应用数学和力学，第4卷第2期（1983年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

变质量非完整系统的哈密顿原理*

戈正铭　　程浥禾

（上海交通大学工程力学系，1982年5月21日收到）

摘　要

本文将哈密顿原理推广到最一般的、变质量非完整系统，得出变质量非完整系统的哈密顿原理，并给出了实例.

一、引　言

非完整系统动力学[1,2,3]是分析力学的一个重要分支，至今已有百余年的历史．著名的非完整约束的经典实例有Чаплыгин-Caratheodory冰刀问题．这个模型得到了广泛的应用，例如，在求积仪中就利用一种边缘锋利的刀轮．凡带有滚动轮子的系统（如自行车、摩托车、汽车、飞机起落架等）在一定的简化条件下均可视为非完整系统．这就使非完整系统动力学具有了很实用的意义．随着科学技术的发展，约束概念本身也有了推广和扩充．例如控制系统，就可以看成是具有约束——一般为非完整约束——的系统．近年来，非完整系统动力学的理论还被广泛应用于理论物理、电工学、近代微分几何以及飞机、流体机[4]和一般链式系统（如人体模型、操纵器、机械手、开路机构及电缆和天线的有限节模型等）的研究中[5]．因此，对非完整系统的研究除了具有理论上的价值外，还具有日益重要的实际意义．

由于空间技术以及其它工业技术的发展，变质量系统动力学的研究越来越显得重要．喷气飞机、火箭、卫星、航天器等一般都是变质量系统，而且其中许多是变质量非完整系统．运动中的车辆，由于燃料消耗或喷射气体[6]、液体等物而质量不断地减少，就是一种变质量非完整系统．综上所述，力学系统质量变化是一般情况，而质量不变仅是它的特殊情况．变质量系统的有关结论自然适用于常质量系统．所以，对变质量系统的研究具有更普遍的意义．

本文将力学普遍原理之一的哈密顿原理推广到变质量非完整系统．它是这一原理的最普遍的形式，其它如变质量完整系统哈密顿原理，常质量非完整系统哈密顿原理和常质量完整系统哈密顿原理都是它的特殊情况，可由之推出．由此原理可导出一系列变质量系统的运动方程，诸如推广的费瑞尔斯（Ferrers）方程[8]、推广的伏龙涅茨（Воронец）方程[9]、推广的查浦雷金（Чаплыгин）方程[10]、推广的拉格朗日方程[7]．

* 汪家话推荐.

二、变质量非完整系统哈密顿原理的Hölder形式

研究变质量质点系S，它由N个质点P_β（$\beta=1,\cdots,N$）组成。在瞬时t, P_β的质量为m_β; 在瞬时$t+dt$，从P_β中分离（或并入）的微粒的质量为dm_β。设S的位形在惯性坐标系R^*中由广义坐标q_1，…，q_n完全确定，在一般情况下我们有

$$m_\beta=m_\beta(q_1,\cdots,q_n;\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n;t) \qquad (\beta=1,\cdots,N) \tag{2.1}$$

P_β在R^*中的位置矢径可表示为:

$$\vec{r}_\beta=\vec{r}_\beta(q_1,\cdots,q_n;t) \qquad (\beta=1,\cdots,N) \tag{2.2}$$

对于S中的每一个质点P_β，可写出变质量质点的动力学基本方程:

$$\vec{F}_\beta-m_\beta\ddot{\vec{r}}_\beta+\vec{c}_\beta\dot{m}_\beta=0 \qquad (\beta=1,\cdots,N) \tag{2.3}$$

这里$\vec{F}_\beta$是作用在P_β上所有力的合力；$\vec{c}_\beta$是从P_β分离（或并入）的微粒相对于P_β本身的速度。用虚位移$\delta\vec{r}_\beta$与上式取标积，再从1到N求和:

$$\sum_{\beta=1}^{N}(\vec{F}_\beta-m_\beta\ddot{\vec{r}}_\beta+\dot{m}_\beta\vec{c}_\beta)\delta\vec{r}_\beta=0 \tag{2.4}$$

这就是变质量质点系的动力学普遍方程。

记δT为某一瞬时由于运动变更而引起的系统功能的变更，则:

$$\delta T=\delta\left(\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{N}m_\beta\dot{\vec{r}}_\beta^2\right)=\sum_{\beta=1}^{N}\left(m_\beta\dot{\vec{r}}_\beta\delta\dot{\vec{r}}+\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_\beta^2\delta m_\beta\right) \tag{2.5}$$

利用变分与求导可交换的性质，由上式右边两项分别求出:

$$\sum_{\beta=1}^{N}m_\beta\dot{\vec{r}}_\beta\delta\dot{\vec{r}}_\beta=\frac{d}{dt}\left(\sum_{\beta=1}^{N}m_\beta\dot{\vec{r}}_\beta\delta\vec{r}_\beta\right)-\sum_{\beta=1}^{N}(m_\beta\ddot{\vec{r}}_\beta+\dot{m}_\beta\dot{\vec{r}}_\beta)\delta\vec{r}_\beta \tag{2.6}$$

$$\sum_{\beta=1}^{N}\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_\beta^2\,\delta m_\beta=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{N}\dot{\vec{r}}_\beta^2\frac{\partial m_\beta}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)-\sum_{i=1}^{n}J_i\delta q_i \tag{2.7}$$

式中 $$J_i=\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\sum_{\beta=1}^{N}\dot{\vec{r}}_\beta^2\frac{\partial m_\beta}{\partial\dot{q}_i}\right)-\sum_{\beta=1}^{N}\dot{\vec{r}}_\beta^2\frac{\partial m_\beta}{\partial q_i}\right] \tag{2.8}$$

将(2.6)和(2.7)代入(2.5)，经整理后得:

$$\delta T+\sum_{i=1}^{n}J_i\delta q_i=\frac{d}{dt}\left[\sum_{\beta=1}^{N}m_\beta\dot{\vec{r}}_\beta\delta\vec{r}_\beta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{N}\dot{\vec{r}}_\beta^2\frac{\partial m_\beta}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right]$$

$$-\sum_{\beta=1}^{N}(m_\beta\ddot{\vec{r}}_\beta+\dot{m}_\beta\dot{\vec{r}}_\beta)\delta\vec{r}_\beta \tag{2.9}$$

将上式等号两边同时加上相同的两项:

$$\delta T+\sum_{\beta=1}^{N}(\vec{F}_\beta+\dot{m}_\beta\vec{u}_\beta)\delta\vec{r}_\beta+\sum_{i=1}^{n}J_i\delta q_i=\frac{d}{dt}\left[\sum_{\beta=1}^{N}m_\beta\dot{\vec{r}}_\beta\delta\vec{r}_\beta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{N}\dot{\vec{r}}_\beta^2\frac{\partial m_\beta}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right]$$

$$+\sum_{\beta=1}^{N}(\vec{F}_\beta-m_\beta\ddot{\vec{r}}_\beta+m_\beta\vec{c}_\beta)\delta\vec{r}_\beta$$

式中$\vec{u}_\beta=\dot{\vec{r}}_\beta+\vec{c}_\beta$为从$P_\beta$中分离（或并入）的微粒在$R^*$中的绝对速度．根据方程(2.4)，上式等号右边第二项和式为零，所以

$$\delta T+\sum_{\beta=1}^{N}(\vec{F}_\beta+\dot{m}_\beta\vec{u}_\beta)\delta\vec{r}_\beta+\sum_{i=1}^{n}J_i\delta q_i$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\sum_{\beta=1}^{N}m_\beta\dot{\vec{r}}_\beta\delta\vec{r}_\beta+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{N}\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_\beta^{\,2}\frac{\partial m_\beta}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)$$

将上式等号两边从t_1到t_2积分，并设

$$\delta q_i|_{t=t_1}=\delta q_i|_{t=t_2}=0\qquad(i=1,\ \cdots,\ n)\tag{2.10}$$

于是由

$$\delta\vec{r}_\beta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_\beta}{\partial q_i}\delta q_i\qquad(\beta=1,\ \cdots,\ N)$$

可得

$$\delta\vec{r}_\beta|_{t=t_1}=\delta\vec{r}_\beta|_{t=t_2}=0\qquad(\beta=1,\ \cdots,\ N)\tag{2.11}$$

这样就得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta T+\sum_{\beta=1}^{N}(\vec{F}_\beta+\dot{m}_\beta\vec{u}_\beta)\delta\vec{r}_\beta+\sum_{i=1}^{n}J_i\delta q_i\right]dt=0\tag{2.12}$$

如果系统是保守的，则

$$\sum_{\beta=1}^{N}\vec{F}_\beta\cdot\delta\vec{r}_\beta=\delta U\tag{2.13}$$

这里U为力函数．另外

$$\sum_{\beta=1}^{N}\dot{m}_\beta\vec{u}_\beta\delta\vec{r}_\beta=\sum_{\beta=1}^{N}\dot{m}_\beta\vec{u}_\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_\beta}{\partial q_i}\delta q_i=\sum_{i=1}^{n}K_i\delta q_i\tag{2.14}$$

式中

$$K_i=\sum_{\beta=1}^{N}\dot{m}_\beta\vec{u}_\beta\frac{\partial\vec{r}_\beta}{\partial q_i}=\sum_{\beta=1}^{N}\dot{m}_\beta\vec{u}_\beta\frac{\partial\dot{\vec{r}}_\beta}{\partial\dot{q}_i}\tag{2.15}$$

将(2.13)、(2.14)代入(2.12)式得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta(T+U)+\sum_{i=1}^{n}(K_i+J_i)\delta q_i\right]dt=0\tag{2.16}$$

这个式子对完整和非完整系统都适用．所不同之处在于：对完整系统而言，所有的δq_i都是独立的；而对于非完整系统而言，δq_i不全是独立的，它们要受非完整约束条件的限制．设非完整约束方程是关于$\dot{q}_i$的非线性方程：

$$f_l(q_i,\ \dot{q}_i,\ t)=0 \qquad (l=1,\ \cdots,\ r<n) \tag{2.17}$$

且切达也夫条件[11]得到满足，于是δq_i要受方程组

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i=0 \qquad (l=1,\ \cdots,\ r) \tag{2.18}$$

的限制。在线性非完整约束的情况，(2.17)可写成

$$\sum_{i=1}^{n}A_{li}\dot{q}_i+B_l=0 \qquad (l=1,\ \cdots,\ r) \tag{2.19}$$

此时δq_i要受方程组

$$\sum_{i=1}^{n}A_{li}\delta q_i=0 \qquad (l=1,\ \cdots,\ r) \tag{2.20}$$

的限制，这里A_{li}，B_l均为q_1，…，q_n和t的函数。

由于在导出(2.16)时，采用了Hölder的观点[12,13]，即对所有的广义坐标，下列交换关系成立：

$$\delta\dot{q}_i=\frac{d}{dt}\delta q_i \qquad (i=1,\ \cdots,\ n) \tag{2.21}$$

所以，(2.16)式称为变质量非完整系统哈密顿原理的Hölder形式。若令$L=T+U$ 为拉格朗日函数，则(2.16)式也可写成

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\ \delta L+\sum_{i=1}^{n}\ (K_i+J_i)\ \delta q_i\right]dt=0 \tag{2.22}$$

设Ψ是q_1，…，q_n和t的某一函数，而当下列条件

$$\sum_{i=1}^{n}(K_i+J_i)\delta q_i=\delta\Psi \tag{2.23}$$

成立时，则令$L^*=L+\Psi$，则(2.22)式可写成简捷的形式：

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L^* dt=0 \tag{2.24}$$

如所周知，就非完整系统而言，积分运算和变分运算在一般情况下是不能交换的，所以在一般情况下，变质量非完整系统哈密顿原理不能写成形如

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L^* dt=0 \tag{2.25}$$

的驻值作用量原理。

但是对完整系统而言，积分运算和变分运算是可以交换的，所以(2.25)式对完整系统是成立的。若再定义

$$S^*=\int_{t_1}^{t_2}L^* dt \tag{2.26}$$

为变质量完整系统的哈密顿作用量，则最后得到

$$\delta S^*=0 \tag{2.27}$$

上式说明，当变质量完整系统的主动力具有力函数U且满足 (2.23)式时，系统在某一时

间间隔内的真实运动与同一时间间隔内具有相同起迄位置的可能运动相比较，沿真实运动轨迹的哈密顿作用量具有驻值。

利用(2.10)、(2.20)、(2.21)，从(2.22)式容易得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}-K-J_i\right)\delta q_i\right]dt=0 \tag{2.28}$$

再利用拉格朗日未定乘子法，可以容易地推出

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}-K_i-J_i+\sum_{l=1}^{r}\lambda_l A_{li}=0 \qquad (i=1,\ \cdots,n) \tag{2.29}$$

这是推广的变质量系统的Ferrers方程式。它与(2.19)结合，共$n+r$个方程，可决定q_1，…，q_n，λ_1，…，λ_r共$n+r$个未知数。这里λ_1，…，λ_r是未定乘子。对完整系统而言，可得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=K_i+J_i \qquad (i=1,\ \cdots,\ n) \tag{2.30}$$

此为推广的变质量系统拉格朗日方程。

例1. 图 1 表示由质量为$m(t)$的飞行器简化得出的质点 P在惯性空间中运动。广义坐标为 x，y，z，于是$n=3$。设

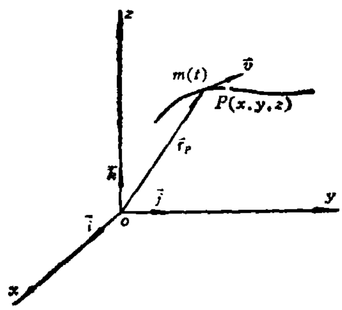

图 1

$$\vec{c}_P=\frac{f(t)\,(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-(\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k})$$

式中$f(t)$为某一给定的时间t的函数

$$\vec{v}_P=\dot{\vec{r}}_P=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{u}_P=\vec{c}_P+\vec{v}_P=\frac{f(t)\,(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$K_x=\dot{m}f(t)x/\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad K_y=\dot{m}f(t)y/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$K_z=\dot{m}f(t)z/\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ J_x=J_y=J_z=0$$

$$\sum_{i=1}^{3}K_i\delta q_i=K_x\delta x+K_y\delta y+K_z\delta z=\delta\left[\dot{m}f(t)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right]$$

$$\Psi=\dot{m}f(t)\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

取Oxy平面为力函数的基准面，于是

$$T+U=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz$$

$$S^*=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz+\dot{m}f(t)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right]dt$$

系统是完整的，由(2.27)有

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz+\dot{m}f(t)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right]dt=0$$

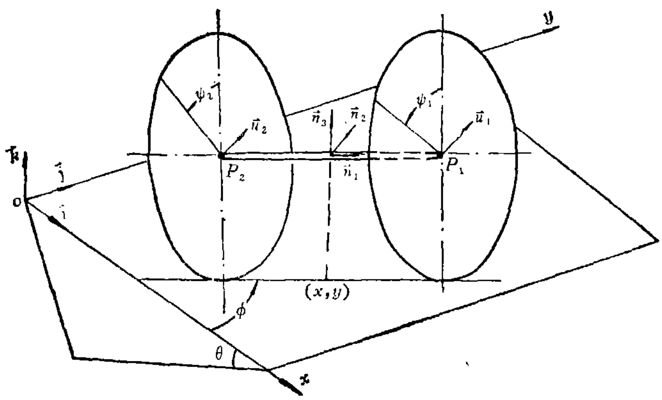

图 2

例2. 图2所示系统中，半径为R，质量为M 的两只相同的均质圆盘D_1和D_2装在长为$2R$的轴的两端，它们可自由地绕轴转动。在D_1和D_2的中心处分别有一变质量质点P_1和P_2，质量分别为$m_1(t)$和$m_2(t)$。该系统在倾斜角为θ的平面上作纯滚动。设P_1和P_2点的速度分别为$\vec{v}_1$和$\vec{v}_2$，且$\vec{u}_1=c_1(t)\vec{n}_2+\vec{v}_1$，$\vec{u}_2=c_2(t)\vec{n}_2+\vec{v}_2$。$c_1$，$c_2$为$t$的已知函数，$\vec{n}_1$，$\vec{n}_2$，$\vec{n}_3$为固定在杆上的右旋直角坐标系的单位矢量，$\vec{n}_1$与杆的轴心线重合。

取下列坐标：转轴中点在Oxy平面上的投影的坐标x，y，D_1和D_2绕转轴的转角ψ_1和ψ_2，转轴在Oxy平面上的投影的方向角ϕ。由D_1，D_2作纯滚动的条件可得：

$$\dot{\psi}_2=\dot{\psi}_1+2\dot{\phi},\quad \dot{x}=R(\dot{\psi}_1+\dot{\phi})\sin\phi,\quad \dot{y}=-R(\dot{\psi}_1+\dot{\phi})\cos\phi$$

上面的第一式表示完整约束，第二、三两式表示非完整约束。于是$n=4$，$r=2$，$k=2$。取广义坐标为x，y，ψ_1和ϕ，则有

$$\vec{v}_1=-R\dot{\psi}_1\vec{n}_2,\quad \vec{v}_2=-R\dot{\psi}_2\vec{n}_2=-R(\dot{\psi}_1+2\dot{\phi})\vec{n}_2$$

$$T=\frac{3}{4}MR^2(\dot{\psi}_1^2+\dot{\psi}_2^2)+\frac{1}{4}MR^2\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}m_1R^2\dot{\psi}_1^2+\frac{1}{2}m_2R^2\dot{\psi}_2^2$$

$$=\frac{1}{2}(3M+m_1+m_2)R^2\dot{\psi}_1^2+\left(\frac{13}{4}M+2m_2\right)R^2\dot{\phi}^2+(3M+2m_2)R^2\dot{\psi}_1\dot{\phi}$$

$$U=(2M+m_1+m_2)g(x\sin\theta-R\cos\theta)+(m_1-m_2)gR\sin\theta\cos\phi$$

$$K_\phi=-2R\dot{m}_2(c_2-R\dot{\psi}_1-2R\dot{\phi})$$

$$K_{\psi_1}=(R\dot{\psi}_1-c_1)R\dot{m}_1+(R\dot{\psi}_1+2R\dot{\phi}-c_2)R\dot{m}_2$$

$$K_x=K_y=0,\quad J_x=J_y=J_\phi=J_{\psi_1}=0$$

将诸式代入(2.16)式即得系统的哈密顿原理：

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\delta\Big[\frac{1}{2}(3M+m_1+m_2)R^2\dot{\psi}_1{}^2+(\frac{13}{4}M+2m_2)R^2\dot{\phi}^2+(3M+2m_2)R^2\dot{\psi}_1\dot{\phi}$$
$$+(m_1-m_2)gR\sin\theta\cos\phi+(2M+m_1+m_2)g(x\sin\theta-R\cos\theta)\Big]$$
$$+2R\dot{m}_2(R\dot{\psi}_1+2R\dot{\phi}-c_2)\delta\phi+\Big[R(\dot{\psi}_1-c_2)R\dot{m}_1$$
$$+(R\dot{\psi}_1+2R\dot{\phi}-c_2)R\dot{m}_2\Big]\delta\psi_1\Big\}dt=0$$

三、变质量非完整系统哈密顿原理的Суслов形式

由(2.19)式，我们将$\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n$中的$r$中以其它$k$个线性地表示出，得

$$\dot{q}_{k+l}=\sum_{s=1}^{k} h_{ls}\dot{q}_s+h_l \qquad (l=1,\cdots,r) \tag{3.1}$$

式中 h_{ls}，h_l均为$q_1,\cdots,q_n$和 t 的函数。由上式可得非完整的约束加在虚位移上的限制条件为：

$$\delta q_{k+l}=\sum_{s=1}^{k} h_{ls}\delta q_s \qquad (l=1,\cdots,r) \tag{3.2}$$

利用(3.1)式将系统动能T中的$\dot{q}_{k+l}$ $(l=1,\cdots,r)$消去，即

$$T(q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1\cdots,\dot{q}_n,t)=T^*(q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_k,t) \tag{3.3}$$

于是有：

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}}\frac{\partial \dot{q}_{k+l}}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}}h_{ls}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_i}=\frac{\partial T}{\partial q_i}+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}}\frac{\partial \dot{q}_{k+l}}{\partial q_i}$$

由此得：

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s}-\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}}h_{ls},\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T^*}{\partial q_i}-\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}}\frac{\partial \dot{q}_{k+l}}{\partial q_i} \tag{3.4}$$

又

$$\delta T=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}}\delta \dot{q}_{k+l}$$

将(3.4)代入上式得：

$$\delta T=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s$$

$$+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}}\left(\delta \dot{q}_{k+l}-\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_{k+l}}{\partial q_i}\partial q_i-\sum_{s=1}^{k}h_{ls}\delta \dot{q}_s\right) \tag{3.5}$$

在上式中

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s=\delta T^* \tag{3.6}$$

$$\delta \dot{q}_{k+l}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_{k+l}}{\partial q_i}\delta q_i-\sum_{s=1}^{k}h_{ls}\,\delta \dot{q}_s$$

$$=\frac{d}{dt}\delta q_{k+l}-\left(\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial \dot{q}_{k+l}}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial \dot{q}_{k+l}}{\partial q_{k+j}}\delta q_{k+j}\right)-\sum_{s=1}^{k}h_{ls}\frac{d}{dt}\delta q_s$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{k}h_{ls}\delta q_s\right)-\left(\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial \dot{q}_{k+l}}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{j=1}^{r}\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial \dot{q}_{k+l}}{\partial q_{k+j}}h_{js}\,\delta q_s\right)$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{k} h_{ls}\delta q_s\right)+\sum_{s=1}^{k} \dot{h}_{ls}\delta q_s$$

$$=\sum_{s=1}^{k}\left[\dot{h}_{ls}-\frac{\partial \dot{q}_{k+l}}{\partial q_s}-\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial \dot{q}_{k+l}}{\partial q_{k+j}} h_{js}\right]\delta q_s$$

$$=\sum_{s=1}^{k}\left[\dot{h}_{ls}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial h_{li}}{\partial q_s}\dot{q}_i-\frac{\partial h_l}{\partial q_s}-\sum_{j=1}^{r} h_{js}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial h_{li}}{\partial q_{k+j}}\dot{q}_i+\frac{\partial h_l}{\partial q_{k+j}}\right)\right]\delta q_s$$

$$=\sum_{s=1}^{k} A_s^{k+l}\delta q_s \tag{3.7}$$

$$A_s^{k+l}\triangleq \dot{h}_{ls}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial h_{li}}{\partial q_s}\dot{q}_i-\frac{\partial h_l}{\partial q_s}-\sum_{j=1}^{r} h_{js}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial h_{li}}{\partial q_{k+j}}\dot{q}_i+\frac{\partial h_l}{\partial q_{k+j}}\right) \tag{3.8}$$

如果将(3.6)、(3.7)代入(3.5)，则得

$$\delta T=\delta T^*+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}}\sum_{s=1}^{k} A_s^{k+l}\delta q_s \tag{3.9}$$

设约束是平稳的，则(3.1)中的h_l消失，(3.8)可简化为：

$$A_s^{k+l}=\dot{h}_{ls}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial h_{li}}{\partial q_s}\dot{q}_i-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} h_{js}\frac{\partial h_{li}}{\partial q_{k+j}}\dot{q}_i \tag{3.10}$$

在实际应用时，A_s^{k+l}并不需用(3.8)或(3.10)来求，我们可将(3.1)写成

$$f_l=\dot{q}_{k+l}-\left(\sum_{s=1}^{k} h_{ls}\dot{q}_s+h_l\right)=0 \qquad (l=1,\cdots,r)$$

对上式取变分，便可得到：

$$\delta f_l=\delta\dot{q}_{k+l}-\delta\left(\sum_{s=1}^{k} h_{ls}\dot{q}_s+h_l\right)$$

$$=\delta\dot{q}_{k+l}-\sum_{s=1}^{k} h_{ls}\delta\dot{q}_s-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{s=1}^{k} h_{ls}\dot{q}_s+h_l\right)\delta q_i$$

$$=\delta\dot{q}_{k+l}-\sum_{s=1}^{k} h_{ls}\delta\dot{q}_s-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_{k+l}}{\partial q_i}\delta q_i$$

$$=\sum_{s=1}^{k} A_s^{k+l}\delta q_s$$

可见，δf_l表达式中δq_s前面的系数便是对应的 A_s^{k+l}。

例3. 质量分别为$m_1(t)$和$m_2(t)$的质点P_1和P_2由一根具有不变长度 $2l$ 的细杆联结（图3）。设该系统在铅垂平面Oxy内运动，杆子中点C的速度必须沿杆子方向。取广义坐标$q_1=\phi$，$q_2=x$，$q_3=y$，非 完整约束方程为:

$$\dot{y}=\dot{x}\mathrm{tg}\phi$$

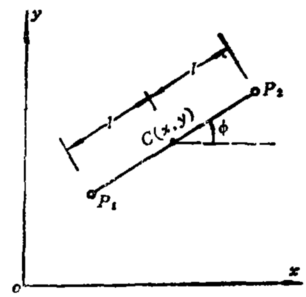

图 3

于是$n=3$，$r=1$，$k=2$，由上式得

$$\delta y=\delta x\mathrm{tg}\phi,\quad f_1=\dot{y}-\dot{x}\mathrm{tg}\phi=0$$

$$\delta f_1=\frac{d}{dt}\delta y-\delta(\dot{x}\mathrm{tg}\phi)$$

$$=-\dot{x}\sec^2\phi\delta\phi+\dot{\phi}\sec^2\phi\delta x$$

所以

$$A_1^{k+1}=-\dot{x}\sec^2\phi,\quad A_2^{k+1}=\dot{\phi}\sec^2\phi$$

利用(3.1)将m_β，$\vec{v}_\beta$中的$\dot{q}_{k+l}(l=1,\cdots,r)$消去得

$$m_\beta^*=m_\beta^*(q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_k,\ t)$$

$$\vec{v}_\beta^*=\vec{v}_\beta^*(q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_k,\ t)$$

$$\sum_{i=1}^{n}K_i\delta q_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{N}\dot{m}_\beta\vec{u}_\beta\frac{\partial\vec{v}_\beta}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i$$

$$=\sum_{s=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{N}\dot{m}_\beta^*\vec{u}_\beta\frac{\partial\vec{v}_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s+\sum_{l=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{N}\dot{m}_\beta^*\vec{u}_\beta\frac{\partial\vec{v}_\beta}{\partial\dot{q}_{k+l}}\delta q_{k+l}$$

$$=\sum_{s=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{N}\dot{m}_\beta^*\vec{u}_\beta\left(\frac{\partial\vec{v}_\beta}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\partial\vec{v}_\beta}{\partial\dot{q}_{k+l}}h_{ls}\right)\delta q_s$$

$$=\sum_{s=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{N}\dot{m}_\beta^*\vec{u}_\beta\frac{\partial\vec{v}_\beta^*}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s$$

$$=\sum_{s=1}^{k}K_s\delta q_s \tag{3.11}$$

这里

$$K_s=\sum_{\beta=1}^{N}\dot{m}_\beta^*\vec{u}_\beta\frac{\partial\vec{v}_\beta^*}{\partial\dot{q}_s} \tag{3.12}$$

同样可得

$$\sum_{i=1}^{n}J_i\delta q_i=\sum_{s=1}^{k}J_s^*\delta q_s \tag{3.13}$$

这里

$$J_s^*=\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\sum_{\beta=1}^{N}\vec{v}_\beta^{*2}\frac{\partial m_\beta^*}{\partial\dot{q}_s}\right)-\sum_{\beta=1}^{N}\vec{v}_\beta^{*2}\left(\frac{\partial m_\beta^*}{\partial q_s}+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial m_\beta^*}{\partial q_{k+l}}h_{ls}\right)\right] \tag{3.14}$$

将(3.11)、(3.13)、(3.9)代入(2.22)式就得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta(T^*+U)+\sum_{s=1}^{k}\left(\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{k+l}}A_s^{k+l}+K_s+J_s^*\right)\delta q_s\right]dt=0 \tag{3.15}$$

在本节中，在导出(3.15)式时仅应用了关系式

$$\delta\dot{q}_s=\frac{d}{dt}\delta q_s\qquad(s=1,\ \cdots,\ k) \tag{3.16}$$

即求导和变分的交换性仅对独立的变分δq_s适用，这是 Appell 和 Суслов的观点[14,15]，所以(3.15) 称为变质量非完整系统哈密顿原理的 Суслов 形式。顺便指出，当非完整约束方程是非线性的(2.17)，而切达也夫条件成立时，类似地可推出(3.15)式。

从(3.15)式可容易导出变质量非完整系统的Воронец方程：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial(T^*+U)}{\partial q_s}=\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial(T^*+U)}{\partial q_{k+l}}h_{ls}+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{k+l}}A_s^{k+l}+K_s+J_s^*$$

$$(s=1,\ \cdots,\ k) \tag{3.17}$$

上式中如果T^*，$\frac{\partial U}{\partial q_{k+l}}$及$h_{ls}$中不含$q_{k+l}$($l=1,\ \cdots,\ r$)，则得到变质量非完整系统的 Чаплыгин 方程：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial(T^*+U)}{\partial q_s}=\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial U}{\partial q_{k+l}}h_{ls}+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{k+l}}A_s^{k+l}+K_s+J_s^*\quad(s=1,\ \cdots,\ k) \tag{3.18}$$

例4. 图 4 表示一平面追踪曲线。Q点按已知规律$\overline{OQ}=\xi(t)$沿水平轴Ox运动，质量为$m(t)$的质点P在铅垂平面内运动，其速度$\vec{v}_P$始终指向Q，取广义坐标$q_1=x$，$q_2=y$，非完整约束方程为：

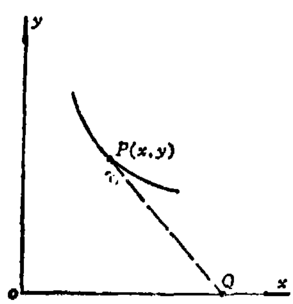

图 4

$$\dot{y}=\frac{y}{x-\xi}\dot{x}$$

于是 $n=2,\ r=1,\ k=1$

$$f_1=\dot{y}-\frac{y}{x-\xi}\dot{x},\quad \delta f_1=\frac{y\dot{\xi}}{(x-\xi)^2}\delta x$$

$$A_1^{k+1}=\frac{y\dot{\xi}}{(x-\xi)^2},\quad T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

$$T^*=\frac{1}{2}m\dot{x}^2\left[1+\frac{y^2}{(x-\xi)^2}\right],\ U=-mgy$$

$$\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{k+l}}A_s^{k+l}=\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}A_1^{k+l}=\frac{my^2\dot{\xi}\dot{x}}{(x-\xi)^3}$$

$$\vec{v}_P=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}=\dot{x}\left[\vec{i}+\frac{y}{x-\xi}\vec{j}\right]$$

设$\vec{u}_P=\eta(t)\vec{v}_P$，$\eta(t)$为给定的时间$t$的函数，于是

$$K_x=\dot{m}\vec{u}_P\frac{\partial\vec{v}_P}{\partial\dot{x}}=\dot{m}\eta(t)\,\dot{x}\left[\;1+\left(\frac{y}{x-\xi}\right)^2\right],\quad J_x=0$$

将诸式代入(3.15)式得系统的哈密顿原理：

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta\left[\frac{m\dot{x}^2(x^2+y^2+\xi^2-2x\xi)}{2(x-\xi)^2}-mgy\right]\right.$$

$$\left.+\dot{x}\frac{\dot{m}\eta(t)(x-\xi)[y^2+(x-\xi)^2]+my^2\xi}{(x-\xi)^3}\delta x\right\}dt=0$$

参 考 文 献

[1] 汪家诉，《分析动力学》，高等教育出版社，(1958).

[2] Pars, L. A., *A treatise on Analytical Dynamics*, London,(1965).

[3] Неймарк, Ю. И., Н. А. Фуфаев, *Динамика Неголономных Систем*, М., Наука, (1967).

[4] 近滕一夫等，《工程力学系统》，刘亦珩译，上海科技出版社，(1962).

[5] Huston, R. L., C. E. Passerello, Nonholonomic systems with non-linear constraint equations, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 11,5,331—336.

[6] 宋书华，火箭汽车，科学与生活，4(1981).

[7] 戈正铭，变质量非完整系统运动方程及其对控制系统的应用，上海交通大学学报，4(1979).

[8] Ferrers,Extension of Lagrange's equation, *Journal of Mathematics*, London,T.XII, (1873).

[9] Воронец, П. В., Об уравнениях движения для неголононных систем, Матем. Сб., 22,4(1901).

[10] Чаплыгин, С. А., Исследования по динамик неголономных систем, Гостехиздат, (1949).

[11] Четаев, Н. Г., Оприципе гаусс, Изв. Физ.-Матем. Об-Ва при Казан. Гос. Чн-Те, (1932—1933).

[12] Hölder O., Ueber die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis, Nachrichten von der Koen. Ges. der wissonschaften zu Göttingen, Math-phys, (1896).

[13] Новоселов, В. С., *Вариационные Методы в Механике*, Изд-Во Лгу, (1966).

[14] Суслов, Г. К., Об одном видоизменении начала даламбера, *Матем. Сб.*,22,4 (1901).

[15] Румянцев, В. В., О принципе гамильтона для неголономных систем, *ПММ*, 42, 3 (1978).

The Hamilton's Principle of Nonholonomic Variable Mass Systems

Ge Zheng-ming Cheng Yi-he

(Teaching and Research Section of General Mechanics, Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiao-tong University, Shanghai)

Abstract

The Hamilton's principle is extended to the most general, nonholonomic variable mass systems. The Hamilton's principle of nonholonomic variable mass systems is obtained and is illustrated with examples.