phi_2 = \frac{1}{2f} \frac{df}{ds} [A_{01}\dot{q}_1(s) + A_{02}\dot{q}_2(s)]r^2 + \phi_H^{(2)}(s) \quad (5.14)$$

其中的系数 A_{21}, A_{22} 同样由边界条件、辐射条件或匹配条件确定.

$\nu = \frac{1}{2}$ 时, $f(s) = 1$, 此时管道的横截面是半径为 a 的圆. 我们考虑一个曲率 $K = \text{const}$,

$T \ll 1$ 的无限长的弹簧状弯管 (见图 10). 在 $s=0$ 处, 有一振幅为 1 的平面波, 则有边界条件:

$$\phi|_{s=0} = 1 \quad (5.15)$$

所以有

$$\begin{aligned} \phi_0(0) &= 1 \\ \phi_i|_{s=0} &= 0 \quad i=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.16)$$

由辐射条件管中只有前进波, 没有反射波, 故由方程(5.3), (5.5), (5.16)式可知:

$$\phi_0 = e^{is} \quad (5.17)$$

$$\phi_1 = 0 \quad (5.18)$$

$$\phi_2 = -\frac{iK^2}{8} s e^{is} \quad (5.19)$$

所以有

$$\phi = \left(1 - e^2 - \frac{iK^2}{8} s + \dots \right) e^{is} \quad (5.20)$$

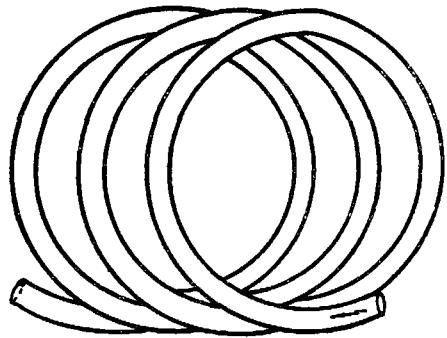


图10 弹簧状弯管

(5.20)式对 s 很大时不一致有效, 为了得到 s 很大时一致有效的解, 我们用重正化方法^[7], 得

$$\phi = e^{is} \left[1 - \varepsilon^2 \frac{K^2}{8} + \dots \right] \quad (5.21)$$

如果换回无量纲化前的坐标, 则在 s 很大时, 弯管中复速度势为:

$$\phi = e^{iks} \left[1 - \varepsilon^2 \frac{K^2}{8} + \dots \right] \quad (5.22)$$

其中中心线曲率 $K = \text{const.}$

六、结 束 语

本文用正则摄动法研究了长波在变截面弯管中传播问题, 得到零阶项 ϕ_0 、一阶项 ϕ_1 满足 Webster 方程, 以后各阶一般可分为一个截面上的 Poisson 方程和一个关于 s 的非齐次 Webster 方程. 这与 Lesser 和 Lewis^{[3][4]} 在二维管道中所得的结果是相符的. 文章对管道的几何参数对复速度势渐近展开各阶项的影响作了基本分析. 我们看到, 管道横截面面积的变化影响首先出现在零阶项. 而在横截面形状关于副法线 \hat{b} 对称时, 或关于 θ 以 $\frac{2\pi}{m}$ ($m=2, 3, 4, \dots$) 为周期时, 中心线的曲率 K 不影响一阶项 ϕ_1 , 它首先出现在二阶项中, 此时 ϕ_1 仍满足齐次的 Webster 方程. 在横截面形状关于主法线 \hat{n} 和副法线 \hat{b} 都对称时, 或关于 θ 以 $\frac{\pi}{m}$ ($m=2, 3, 4, \dots$) 为周期时, 中心线的挠度 T 不影响二阶项, 而首先出现在三阶项中. 文章研究了长波在弯曲圆管中传播问题, 说明了上述结论, 并对长波在“幂函数型圆管”中传播给出了具体的结果.

本文是在丁汝教授直接指导下完成的, 并得到程极泰副教授, 范伟民先生和孙薇荣先生的大力帮助, 在此表示衷心的感谢.

参 考 文 献

- [1] Helmholtz, H., *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden*, *Crelle's J. Reine Angewandete Math.*, Bd. 57, (1860), 1—72.
- [2] Rayleigh, Lord, *Theory of Sound*, Dover, New York, 2, (1945). 196—201; 487—491.
- [3] Lesser, M. B. and J. A. Lewis, Applications of matched asymptotic expansion methods to acoustics I. the Webster Horn equation and the stepped duct, *J. Acoust. Soc. Am.*, 51 (1972), 1664—1669.
- [4] Lesser, M. B. and J. A. Lewis, Applications of matched asymptotic expansion methods to acoustics II. the open-ended duct, *J. Acoust. Soc. Am.*, 52 (1972), 1406—1410.
- [5] Ting Lu (丁汝) and J. B. Keller, Radiation from the open end of a cylindrical or conical pipe and scattering from the end of a rod or slab, *J. Acoust. Soc. Am.*, 61, 6 (1977), 1438—1444.
- [6] Ting Lu (丁汝), *Studies in the motion and decay of vortices in Aircraft Wake Turbulence and its Detection*, Edited by J. H. Olsen, A. Goldberg and M. Rogers, Plenum Press, N. Y. (1971). 11—40.
- [7] Nayfeh, Ali Hasan, *Perturbation Methods*, John Wiley and Sons, Inc., (1973).

Propagation of a Long Wave in a Curved Duct (I)

Basic Analysis of Long Wave Propagation in a Curved Duct with Variable Cross Section

Gu Sheng-shi Fang Guang-xiong

(Department of Applied Mathematics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai)

Abstract

The propagation of a long wave in a three-dimensional curved duct with variable cross section is studied in this paper. It is shown that a three-dimensional Helmholtz Equation can be decomposed into a two-dimensional Laplace (or Poisson) Equation and a one-dimensional Webster Equation by the curvilinear orthogonal coordinate system, non-dimensionalization of reduced wave equation and regular perturbation with small parameter ka , where k is the wave number and a is the characteristic radius of the duct. The influences of the duct's geometric parameters (the area variation of the cross section, the curvature and torsion of the central line) to the asymptotic expansion of the solution are analysed. It is concluded that the effects of the variation of the cross-sectional area first appear in the first term of the asymptotic expansion, and when the cross section shape has certain symmetric properties, the effects of the curvature and torsion of the central line first appear in the third- and the fourth-terms, respectively. An example of long wave propagation in a curved circular duct is also given at the end of the paper.