

# 二维活动网格的 Lagrange 方法——计算 具有多种物质的辐射流体力学 方程组的一种方法\*

常 谦 顺

(中国科学院应用数学研究所, 1981年4月11日收到)

## 摘 要

本文提出了活动网格 Lagrange 方法. 在计算中不要追踪网格边界线, 只要计算网格中心的运动, 再根据网格中心的位置按一定规则来形成网格的边界线. 这样形成的 Lagrange 网格允许网格间的切向滑移和网格相邻关系的变化. 为了改进方法的稳定性和避免网格间的过度的滑移, 本文中对网格给出两个速度.

## 一、方法的基本思想

计算力学起源于四十年代 von Neumann 及其同事们对飞机受冲击波干扰等问题为中心的研究, 其后又受到电子计算机的促进逐步形成一门边缘学科, 在计算力学中无粘可压缩流体运动的问题是一类既重要而又困难的问题. 由于实际的需要在同类问题中经常会有高温的传递, 因此就要解辐射流体力学方程组. 对这个方程组的数值求解方法基本思想与流体力学方程组一样, 但是还要考虑温度的传递, 这使得问题更加复杂. 由于运动图象比较简单和数字电子计算机发展很快, 所以从四十年代末期到六十年代初期一维辐射流体力学方程组的计算方法已经发展得比较完整, 特别是带 von Neumann 粘性的 Lagrange 方法<sup>[1]</sup> 计算一维问题已经经过大量实践的考验是一种成熟的方法.

二维无粘可压缩流体力学方程组和辐射流体力学方程组的数值方法从五十年代中期发展到现在已经研究出了各种各样的计算方法, 但是每种方法都有局限性. 基本的 Euler 方法<sup>[2]</sup> 由于物质内界面难以处理等缺点不能计算有多种物质的问题. 基本的 Lagrange 方法<sup>[3][4]</sup> 虽然有许多优点, 但是当有大的畸变和滑移时, 会形成网格交叉, 以致无法继续计算. 在基本 Euler 和 Lagrange 方法的基础上大量的组合 Euler-Lagrange 方法出现了, 其中应用最广泛的一种组合方法是 PIC 方法<sup>[5][6]</sup>. 这种方法已经可以计算许多的二维流体力学问题, 取得了较好的结果, 但是在计算辐射流体力学问题时由于混合网格中不同物质之间能量的分配难于处理, 常常把辐射波拉平, 造成计算结果有定性的歪曲. 除了上述以网格为基础的方法外

\* 秦元勋推荐.

还有一大类方法是质团方法,比较重要的有 PAF 方法<sup>[7]</sup>,后来秦元勋教授提出了天然差分方法<sup>[8]</sup>,对质团建立了体积的概念,可以用来计算二维辐射流体力学的问题。

本文中我们提出了活动网格 Lagrange 方法。在计算中不要追踪网格边界线,只要计算网格中心的运动,再根据网格中心的位置按一定规则来形成网格的边界线,这个规则就采用秦元勋教授在[8]中提出的膨胀形成邻居法和用垂直平分线形成边界法。这样形成的 Lagrange 网格允许流体间的切向滑移和在大的畸变时网格相邻关系的变化。为了在较弱的条件下保证方法的稳定性和克服网格过度活动的缺点,本文中对每个网格给出两个速度,我们已证明这种做法的结果是相当于对辐射流体力学方程组加上 PIC 粘性。考虑到广泛的应用性,本文在二维柱坐标系中来叙述此方法和推导差分格式。

## 二、基本的计算方法

### 1. 符号说明

$\vec{R}_i = (z_i, R_i)$	坐标向量
$\vec{u}_i = (u_i, v_i)$	速度向量
$\rho_i$	密度
$W_i$	体积
$M_i$	质量
$T_i$	温度 (用绝对温标)
$P_i$	总压力
$Q_i$	单位质量的能源放能的速率
$e_i$	单位质量的内能
$K_i$	辐射系数
$z_{i,j,k}, R_{i,j,k}$	网格 $i$ 与相邻网格 $j, k$ 之间的角点的坐标
$a$	Stefan-Boltzmann 常数
$S_{i,j}$	网格 $i$ 与 $j$ 之间交界面面积
$G_i = \frac{1}{2} \cdot (u_i^2 + v_i^2) + e_i + \frac{aT_i^4}{\rho_i}$	单位质量的总能量
$\vec{R}_{i,j}$	从网格 $i$ 的中心到 $j$ 的中心向量
$\alpha_{i,j}$	$(-\vec{R}_{i,j})$ 与 $z$ 轴的夹角

### 2. 差分格式

二维柱坐标的辐射流体力学方程组是

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial R \rho v}{\partial R} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial R \rho u v}{\partial R} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial R \rho v^2}{\partial R} + \frac{\partial P}{\partial R} = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho G + P) u + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R (\rho G + P) v \\ = \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R K \frac{\partial T}{\partial R} + \rho Q \end{aligned} \right.$$

设  $\Omega(t)$  是流体中某个随流体运动的 Lagrange 网格, 有时也称  $\Omega(t)$  为质团,  $\partial\Omega(t)$  为其边界,  $\vec{n}$  为  $\partial\Omega(t)$  的外法线方向的单位向量,  $\vec{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ . 将上述微分方程组化为  $\Omega(t)$  中的积分关系式是

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_{\Omega(t)} 2\pi R \rho dR dz &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iint_{\Omega(t)} 2\pi R \rho u dR dz &= - \oint_{\partial\Omega(t)} 2\pi R P \cos\alpha ds \\ \frac{d}{dt} \iint_{\Omega(t)} 2\pi R \rho v dR dz &= - \oint_{\partial\Omega(t)} 2\pi R P \sin\alpha ds + 2\pi \iint_{\Omega(t)} P dR dz \\ \frac{d}{dt} \iint_{\Omega(t)} 2\pi R \rho G dR dz &= - \oint_{\partial\Omega(t)} 2\pi R P \vec{u} \cdot \vec{n} ds + \oint_{\partial\Omega(t)} K \nabla T \cdot \vec{n} ds \\ &+ \iint_{\Omega(t)} 2\pi R Q dR dz \end{aligned} \right.$$

考虑到 Lagrange 网格是多边形 (见图 1), 忽略一阶小量得到

$$M_i = \iint_{\Omega(t)} 2\pi R \rho dR dz = \text{const.}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M_i u_i) &= - \sum_j P_{i,j} 2\pi \int_{\partial\Omega_i} R dR = \sum_j P_{i,j} \pi (R_{i,j,j+1} \\ &+ R_{i,j-1,j}) (R_{i,j-1,j} - R_{i,j,j+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M_i v_i) &= - \sum_j P_{i,j} 2\pi \int_{\partial\Omega_i} R dz + 2\pi P_i S_i = \sum_j P_{i,j} \pi (R_{i,j,j+1} \\ &+ R_{i,j-1,j}) (z_{i,j,j+1} - z_{i,j-1,j}) + 2\pi P_i S_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M_i G_i) &= \sum_j P_{i,j} \pi (R_{i,j,j+1} + R_{i,j-1,j}) [(R_{i,j-1,j} - R_{i,j,j+1}) u_{i,j} \\ &+ (z_{i,j,j+1} - z_{i,j-1,j}) v_{i,j}] + \sum_j S_{i,j} K_{i,j} (T_j - T_i) + M_i Q_i \end{aligned}$$

其中

$$K_{i,j} = \begin{cases} \frac{2K_i K_j}{|\vec{R}_{i,j}| (K_i + K_j)} & \text{当 } j \text{ 为实网格时} \\ \frac{2K_i}{|\vec{R}_{i,j}|} & \text{当 } j \text{ 为虚网格时} \end{cases}$$

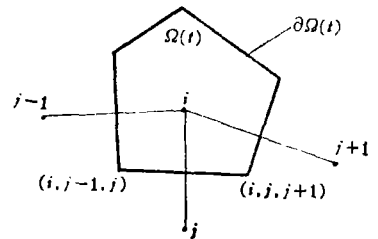


图1 Lagrange 网格示意图

$\sum_j$  是对  $i$  的所有相邻网格求和,  $S_i$  是  $\Omega(t)$  在平面  $(z, R)$  上的投影面积. 考虑到微分方程有性

质: 当  $P \equiv \text{const.}$  时  $\frac{d\bar{u}_i}{dt} = 0$ , 我们选择  $S_i$  的计算公式使差分格式保持这个基本的物理性质. 这样做也使得动量方程对于  $u$  和  $v$  有对称形式. 再对  $t$  取差分, 由于能量方程对稳定性的要求比动量方程严格得多, 所以我们对能量方程取隐式格式, 对动量方程取显式格式. 这样得到格式是

$$M_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \sum_j \left( P_{i,j}^n - P_i^n \right) \pi \left( R_{i,j-1,j}^n + R_{i,j,j+1}^n \right) \left( R_{i,j-1,j}^n - R_{i,j,j+1}^n \right) \quad (2.1)$$

$$M_i \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = \sum_j \left( P_{i,j}^n - P_i^n \right) \pi \left( R_{i,j-1,j}^n + R_{i,j,j+1}^n \right) \left( z_{i,j,j+1}^n - z_{i,j-1,j}^n \right) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} M_i \frac{G_i^{n+1} - G_i^n}{\Delta t} = & \sum_j S_{i,j}^{n+1} K_{i,j}^{n+1} \left( T_j^{n+1} - T_i^{n+1} \right) + \sum_j P_{i,j}^n \pi \left( R_{i,j-1,j}^n \right. \\ & \left. + R_{i,j,j+1}^n \right) \left[ \left( R_{i,j-1,j}^n - R_{i,j,j+1}^n \right) u_{i,j}^{n+1} + \left( z_{i,j,j+1}^n - z_{i,j-1,j}^n \right) v_{i,j}^{n+1} \right] \\ & + Q_i^{n+1} M_i \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中

$$P_{i,j} = \frac{M_i P_j + M_j P_i}{M_i + M_j}, \quad u_{i,j} = \frac{u_i + u_j}{2}, \quad v_{i,j} = \frac{v_i + v_j}{2}$$

对差分格式 (2.3), 采用类似于牛顿迭代法的一种迭代方法, 公式为

$$\begin{aligned} M_i \left[ \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_i^{n+1(s)} + \frac{4a}{\rho_i^{n+1}} \left( T_i^{n+1(s)} \right)^3 \right] \left( T_i^{n+1(s+1)} - T_i^{n+1(s)} \right) + M_i \left[ e_i^{n+1(s)} \right. \\ \left. + \frac{a}{\rho_i^{n+1}} \left( T_i^{n+1(s)} \right)^4 \right] = \left[ \sum_{j < i} S_{i,j}^{n+1} K_{i,j}^{n+1(s)} \left( T_j^{n+1(s+1)} - T_i^{n+1(s+1)} \right) \right. \\ \left. + \sum_{j > i} S_{i,j}^{n+1} K_{i,j}^{n+1(s)} \left( T_j^{n+1(s)} - T_i^{n+1(s+1)} \right) \right] \Delta t + Q_i^{n+1(s)} M_i \Delta t \\ + \frac{1}{2} M_i \left[ \left( u_i^n \right)^2 + \left( v_i^n \right)^2 - \left( u_i^{n+1} \right)^2 - \left( v_i^{n+1} \right)^2 \right] + \left[ e_i^n + \frac{a}{\rho_i^n} \left( T_i^n \right)^4 \right] M_i \\ + \sum_j P_{i,j}^n \pi \left( R_{i,j-1,j}^n + R_{i,j,j+1}^n \right) \left[ \left( R_{i,j-1,j}^n - R_{i,j,j+1}^n \right) u_{i,j}^{n+1} \right. \\ \left. + \left( z_{i,j,j+1}^n - z_{i,j-1,j}^n \right) v_{i,j}^{n+1} \right] \Delta t \end{aligned} \quad (2.4)$$

### 3. 边界条件

#### (i) 对称轴边界

对于与对称轴距离小于  $\Delta R$  的每个网格  $i$  求邻域时, 加个网格  $(-i)$ . 如果求出  $(-i)$  是  $i$  的相邻网格, 则说明  $i$  是对称轴处的网格. 只要取  $M_{-i} = M_i$ ,  $\rho_{-i} = \rho_i$ ,  $P_{-i} = P_i$ ,  $T_{-i} = T_i$ ,

对于坐标取 $\vec{R}_i$ 与 $\vec{R}_i$ 关于对称轴对称.这样网格*i*可以照常计算.

(ii) 自由面边界

在边界外加一层虚网格,它们参加寻找邻域以帮助实的内部网格划分边界.对虚网格取 $M_i=0, \rho_i=0, P_i=0, T_i=0$ ,虚网格速度取位移速度,它的位置由位移速度算出.

(iii) 输出边界条件

在输出流的边界外仅保留一排网格,该网格中的量 $M, \rho, P, T, u, v$ 均取原来算出的值,边界外其余网格可以放弃.

(iv) 预定输入边界

在该边界外再加一排网格,它的各个量由我们根据物理规律给定.

4. 邻域和网格的求法

本方法中每个Lagrange网格的形状和彼此间的邻域关系是不固定的,要根据网格中心的位置来求.

(i) 求邻域的方法

将计算区域的网格和按边界条件补充的网格组成一个集合 $H_i$ ,作为网格*i*可能的邻网格的集合.

在 $H_i$ 中找一个网格 $j_0$ 使 $|\vec{R}_{i,j_0}| = \min_{j \in H_i} |\vec{R}_{i,j}|$ ,就选 $j_0$ 作为*i*的第一个相邻网格.

在以 $\vec{R}_i$ 为中心,  $\vec{R}_{i,j_0}$ 为起始线反时针方向的 $180^\circ$ 内找下一个邻网格 $j_1$ ,令

$$F(z, R) = (z - z_i)(R_j - R_i) - (R - R_i)(z_j - z_i)$$

则满足 $F(z, R) < 0$ 的 $(z, R)$ 都在反时针方向 $180^\circ$ 内.我们选 $j_1$ 使 $F(z_1, R_1) < 0$ ,并且使

$$\cos(\widehat{\vec{R}_i \vec{R}_{j_1} \vec{R}_{j_0}}) = \frac{\vec{R}_{i,j} \cdot \vec{R}_{j_0,j_1}}{|\vec{R}_{i,j_1}| \cdot |\vec{R}_{j_0,j_1}|} \min_{j \in H_i} \cos(\widehat{\vec{R}_i \vec{R}_j \vec{R}_{j_0}})$$

则 $j_1$ 作为*i*的一个邻网格.再以 $\vec{R}_i$ 为心,  $\vec{R}_{i,j_1}$ 为起始线反时针方向的 $180^\circ$ 内找下一个邻网格 $j_2$ ,如此等等一直到又求出 $j_0$ 为邻网格为止.这样找出*i*的所有相邻网格.

(ii) 网格

对每一个与*i*相邻的网格*j*作 $\vec{R}_{i,j}$ 的垂直平分线,所有这些垂直平分线组成一个多边形,就以这个多边形作为Lagrange网格*i*的形状.在网格*i*与*j, j+1*之间网格顶点的位置是(见图1)

$$z_{i,j,j+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(R_{j+1} - R_i)(z_j^2 + R_j^2 - z_i^2 - R_i^2) - (R_j - R_i)(z_{j+1}^2 + R_{j+1}^2 - z_i^2 - R_i^2)}{(z_j - z_i)(R_{j+1} - R_i) - (z_{j+1} - z_i)(R_j - R_i)}$$

$$R_{i,j,j+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(z_j - z_i)(z_{j+1}^2 + R_{j+1}^2 - z_i^2 - R_i^2) - (z_{j+1} - z_i)(z_j^2 + R_j^2 - z_i^2 - R_i^2)}{(z_j - z_i)(R_{j+1} - R_i) - (z_{j+1} - z_i)(R_j - R_i)}$$

网格*i*与*j*之间交界面面积是

$$S_{i,j} = \pi(R_{i,j-1,j} + R_{i,j,j+1}) \sqrt{(R_{i,j-1,j} - R_{i,j,j+1})^2 + (z_{i,j-1,j} - z_{i,j,j+1})^2}$$

体积是

$$W_i = \frac{\pi}{3} \sum_j (z_{i,j-1,j} - z_{i,j,j+1}) (R_{i,j-1,j}^2 + R_{i,j-1,j} \cdot R_{i,j,j+1} + R_{i,j,j+1}^2) \quad (2.5)$$

5. 移动速度和网格新位置的求法

本方法中对每个网格  $i$  有两个速度，一个是动量方程 (2.1) 和 (2.2) 算出的速度  $\bar{u}_i$ ，用来保证动量和能量守恒；另一个是经过平均的移动速度，用来计算网格的新位置，为了求移动速度在计算区域中用  $\Delta z \times \Delta R$  的 Euler 网格盖住 (见图 2)。

首先计算 Euler 网格的速度

$$\bar{u}_{l,m}^{n+1} = \frac{\sum_{i \in (l,m)} M_i \bar{u}_i^{n+1}}{\sum_{i \in (l,m)} M_i}$$

再计算 Lagrange 网格  $i$  的移动速度。

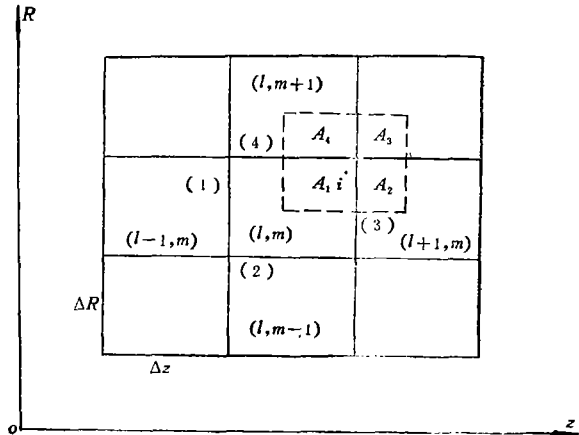


图 2 Euler 网格示意图

$$\bar{u}_i^{n+1} = \frac{A_1 \bar{u}_{l,m}^{n+1} + A_2 \bar{u}_{l+1,m}^{n+1} + A_3 \bar{u}_{l+1,m+1}^{n+1} + A_4 \bar{u}_{l,m+1}^{n+1}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}$$

其中  $A_1, A_2, A_3, A_4$  是面积 (见图 2)。Lagrange 网格  $i$  的新位置是

$$\bar{R}_i^{n+1} = \bar{R}_i^n + \Delta t \bar{u}_i^{n+1} \tag{2.6}$$

6. 总的计算步骤

- (i) 输入和形成初始的  $\bar{u}_i, \bar{R}_i, M_i, \rho_i, P_i, T_i$ 。
- (ii) 用公式 (2.1), (2.2) 计算 Lagrange 网格速度  $\bar{u}_i^{n+1}$ 。
- (iii) 用公式 (2.6) 计算 Lagrange 网格的新位置  $\bar{R}_i^{n+1}$ 。
- (iv) 按照  $\bar{R}_i^{n+1}$  求每个 Lagrange 网格  $i$  的邻域，形成邻域表。按照公式 (2.5) 求体积  $W_i^{n+1}$ ，再求出密度  $\rho_i^{n+1}$ 。
- (v) 用迭代公式 (2.4) 求温度  $T_i^{n+1}$ 。由状态方程求物质压  $P_{M,i}^{n+1}$ ，总压力  $P_i^{n+1} = P_{M,i}^{n+1} + \frac{1}{3} a (T_i^{n+1})^4$ 。再增加时刻，重复第二步，直到算完为止。

三、粘性项的推导

本方法中对每个 Lagrange 网格我们给了两个速度，一个是动量方程算出来的速度，另一个是网格的移动速度。这种作法的结果是对辐射流体力学方程组加上人工粘性项。下面对大小为  $\Delta z \times \Delta R$  的 Euler 网格来推导人工粘性项。考虑 Euler 网格  $(l, m)$ ，速度为  $\bar{u}_{l,m}$ ，质量是  $M_{l,m}$ ，其边界编号如图 2 所示。设在一个 Euler 网格内 Lagrange 网格的数目充分大。在  $\Delta t$  内经过边界 (1) 和 (2) 流入网格  $(l, m)$  的流体质量为：

$$\Delta M_{l-\frac{1}{2},m} = \rho_{l-\frac{1}{2},m}^n u_{l-\frac{1}{2},m}^n \Delta t \cdot 2\pi R_{l-\frac{1}{2},m} \cdot \Delta R$$

$$\Delta M_{l,m-\frac{1}{2}} = \rho_{l,m-\frac{1}{2}}^n v_{l,m-\frac{1}{2}}^n \Delta t \cdot 2\pi R_{l,m-\frac{1}{2}} \cdot \Delta z$$

在  $\Delta t$  内经过边界 (3) 和 (4) 流出  $(l, m)$  的质量为

$$\Delta M_{l+\frac{1}{2},m} = \rho_{l+\frac{1}{2},m}^n \cdot u_{l+\frac{1}{2},m}^n \cdot \Delta t \cdot 2\pi R_{l+\frac{1}{2},m} \cdot \Delta R$$

$$\Delta M_{l,m+\frac{1}{2}} = \rho_{l,m+\frac{1}{2}}^n v_{l,m+\frac{1}{2}}^n \Delta t \cdot 2\pi R_{l,m+\frac{1}{2}} \cdot \Delta R$$

鉴于:  $M_{l,m}^n = \rho_{l,m}^n 2\pi R_{l,m} \Delta R \Delta z$

由此得出质量守恒的公式

$$\begin{aligned} \rho_{l,m}^{n+1} = & \rho_{l,m}^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left( \rho_{l+\frac{1}{2},m}^n \cdot u_{l+\frac{1}{2},m}^n - \rho_{l-\frac{1}{2},m}^n \cdot u_{l-\frac{1}{2},m}^n \right) \\ & - \frac{\Delta t}{R_{l,m} \cdot \Delta R} \left( \rho_{l,m+\frac{1}{2}}^n \cdot v_{l,m+\frac{1}{2}}^n \cdot R_{l,m+\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. - \rho_{l,m-\frac{1}{2}}^n \cdot v_{l,m-\frac{1}{2}}^n \cdot R_{l,m-\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

下面为了推导动量方程和能量方程的统一差分格式, 将差分格式 (2.1) — (2.3) 写为向量形式

$$M_i \bar{X}_i^{n+1} = M_i \bar{X}_i^n + \Delta t \bar{F}_i \quad (3.2)$$

其中

$$\bar{X}_i = (u_i, v_i, G_i)'$$

$$\bar{F}_i = (F_{1i}, F_{2i}, F_{3i})'$$

$$F_{1i} = \sum_j (P_{i,j}^n - P_i^n) \pi (R_{i,j-1,j}^n + R_{i,j,j+1}^n) (R_{i,j-1,j}^n - R_{i,j,j+1}^n)$$

$$= \sum_j (P_{i,j}^n - P_i^n) S_{i,j}^n \cdot \cos \alpha_{i,j}^n$$

$$F_{2i} = \sum_j (P_{i,j}^n - P_i^n) \pi (R_{i,j-1,j}^n + R_{i,j,j+1}^n) (z_{i,j,j+1}^n + z_{i,j-1,j}^n)$$

$$= \sum_j (P_{i,j}^n - P_i^n) S_{i,j}^n \cdot \sin \alpha_{i,j}^n$$

$$F_{3i} = \sum_j S_{i,j}^{n+1} \cdot K_{i,j}^{n+1} (T_j^{n+1} - T_i^{n+1}) + \sum_j P_{i,j}^n \pi (R_{i,j-1,j}^n + R_{i,j,j+1}^n)$$

$$\cdot [(R_{i,j-1,j}^n - R_{i,j,j+1}^n) u_{i,j}^{n+1} + (z_{i,j,j+1}^n - z_{i,j-1,j}^n) v_{i,j}^{n+1}] + Q_i^{n+1} M_i$$

$$= \sum_j S_{i,j}^{n+1} K_{i,j}^{n+1} (T_j^{n+1} - T_i^{n+1}) + \sum_j P_{i,j}^n S_{i,j}^n \bar{R}_{j,i}^n \cdot \bar{u}_{i,j}^{n+1}$$

$$\cdot \frac{1}{|\bar{R}_{j,i}^n|} + Q_i^{n+1} M_i$$

将 (3.2) 式对  $n$  时刻 Euler 网格  $(l, m)$  中所有的 Lagrange 网格  $i$  求和得

$$\sum_i M_i \bar{X}_i^{n+1} = \sum_i M_i \bar{X}_i^n + \Delta t \sum_i \bar{F}_i \quad (3.3)$$

$$M_{l,m}^n \bar{X}_{l,m}^n = \sum_i M_i \bar{X}_i^n$$

$$M_{i,m}^{n+1} \bar{X}_{i,m}^{n+1} = \sum_{i'} M_{i'} \bar{X}_{i'}^{n+1} = \sum_i M_i \bar{X}_i^{n+1} + (\text{流入的量}) - (\text{流出的量})$$

这里  $\sum_{i'}$  是对  $n+1$  时刻网格  $(l, m)$  中所有 Lagrange 网格  $i'$  求和。令

$$H_{l,m}(k) = \begin{cases} 1 & \text{若流体经过界面}(k)\text{进入网格}(l, m) \\ 0 & \text{若流体经过界面}(k)\text{流出网格}(l, m) \end{cases}$$

得到

$$\begin{aligned} M_{i,m}^{n+1} \bar{X}_{i,m}^{n+1} = & \sum_i M_i \bar{X}_i^{n+1} + [H_{l,m}(1) \cdot \Delta M_{l-\frac{1}{2},m} \bar{X}_{l-1,m}^n \\ & + H_{l,m}(2) \Delta M_{l,m-\frac{1}{2}} \bar{X}_{l,m-1}^n + H_{l,m}(3) (-\Delta M_{l+\frac{1}{2},m}) \bar{X}_{l+1,m}^n \\ & + H_{l,m}(4) (-\Delta M_{l,m+\frac{1}{2}}) \bar{X}_{l,m+1}^n] + [(1-H_{l,m}(1)) \Delta M_{l-\frac{1}{2},m} \\ & + (1-H_{l,m}(2)) \Delta M_{l,m-\frac{1}{2}} + (1-H_{l,m}(3)) (-\Delta M_{l+\frac{1}{2},m}) \\ & + (1-H_{l,m}(4)) \cdot (-\Delta M_{l,m+\frac{1}{2}})] \bar{X}_{i,m}^n \end{aligned}$$

利用质量守恒可得

$$\begin{aligned} M_{i,m}^{n+1} \bar{X}_{i,m}^{n+1} = & \sum_i M_i \bar{X}_i^{n+1} + (M_{i,m}^{n+1} - M_{i,m}^n) \bar{X}_{i,m}^n + H_{l,m}(1) \Delta M_{l-\frac{1}{2},m} (\bar{X}_{l-1,m}^n - \bar{X}_{l,m}^n) \\ & + H_{l,m}(2) \Delta M_{l,m-\frac{1}{2}} (\bar{X}_{l,m-1}^n - \bar{X}_{l,m}^n) + H_{l,m}(3) \Delta M_{l+\frac{1}{2},m} (\bar{X}_{l,m}^n - \bar{X}_{l+1,m}^n) \\ & + H_{l,m}(4) \Delta M_{l,m+\frac{1}{2}} (\bar{X}_{l,m}^n - \bar{X}_{l,m+1}^n) \end{aligned}$$

利用(3.3)式,并考虑到 $\Delta M$ 的算式和 $H_{l,m}(k)$ 的定义得到

$$\begin{aligned} \rho_{i,m}^{n+1} \bar{X}_{i,m}^{n+1} = & \rho_{i,m}^{n+1} \bar{X}_{i,m}^n + \frac{\Delta t}{2\pi R_{l,m} \cdot \Delta R \cdot \Delta z} \sum_i \bar{F}_i \\ & + \frac{u_{i-\frac{1}{2},m}^n + |u_{i-\frac{1}{2},m}^n|}{2} \rho_{i-\frac{1}{2},m}^n \frac{\Delta t}{\Delta z} (\bar{X}_{i-1,m}^n - \bar{X}_{i,m}^n) + \frac{v_{i,m-\frac{1}{2}}^n + |v_{i,m-\frac{1}{2}}^n|}{2} \rho_{i,m-\frac{1}{2}}^n \cdot \Delta t \\ & \cdot \frac{R_{l,m-\frac{1}{2}}}{R_{l,m} \cdot \Delta R} (\bar{X}_{l,m-1}^n - \bar{X}_{l,m}^n) + \frac{u_{i+\frac{1}{2},m}^n - |u_{i+\frac{1}{2},m}^n|}{2} \rho_{i+\frac{1}{2},m}^n \frac{\Delta t}{\Delta z} (\bar{X}_{i,m}^n - \bar{X}_{i+1,m}^n) \\ & + \frac{v_{i,m+\frac{1}{2}}^n - |v_{i,m+\frac{1}{2}}^n|}{2} \rho_{i,m+\frac{1}{2}}^n \cdot \Delta t \frac{R_{l,m+\frac{1}{2}}}{R_{l,m} \cdot \Delta R} (\bar{X}_{i,m}^n - \bar{X}_{i,m+1}^n) \end{aligned}$$

将 $\bar{X}$ 和 $\sum_i \bar{F}_i$ 的公式代入上式,并考虑到网格 $(l, m)$ 中有充分多的Lagrange网格后得到活动网格Lagrange方法的动量和能量方程的统一差分格式如下

$$\begin{aligned} \rho_{i,m}^{n+1} u_{i,m}^{n+1} = & \rho_{i,m}^{n+1} u_{i,m}^n + \Delta t \frac{P_{i-\frac{1}{2},m}^n - P_{i+\frac{1}{2},m}^n}{\Delta z} + \frac{u_{i-\frac{1}{2},m}^n + |u_{i-\frac{1}{2},m}^n|}{2} \rho_{i-\frac{1}{2},m}^n \cdot \Delta t \\ & \cdot \frac{u_{i-1,m}^n - u_{i,m}^n}{\Delta z} + \frac{v_{i,m-\frac{1}{2}}^n + |v_{i,m-\frac{1}{2}}^n|}{2} \rho_{i,m-\frac{1}{2}}^n \cdot \Delta t \cdot \frac{R_{l,m-\frac{1}{2}}}{R_{l,m}} \\ & \cdot \frac{u_{i,m-1}^n - u_{i,m}^n}{\Delta R} + \frac{u_{i+\frac{1}{2},m}^n - |u_{i+\frac{1}{2},m}^n|}{2} \rho_{i+\frac{1}{2},m}^n \cdot \Delta t \frac{u_{i,m}^n - u_{i+1,m}^n}{\Delta z} \end{aligned}$$



$$+ \frac{v_{i,m+\frac{1}{2}}^n - |v_{i,m+\frac{1}{2}}^n|}{2} \rho_{i,m+\frac{1}{2}}^n \Delta t \frac{R_{i,m+\frac{1}{2}}}{R_{i,m}} \cdot \frac{u_{i,m}^n - u_{i,m+1}^n}{\Delta R} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \rho_{i,m}^{n+1} v_{i,m}^{n+1} = & \rho_{i,m}^{n+1} \cdot v_{i,m}^{n+1} + \Delta t \frac{P_{i,m-\frac{1}{2}}^n R_{i,m-\frac{1}{2}} - P_{i,m+\frac{1}{2}}^n R_{i,m+\frac{1}{2}}}{R_{i,m} \cdot \Delta R} \\ & + \frac{\Delta t \cdot P_{i,m}^n}{R_{i,m}} + \frac{u_{i-\frac{1}{2},m}^n + |u_{i-\frac{1}{2},m}^n|}{2} \rho_{i-\frac{1}{2},m}^n \cdot \Delta t \frac{v_{i-1,m}^n - v_{i,m}^n}{\Delta z} \\ & + \frac{v_{i,m-\frac{1}{2}}^n + |v_{i,m-\frac{1}{2}}^n|}{2} \rho_{i,m-\frac{1}{2}}^n \cdot \Delta t \frac{R_{i,m-\frac{1}{2}}}{R_{i,m}} \frac{v_{i,m-1}^n - v_{i,m}^n}{\Delta R} \\ & + \frac{u_{i+\frac{1}{2},m}^n - |u_{i+\frac{1}{2},m}^n|}{2} \rho_{i+\frac{1}{2},m}^n \Delta t \frac{v_{i,m}^n - v_{i+1,m}^n}{\Delta z} \\ & + \frac{v_{i,m+\frac{1}{2}}^n - |v_{i,m+\frac{1}{2}}^n|}{2} \rho_{i,m+\frac{1}{2}}^n \cdot \Delta t \frac{R_{i,m+\frac{1}{2}}}{R_{i,m}} \frac{v_{i,m}^n - v_{i,m+1}^n}{\Delta R} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \rho_{i,m}^{n+1} G_{i,m}^{n+1} = & \rho_{i,m}^{n+1} G_{i,m}^n + \Delta t \left[ \frac{K_{i-\frac{1}{2},m}^{n+1} (T_{i-1,m}^{n+1} - T_{i,m}^{n+1})}{\Delta z} \right. \\ & + \left. \frac{K_{i+\frac{1}{2},m}^{n+1} (T_{i+1,m}^{n+1} - T_{i,m}^{n+1})}{\Delta z} \right] + \Delta t \left[ \frac{R_{i,m-\frac{1}{2}}}{R_{i,m}} \frac{K_{i,m-\frac{1}{2}}^{n+1} (T_{i,m-1}^{n+1} - T_{i,m}^{n+1})}{\Delta R} \right. \\ & + \left. \frac{R_{i,m+\frac{1}{2}}}{R_{i,m}} \frac{K_{i,m+\frac{1}{2}}^{n+1} (T_{i,m+1}^{n+1} - T_{i,m}^{n+1})}{\Delta R} \right] + \Delta t \frac{P_{i-\frac{1}{2},m}^n \cdot u_{i-\frac{1}{2},m}^{n+1} - P_{i+\frac{1}{2},m}^n \cdot u_{i+\frac{1}{2},m}^{n+1}}{\Delta z} \\ & + \Delta t \frac{P_{i,m-\frac{1}{2}}^n v_{i,m-\frac{1}{2}}^{n+1} R_{i,m-\frac{1}{2}} - P_{i,m+\frac{1}{2}}^n v_{i,m+\frac{1}{2}}^{n+1} R_{i,m+\frac{1}{2}}}{R_{i,m} \cdot \Delta R} + Q_{i,m}^{n+1} \rho_{i,m}^n \cdot \Delta t \\ & + \frac{u_{i-\frac{1}{2},m}^n + |u_{i-\frac{1}{2},m}^n|}{2} \rho_{i-\frac{1}{2},m}^n \Delta t \frac{G_{i-1,m}^n - G_{i,m}^n}{\Delta z} + \frac{v_{i,m-\frac{1}{2}}^n + |v_{i,m-\frac{1}{2}}^n|}{2} \\ & \cdot \rho_{i,m-\frac{1}{2}}^n \Delta t \frac{R_{i,m-\frac{1}{2}}}{R_{i,m}} \frac{G_{i,m-1}^n - G_{i,m}^n}{\Delta R} + \frac{u_{i+\frac{1}{2},m}^n - |u_{i+\frac{1}{2},m}^n|}{2} \rho_{i+\frac{1}{2},m}^n \Delta t \\ & \cdot \frac{G_{i,m}^n - G_{i+1,m}^n}{\Delta z} + \frac{v_{i,m+\frac{1}{2}}^n - |v_{i,m+\frac{1}{2}}^n|}{2} \rho_{i,m+\frac{1}{2}}^n \Delta t \frac{R_{i,m+\frac{1}{2}}}{R_{i,m}} \\ & \cdot \frac{G_{i,m}^n - G_{i,m+1}^n}{\Delta R} \end{aligned} \quad (3.6)$$

将差分格式(3.1), (3.4), (3.5), (3.6)在  $(n, l, m)$  处展开为 Taylor 级数得到

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial R \rho v}{\partial R} = O(\Delta t, \Delta R^2, \Delta z^2) \\
& \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial R \rho u v}{\partial R} + \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \Delta z \rho |u| \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
& \quad + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{2} R \Delta R \rho |v| \frac{\partial u}{\partial R} \right) + O(\Delta t, \Delta R^2, \Delta z^2) \\
& \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial R \rho v^2}{\partial R} + \frac{\partial P}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \Delta z \rho |v| \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
& \quad + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{2} R \Delta R \rho |v| \frac{\partial v}{\partial R} \right) + O(\Delta t, \Delta R^2, \Delta z^2) \\
& \frac{\partial \rho G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} [(\rho G + P)u] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} [R(\rho G + P)v] = \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial T}{\partial z} \\
& \quad + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( RK \frac{\partial T}{\partial R} \right) + \rho Q + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \Delta z \rho |u| \frac{\partial G}{\partial z} \right) \\
& \quad + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{2} R \Delta R \rho |v| \frac{\partial G}{\partial R} \right) + O(\Delta t, \Delta R^2, \Delta z^2)
\end{aligned}$$

从上面方程可以看到活动网格的 Lagrange 方法的截断误差是一阶的。将上面方程与原来的辐射流体力学方程组进行比较可以看到多了一些关于空间变量的二阶导数项，这些项起了粘性作用，粘性系数为

$$\lambda_z = \frac{1}{2} \rho \Delta z |u|, \quad \lambda_R = \frac{1}{2} \rho \Delta R |v|$$

这种粘性项与 PIC 方法中的格式粘性是一致的。根据我们的计算经验，加上这种粘性项不仅有拉平压缩时冲击波的效应，而且能减少 Lagrange 网格之间过度的滑移和旋转，比引进标量型的人为粘性项更好。差分格式具有这种粘性就使得方法能用来计算带有冲击波和间断的辐射流体力学问题。

## 四、关于计算方法的一些讨论

### 1. 稳定性分析

我们用 C. W. Hirt 在 1968 年<sup>[10]</sup>提出的启示式稳定性理论来分析，这种方法在苏联 Яненко И. И. 和 Шокин Ю. И. 也进行了大量的研究。该方法是把差分格式在某确定点作 Taylor 展开，忽略高阶误差项，只留最低阶的误差项，这样得到的新的微分方程称为差分方程的首次微分近似。如果差分格式是相容的，那末首次微分近似与原来的微分方程相比只增加了一些含有小参数的较高导数的附加项，我们就把新的微分方程适定性的条件作为判断差分方程稳定性的条件。这种判断稳定性的方法对线性常系数微分方程的初值问题有严格的理论根据。Thomée 1969 年在 [11] 中给出定理：如果存在与微分方程相容的一个  $W_p$  稳定的差分算子，那末该微分方程的初值问题在  $W_p$  中是适定的。从这个定理可以得出结论：微分方程的适定性是其相容的差分格式稳定性的一个必要条件。差分格式不仅与原来的微分方程是相容的，而且与其首次微分近似也是相容的，这样我们由首次微分近似问题的适定性的判断

就给出差分格式稳定性的一个必要条件。对一般的微分方程和差分方程虽然不能从理论上严格地论证首次微分近似的适定性和差分格式稳定性的关系，但是仍然可以把判断首次微分近似适定性得出的条件作为分析稳定性的条件。这种判断复杂的差分方程稳定性的方法在实际使用时很方便，也很有效。

本方法中动量方程是显式的，能量方程是隐式的，因此分析稳定性时只从动量方程的首次微分近似来讨论。将动量方程的统一差分格式(3.4)，(3.5)在  $(n, l, m)$  进行 Taylor 展开保留一阶小量，忽略阶为  $O(\Delta t^2, \Delta z^2, \Delta R^2)$  的项得到

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho v \frac{\partial u}{\partial z} - \rho v \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{2} R \Delta R \rho |v| \frac{\partial u}{\partial R} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \Delta z \rho |u| \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \Delta t \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial R} - \rho u \frac{\partial v}{\partial z} - \rho v \frac{\partial v}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{2} R \Delta R \rho |v| \frac{\partial v}{\partial R} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \Delta z \rho |u| \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \Delta t \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

再用动量方程把上面式子中等号右边对  $t$  的导数化为对  $z, R$  的导数，并考虑到  $-\frac{\partial P}{\partial \rho} = c^2$  就得到

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial z} + \rho v \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{1}{2} \Delta z \rho |u| - \frac{1}{2} \rho \Delta t u^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \rho \Delta t c^2 \right) \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial R} \left[ \left( \frac{1}{2} \Delta R \rho |v| - \frac{1}{2} \rho \Delta t v^2 \right) \frac{\partial u}{\partial R} \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{1}{2} \rho \Delta t u v \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{1}{2} \rho \Delta t c^2 \frac{\partial v}{\partial R} \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial R} \left[ -\frac{1}{2} \rho \Delta t u v \frac{\partial u}{\partial z} \right] + D_1(u, v) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial z} + \rho v \frac{\partial v}{\partial R} + \frac{\partial P}{\partial R} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{1}{2} \Delta z \rho |u| - \frac{1}{2} \rho \Delta t u^2 \right) \frac{\partial v}{\partial z} \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial R} \left[ \left( \frac{1}{2} \Delta R \rho |v| - \frac{1}{2} \Delta t c^2 \rho - \frac{1}{2} \rho \Delta t v^2 \right) \frac{\partial v}{\partial R} \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial R} \left[ -\frac{1}{2} \Delta t c^2 \rho \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2} \rho \Delta t u v \frac{\partial v}{\partial z} \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{1}{2} \Delta t \rho u v \frac{\partial v}{\partial R} \right] + D_2(u, v) \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中  $c$  是声速， $D_1(u, v)$ ， $D_2(u, v)$  是不包含  $u, v$  的二阶偏导数的一些阶为  $O(\Delta t, \Delta z, \Delta R)$  的项。(4.1)和(4.2)是两个抛物型方程，它们适定性的必要条件是沿  $z$  方向和  $R$  方向的扩散系数非负，即

$$\frac{1}{2} \Delta z \rho |u| - \frac{1}{2} \rho \Delta t u^2 - \frac{1}{2} \rho \Delta t c^2 \geq 0$$

$$\frac{1}{2} \Delta R \rho |v| - \frac{1}{2} \rho \Delta t v^2 - \frac{1}{2} \rho \Delta t c^2 \geq 0$$

由此得到条件

$$\Delta t \leq \min \left( \frac{|u| \cdot \Delta z}{u^2 + c^2}, \frac{|v| \Delta R}{v^2 + c^2} \right)$$

这就为分析稳定性提供了一个较好的判断条件。

## 2. 能量方程的迭代收敛性

由于能量方程用隐式差分格式，因此要用迭代法来解这个非线性代数方程组。现在是用类似于牛顿迭代法的整体迭代法。已经证明：只要对 $\Delta t$ 和迭代初值加上适当的条件，则温度 $T$ 是有界的，整体迭代法收敛。对 $\Delta t$ 和迭代初值的要求是比较弱的，一般情况下都比稳定性对 $\Delta t$ 的要求低，只有在温度急剧上升为高温时才对 $\Delta t$ 要求更严一些，需要缩小 $\Delta t$ 。我们的计算经验也验证了上面的理论证明。

## 3. 关于邻域选取的讨论

本文中求邻域的方法是秦元勋教授1967年提出的<sup>[8]</sup>。在[8]中并且证明了用这种方法求邻域时邻域的存在唯一性定理，邻域的互反性定理，网格边界的凸性定理，邻域互相作用的连续变化性定理，因此这种求邻域方法在理论上和实践中都是可行的。

4. 本方法中一些细节和具体的处理应该随具体计算问题的情况而适当修改，这样才能进一步提高计算精度，节省计算时间。

本文得到了秦元勋教授的指导，深表感谢。

## 参 考 文 献

- [1] von Neumann, J. and R. D. Richtmyer, A method for the numerical calculations of hydrodynamic shocks, *J. Appl. Phys.*, 21(1950), 232—237.
- [2] Gentry, R. A., R. E. Martin and B. J. Daly, An Eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems, *J. Comput. Phys.*, 1(1966), 87—118.
- [3] Kolsky, H. C., A method for the numerical solution of transient hydrodynamic shock problems in two space dimensions, *LA-1867*, (1955).
- [4] Schulz, W. D., Two-dimensional Lagrangian hydrodynamic difference equations, *Methods in Computational Physics*, Vol. 3, Alder, Fernbach and Rotenberg Eds., Academic Press, New York, (1964), 1—45.
- [5] Harlow, F. H., A machine calculation method for hydrodynamic problems, *LAMS-1956*, (1955).
- [6] Amsden, A. A., The particle-in-cell method for calculation of the dynamics of compressible fluids, *LA-3466* (1966).
- [7] Harlow, F. H., The particle-and-force computing method for fluid dynamics, *LA-2567* (1961), 1—48.
- [8] 秦元勋, 天然差分方法 (未发表), (1967).
- [9] 周毓麟, 流体力学计算方法若干问题, 1979年全国计算数学会会议论文.

- [10] Hirt, C. W., Heuristic stability theory for finite difference equations, *J. Comput. Phys.*, 2,4(1968), 339—355.
- [11] Thomee, Vidar, Stability theory for partial difference operator, *SIAM Review*, 11, 2(1969), 152—195.

## A Two-Dimensional Lagrangian Difference Method of Movable Meshes——A Computing Method for Compressible Radiational Hydrodynamic Equations with Several Materials

Chang Qian-shun

(*Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Beijing*)

### Abstract

In this paper we give the method of movable meshes which does not need to follow surface of cell. This method merely computes the motion of the center of cell. The surface of cell is formed by the center of cell by rule. Thus formed Lagrangian mesh allows slip between cells and the variety of neighborhood. In order to improve the stability of the method and avoid unnecessary slips of cell, we in this paper give two velocities for the cell.