

关于铁木森柯梁动力优化的讨论

程耿东 丁 桦

(大连工学院工程力学研究所, 1982年6月24日收到)

摘 要

本文讨论受到多频率约束的铁木森柯梁和尤拉梁的最小重量设计问题. 以对称的简支梁为例, 本文揭示了铁木森柯梁的异常特征: 如果在梁的中部适当地构造很高的一个薄条, 相应于第一对称振型的频率可以高于反对称振型的频率; 受到二组不同频率约束的铁木森柯梁很可能有同样的最小重量. 这些异常特征说明, 为了得到一个良态的问题, 有必要将最大横断面积约束包括到问题提法中.

一、引 言

通常认为, 对于短梁, 考虑剪切变形和转动惯量影响的铁木森柯梁模型比起尤拉梁模型能更加精确地描述梁的动力特性, 因此在开展尤拉梁动力优化工作的同时^[1,2], 铁木森柯梁的动力优化也引起了人们的兴趣^[4,5,9]. 文[4]在给定梁总体积的前提下, 寻求梁横断面积的最优分布以使得铁木森柯梁的基频最大, 作者采用有限元离散化技术具体地计算了各种边界条件下的最优设计, 在着重比较铁木森柯模型和尤拉模型下得到的优化设计后指出, 由于剪切变形和转动惯量的影响, 最优设计相应的频率(最优频率)将要下降, 梁越短则最优频率的下降越显著. Pierson 在文[5]中, 采用最优控制方法求解了在指定基频, 或前二阶频率的条件下使铁木森柯梁体积最小的问题, 文中给出一些有趣的、无法解释的结果. 从这些结果可以看出, 在指定前二阶频率的情况下, 如果强迫两个指定的频率足够地靠近, 得到的最优设计的厚度分布呈现出一种不寻常的质量集中(见图1). 值得注意的是, 由于没有断面面积最小尺寸限制时最优设计会具有零断面, 给数值计算带来困难, 文[4]、[5]中都考虑了断面面积最小尺寸的限制.

本文通过对两端简支的对称梁进行的分析说明, 适当地在梁的中部形成一个很高的窄条后, 铁木森柯梁的频率特性可以发生急剧的变化, 这就解释了文[5]中提到的异常现象. 为了得到一个非病态的问题, 本文建议应在问题提法中增加最大横断面积的约束 ($A \leq A_{\max}$).

下面, 讨论将限于简支梁, 并约定断面积 $A(x)$ 沿梁轴线的分布满足:

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad A(x) \geq A_{\min} > 0 \quad (0 \leq x \leq L) \\ \textcircled{2} \quad \text{除开有限个第一类间断点外, } A(x) \text{ 处处连续} \\ \textcircled{3} \quad \text{以 } x = \frac{L}{2} \text{ 为对称中点, } A(x) \text{ 对称分布, 即 } A(x) = A(L-x) \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

为简洁起见, 约定将没有零点的对称振型及其频率、有一个零点的反对称振型及其频率分别简称为对称振型、对称频率、反对称振型及反对称频率.

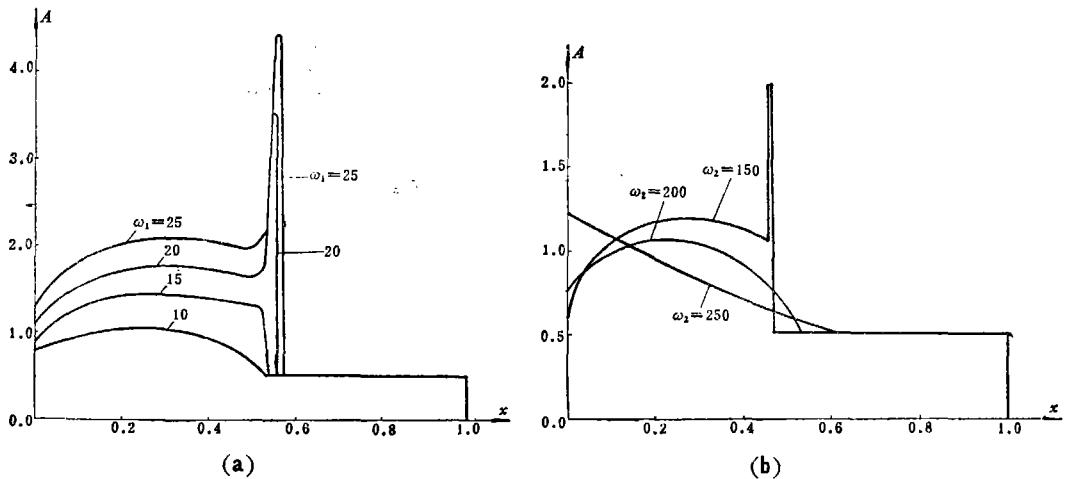


图 1 悬臂铁木森柯梁的最轻设计, 第一和第二频率 ω_1 和 ω_2 是给定的。(a)中, ω_1 可变化;(b)中, ω_2 是变动的; $A_{min}=0.5$ 。注意, ω_1 和 ω_2 接近时,形成显著的质量集中。该图引自[5]。

二、对称频率和反对称频率的异常关系

众所周知, 一个对称结构的对称频率往往是第一频率, 反对称频率为第二频率, 事实上, 对尤拉梁可以证明这一点:

尤拉梁的对称频率不高于反对称频率。

证明: 图 2 给出两端简支的梁, 用 $y(x)$ 表示自由振动振幅, 下标 s 和 a 分别指对称振型及反对称振型。 $y(x)$ 应满足的微分方程为:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right) = \rho A \omega^2 y(x) \quad (2.1)$$

简支边条件要求

$$y(0) = EJ \frac{d^2 y(0)}{dx^2} = 0 \quad (2.2)$$

$$y(L) = EJ \frac{d^2 y(L)}{dx^2} = 0 \quad (2.3)$$

其中 L ——梁长 E ——弹性模量 J ——截面惯性矩; 对相似断面 $J = aA^2$,
对变高度、宽度固定的矩形梁 $J = aA^3$, a 为常数

ω ——自振圆频率

ρ ——密度

A ——梁断面积。

约束 $A \geq A_{min}$ 保证了梁的断面是非奇异的, 再加上约束 $A \leq A_{max} < \infty$, 保证了 $y(x)$,

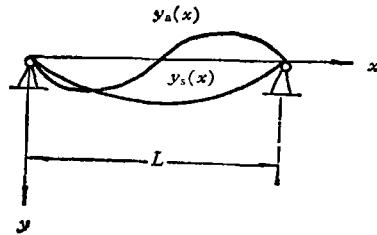


图 2

* 最大断面积约束 $A \leq A_{max} < \infty$ 是暂时引进的, 去除这个约束 $A \leq A_{max} < \infty$ 不会影响本节及第3节关于尤拉梁得到的结论。

$\frac{dy(x)}{dx}$, $EJ \frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d}{dx} \left(EJ \frac{d^2y}{dx^2} \right)$ 是连续的. 除开有限个断面发生间断的点上, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 和 $\frac{d^3y}{dx^3}$ 也应该是连续的. 在梁中点的对称性条件要求

$$\frac{dy_s \left(\frac{L}{2} \right)}{dx} = 0, \quad \frac{d}{dx} \left(EJ \frac{d^2}{dx^2} y_s \left(\frac{L}{2} \right) \right) = 0 \quad (2.4)$$

$$y_a \left(\frac{L}{2} \right) = 0, \quad EJ \frac{d^2}{dx^2} y_a \left(\frac{L}{2} \right) = 0 \quad (2.5)$$

不失一般性, 假定

$$y_a > 0 \quad \forall x \in \left[0, \frac{L}{2} \right) \quad (2.6)$$

$$y_s > 0 \quad \forall x \in \left[0, \frac{L}{2} \right) \quad (2.7)$$

由(2.1)和(2.6), (2.7)可推出

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 y_s}{dx^2} \right) = \rho A \omega_1^2 y_s > 0 \quad x \in \left[0, \frac{L}{2} \right) \quad (2.8)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 y_a}{dx^2} \right) = \rho A \omega_2^2 y_a > 0 \quad x \in \left[0, \frac{L}{2} \right) \quad (2.9)$$

将(2.9)乘上 y_s , 减去(2.8)乘上 y_a , 对得到的表达式从 0 积分到 $\frac{L}{2}$, 分部积分法给出

$$\begin{aligned} & (\omega_2^2 - \omega_1^2) \int_0^{\frac{L}{2}} \rho A y_a y_s dx \\ & = \left[\frac{d}{dx} \left(EJ \frac{d^2 y_a}{dx^2} \right) y_s + \left(EJ \frac{d^2 y_s}{dx^2} \right) \frac{dy_a}{dx} \right] \Big|_0^{\frac{L}{2}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

下面来证明(2.10)式右端项大于等于零. 首先, 由(2.8)进行积分可得:

$$\frac{d}{dx} \left(EJ \frac{d^2 y_s}{dx^2} \right) = \int_0^x \rho A \omega_1^2 y_s dx + C \quad (2.11)$$

积分常数 C 可以由条件(2.4)求得为

$$C = - \int_0^{\frac{L}{2}} \rho A \omega_1^2 y_s dx < 0 \quad (2.12)$$

将(2.12)式代入(2.11), 注意到 $\rho A \omega_1^2 y_s > 0$, 可得

$$\frac{d}{dx} \left(EJ \frac{d^2 y_s}{dx^2} \right) < 0, \quad x \in \left[0, \frac{L}{2} \right) \quad (2.13)$$

这样, $EJ \frac{d^2 y_s}{dx^2}$ 是在 $\left[0, \frac{L}{2} \right)$ 上的单调递减连续函数. 进而, 注意到边界条件(2.2), 不等式(2.13), 导致

$$EJ \frac{d^2 y_s}{dx^2} < 0$$

特别地

$$EJ \frac{d^2 y_a \left(\frac{L}{2} \right)}{dx^2} < 0 \quad (2.14)$$

由于 y_a 是非负连续函数, 满足 $y_a \left(\frac{L}{2} \right) = 0$, 因而有

$$\frac{dy_a \left(\frac{L}{2} \right)}{dx} \leq 0 \quad (2.15)$$

十分显然, 物理上不允许连续函数 $EJ \frac{d^2 y_a}{dx^2}$ 在区间 $\left[0, \frac{L}{2} \right)$ 上处处为零, 除此之外, 利用对 $EJ \frac{d^2 y_a}{dx^2}$ 的边界条件和对称性条件, 可以推出必定存在一个常数 $\xi \in \left(0, \frac{L}{2} \right)$, 使得

$$\frac{d}{dx} \left(EJ \frac{d^2 y_a(\xi)}{dx^2} \right) = 0 \quad (2.16)$$

另一方面, $\frac{d}{dx} \left(EJ \frac{d^2 y_a}{dx^2} \right)$ 也是一个单调递增连续函数, 见(2.9), 这就保证

$$\frac{d}{dx} \left(EJ \frac{d^2 y_a \left(\frac{L}{2} \right)}{dx^2} \right) \geq 0 \quad (2.17)$$

将(2.7), (2.17), (2.15)和(2.14)联系起来, 可以看出(2.10)式的右端项不小于零, 即

$$(\omega_s^2 - \omega_a^2) \int_0^{\frac{L}{2}} \rho A y_a y_s dx \geq 0 \quad (2.18)$$

因此, $\omega_s^2 \geq \omega_a^2$. 归纳起来, 只要(1.1)中的条件被满足, 不论横断面积如何分布, 尤拉梁的对称频率不可能高于反对称频率。

回到铁木森柯梁, 振型 $y(x)$ 和 $\psi(x)$, 见图3, 满足的微分方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[G A_s \left(\psi + \frac{dy}{dx} \right) \right] &= -\rho A \omega^2 y \\ \frac{d}{dx} \left[EJ \frac{d\psi}{dx} \right] - G A_s \left(\frac{dy}{dx} + \psi \right) &= -\rho J \omega^2 \psi \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

其中 G ——剪切模量

A_s ——有效抗剪面积

ψ —— x 轴与截面法线间夹角

注意, 铁木森柯梁理论考虑了剪切变形, 梁的平截面在变形过程中虽仍是一个平面, 但它并不一定垂直于轴线。由于方程(2.19)较复杂, 很难解析地讨论对称与反对称频率特性,

我们将给出例子来说明, 铁木森柯梁的对称频率

与反对称频率两者之间并无固定的关系, 换言之, 只要适当地分布断面积 $A(x)$, 可以使梁的对称频率小于、大于或者等于梁的反对称频率。下面给出的结果是针对变高度、固定宽度的梁 ($J \propto A^2$), 但结论也适用于相似断面的梁 ($J \propto A^2$)。

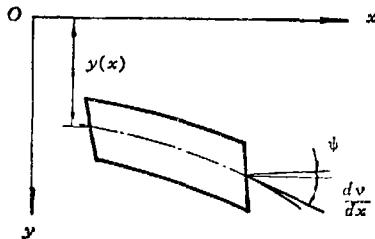


图 3

图 4 给出一根由三段组成的梁。梁的总长 L ，宽度 t 和材料常数 E, ρ, G 均已给定。梁所用的材料体积 V 及梁的最小高度 h_{\min} 也假定是给定的。利用迁移矩阵法，我们编制了一个计算机程序，用来确定不同 b 值下的对称和反对称频率。图 5 给出了无量纲的对称和反对称频率

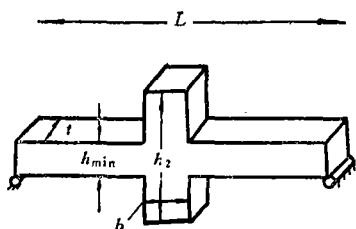


图 4

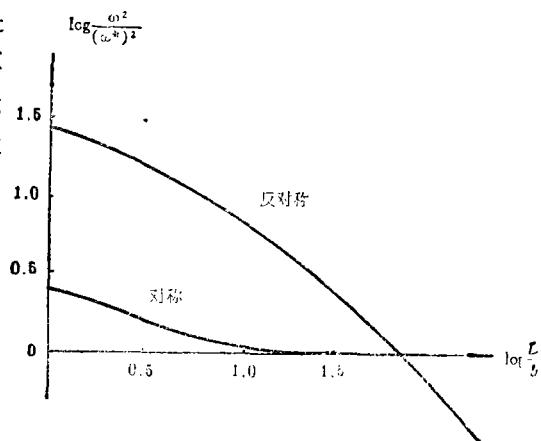


图 5

的对数 $\log \frac{\omega^2}{(\omega^*)^2}$ ， $\log \frac{\omega_a^2}{(\omega^*)^2}$ 相对于 $\log \frac{L}{b}$ 的曲线。由图 5 可以看出，只要 b 比较大，对称频率的确低于反对称频率；但是，当 b 减小时 (h_2 增加)，对称频率逐渐趋于一个常数 ω^* 。数值结果表明，该常数 ω^* 就是高度为 h_{\min} ，在梁中夹有集中质量 $\rho(V - h_{\min}tL)$ 的梁的对称频率。另一方面，随着 b 的减少，反对称频率减小得很快，最终趋于零。因此，如果 b 足够小或 h_2 足够大，铁木森柯梁的反对称频率可以低于其对称频率。

物理上，上列频率特性很容易解释。异常地集中的质量在梁的中部形成很高的一个窄条，虽然该窄条的质量 $\rho tb(h_2 - h_{\min})$ 是常数，它的转动惯量，近似为 $b(h_2 - h_{\min})th_2^2/16$ ，当 b 趋于零时趋于无穷。注意到对称振形在 $x = \frac{L}{2}$ 处转动为零，上面提到的薄条在梁作对称振动时就等价于有限的集中质量。对于反对称振型来说，在梁的中央挠度为零、转角不为零，薄条起的作用就象一个具有无限大转动惯量的集中惯性块，其自振频率当然就趋于零。

三、频率下界的异常特性

文献中已经注意到，如果给定了材料总体积和最小断面约束条件，则尤拉梁的频率不仅具有最大值而且具有非零的最小值。对于圆板优化问题也有相同的结论。事实上，图 4 所示梁的对称频率的下界也是所有具有相同材料体积和最小厚度 h_{\min} 的尤拉梁的频率的下界。为了说明这一点，回顾一下以前提到的事实：图 4 所示梁的对称频率的下界是由在梁的中部附有集中质量 $\rho(V - h_{\min}tL)$ 的均匀厚度 h_{\min} 的梁给出的。以下称这样的梁的极限梁。记其对称振型为 $y_L(x)$ ，其相应的对称频率可以由瑞雷商给出：

$$\omega_L^2 = \frac{\int_0^L EJ_{\min} \left(\frac{d^2 y_L}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \rho A_{\min} y_L^2 dx + \rho (V - A_{\min} L) y_L^2 \left(\frac{L}{2} \right)} \quad (3.1)$$

其中， $A_{\min} = h_{\min}t$ 。现在来考虑横截面积为 $A_\theta(x)$ 的梁，它具有给定的体积和满足 (1.1) 中给出的条件，其对称频率为

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^L EJ_g \left(\frac{d^2 y_g}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \rho A_g y_g^2 dx} \quad (3.2)$$

其中下标 g 指相应于设计 $A_g(x)$ 的量, $y_g(x)$ 是其真实的对称振型. 利用 $y_g(x)$ 作为极限梁的许可振型, 瑞雷最小原理给出

$$\omega_i^2 \leq \frac{\int_0^L EJ_{\min} \left(\frac{d^2 y_g}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \rho A_{\min} y_g^2 dx + \rho(V - A_{\min} L) y_g^2 \left(\frac{L}{2} \right)} = \bar{\omega}^2 \quad (3.3)$$

但是

$$\int_0^L EJ_g \left(\frac{d^2 y_g}{dx^2} \right)^2 dx \geq \int_0^L EJ_{\min} \left(\frac{d^2 y_g}{dx^2} \right)^2 dx \quad (3.4)$$

$$\int_0^L \rho A_g y_g^2 dx \leq \int_0^L \rho A_{\min} y_g^2 dx + \rho(V - A_{\min} L) y_g^2 \left(\frac{L}{2} \right) \quad (3.5)$$

这两式和(3.2), (3.3)一起导致

$$\bar{\omega}^2 \leq \omega_i^2 \quad (3.6)$$

或进一步

$$\omega_i^2 \leq \omega_0^2 \quad (3.7)$$

这样, 极限梁的频率的确提供了这样的一个下界.

回到铁木森柯梁, 节2中给出的例子已经表明, 适当地布置一个薄条可以使反对称频率趋于零, 而且, 我们应当强调

(1) 形成具有无限大惯性矩的薄条的材料体积可以无限小. 事实上, 如果假定该薄条的宽度和高度分别为 $b = O(\varepsilon^2)$, $h_2 = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, 则其体积可估计为 $V_t = O(\varepsilon)$, 而惯性矩为 $J_t = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, 显然, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 有 $V_t \rightarrow 0$, $J_t \rightarrow \infty$.

(2) 为了减少某一频率, 薄条应当构造在相应振型转动非零的位置上. 由于每一薄条要的材料无限小, 频率可以逐渐地降为零.

归纳之, 具有指定体积和最小断面积约束 $A_{\min} > 0$ 的铁木森柯梁, 频率没有非零的下界.

四、给定两个频率约束时最优化问题的不适当提法

在[6]中, Warner 和 Varrick 利用最优控制理论研究了杆纵向振动的重量最小化问题. 用 V_1 表示在给定第一频率约束 $\omega_1 = \bar{\omega}_1$ 下最优设计 $A_1(x)$ 的最小体积, 用 V_2 表示给定两个频率约束 $\omega_1 = \bar{\omega}_1$ 和 $\omega_2 = \bar{\omega}_2$ 时的最优设计的最小体积. Warner 和 Varrick 发现, 如果最优设计 $A_1(x)$ 的第二个频率 ω_2^* 不等于 $\bar{\omega}_2$, 则有 $V_2 > V_1$. 但是, 同样的问题对铁木森柯梁怎样呢? V_2 是否总大于 V_1 呢? 这个问题仍未解决^[6]. 根据上面的讨论可见, 简支的铁木森柯梁具有非寻常的特征, 即只要指定的第二频率 $\bar{\omega}_2 < \omega_2^*$, V_2 就可以无限地接近 V_1 . 为了清楚起见, 可以设想已经求出了给定第一频率 $\omega_1 = \bar{\omega}_1$ 时铁木森柯梁的最优设计 $A_1(x)$. 利用由无限小材料制成的一个薄条, 并将其安排在适当位置, 其第一频率 ω_1 受到的影响可以无限小, 但第二频

率可以降低一个有限的量值, 调整到任意值 $\bar{\omega}_2 < \omega_2^*$. 实际上, 在图 1 给出的文[5]的结果中就有一个很高的窄条, 它的惯性矩极大地影响梁的频率。

从梁理论的观点来看, 上面提到的带有很高的窄条的最优设计是不能用梁的理论来处理的。进一步, 一个从实际工作的工程师也不可能接受这样奇怪的设计。为了得到一个可以使用的设计, 问题提法要重新修改, 要对最大断面积 A_{\max} 或厚度函数的斜率加上必要的限制。

五、结 论

在分布参数结构优化领域中, 已经发现相当数量的问题, 这些问题中的最优设计呈现出异常的性质。在指出实心板优化的不存在性后^[8], Strang 和 Korn^[7] 给出了几个例子。在这些例子中, 最优设计是包含了无数个无限小孔的介质。结构优化研究的倡导人之一, 普拉格教授, 在其一生的最后几篇论文中^[8], 致力于讨论结构优化的非寻常性质。本文揭示了铁木森柯梁动力优化的异常性质, 从而为结构优化中非寻常性质的研究提供了又一个例题。通过这个例题, 我们可以看出, 为了使一个优化问题给出的结果是实用的、有意义的, 必须仔细地提出合适的约束条件。困难的是, 约束条件是否合适并不易于决定, 要求我们对问题作深入的研究。

参 考 文 献

- [1] Niordson, F. I., On the optimal design of a vibrating beam, *Quart. Appl. Mech.*, 23(1965), 47—53.
- [2] Olhoff, N., Optimization of vibrating beams with respect to higher order natural frequencies, *J. Struct. Mech.*, 4, 1(1976), 87—122.
- [3] Cheng, K. T. and N. Olhoff, Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates, *Int. J. of Solid and Struct.*, 17(1981).
- [4] Kamat, M. P., Effect of shear deformation and rotary inertia on optimum beam frequencies, *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, 9, 1(1975), 51—62.
- [5] Pierson, B. L., Minimum weight vibrating beam design, *J., Struct. Mech.* 5(1977), 147—178.
- [6] Warner, W. H. and D. J. Vavrick, Optimal design in axial motion for several frequency constraints, *J. Optim. Theory Appl.*, 15, 1(1975), 157—166.
- [7] Kohn, R. V. and G. Strang, Structural design optimization, homogenization and relaxation of variational problems, *Proc. of Conf. On Disordered Media*, NYU, Springer-Verlag, (June 1981).
- [8] Prager, W., Unexpected results in structural optimization, *J. Struct. Mech.* 9, 1 (1981), 71—90.
- [9] Pedersen, P., Integrating finite element and linear programming in design, *DCAMM Report*, No. S 18 (March, 1981).

On Dynamic Optimization of Timoshenko Beam

Cheng Keng-tung Ding Hua

*(Research Institute of Engineering Mechanics,
Dalian Institute of Technology, Dalian)*

Abstract

The present paper discusses the minimum weight design problem for Timoshenko and Euler beams subjected to multifrequency constraints. Taking the simply-supported symmetric beam as example, we reveal the abnormal characteristics of optimal Timoshenko beams, i. e., the frequency corresponding to the first symmetric vibration mode could be higher than the frequency of antisymmetric vibration mode, if a very thin and high strip is suitably formed at the middle of the beam, and optimal Timoshenko beams subjected to two different sets of frequency constraints could have the same minimum weight. The above abnormal characteristics demonstrate the need for including maximum cross sectional area constraint in the problem formulation in order to have a well-posed problem.