

有限元广义伽略金方程, 边界变分方程, 边界积分方程*

牛庠均

(北京工业大学, 1981年9月26日收到)

摘 要

在[1]的基础上, 我们进一步应用可动边界的变分原理于固体体系的离散分析, 得到有限元广义伽略金方程, 边界变分方程, 边界积分方程。这些方程描述了待解函数在元素内部与元素的边界上应满足的方程。

当对固体体系进行离散分析时, 可以应用这些方程去建立不同情况下的求解待解函数的离散方程。亦可作为相应情况下的简化计算的依据。

由本文得到的边界积分方程可知, 在[2]中提出的 J 积分形式, 应用于内部元素边界的围道积分计算是不适宜的。

一、引 言

用有限元法对固体体系进行离散分析时, 在元素 S_α 的边界上, 待解函数应满足的条件, 在[1]已作了论述。在这里我们进一步讨论这个问题, 并得到了有限元广义伽略金方程, 边界变分方程, 边界积分方程。

1.1. 基于势能函数(第一能量函数)的情况^[1]

由[1]得知, 对固体体系的离散分割为有限个元素 S_α 之和, 则变形固体体系的总势能, 为

$$\Pi(\alpha) = \sum_{\alpha=1}^M \left\{ \iiint_{S_\alpha} \Pi_0(\xi_i, \alpha), u_i(\xi_i, \alpha), u_{i,j}(\xi_i, \alpha) \cdot dv(\xi_i) - \iint_{\Gamma_\alpha \cap \partial\Omega_i} \bar{P}_i u_i(\xi_i, \alpha) dr(\xi_i) \right\} \quad (1.1)$$

令方程(1.1)的一阶变分为零, 则有

$$\delta\Pi(\alpha) = \sum_{\alpha=1}^M \left\{ \iiint_{S_\alpha} -(\sigma_{i,j,j} + F_i) \delta u_i dv \right\}$$

* 钱伟长推荐。

$$\begin{aligned}
& + \iint_{\Gamma_a} [\Pi_0 l_k + (R_{i,k} - u_{i,k}) (\sigma_{i,j} l_j)] \delta x_k dr \\
& + \int \int_{\Gamma_a \cap \partial\Omega_1} [P_{II} + (\sigma_{i,j} l_j - \bar{P}_i) (R_{i,k} - u_{i,k}) \delta x_k] dr \Big\} \\
& = \sum_{a=1}^M \left\{ \iiint_{S_a} -(\sigma_{i,j,j} + F_i) \bar{\delta} u_i dv + \iint_{\Gamma_a} [\Pi_0 + \sigma_{i,j} l_j (R_{i,n} - u_{i,n})] \delta n dr \right. \\
& \left. + \int \int_{\Gamma_a \cap \partial\Omega_1} [P_{II} + (\sigma_{i,j} l_j - \bar{P}_i) (R_{i,n} - u_{i,n}) \delta n] dr \right\} = 0 \quad (1.2)
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
\text{其中 } \Pi_0 &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij}) \varepsilon_{ij} - F_i u_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \\
\delta u_i &= \bar{\delta} u_i + u_{i,k} \delta x_k = \bar{\delta} u_i + u_{i,n} \delta n \\
\delta u_{i,j} &= \bar{\delta} u_{i,j} + u_{i,j,k} \delta x_k = \bar{\delta} u_{i,j} + u_{i,j,n} \delta n \\
\text{令 } u_i &= R_i(\xi_i) \quad \because \delta u_i = R_{i,k} \delta x_k = R_{i,n} \delta n \\
&\therefore \bar{\delta} u_i = (R_{i,n} - u_{i,n}) \delta n \quad (\Gamma_a) \\
\text{取 } P_{II} &= \Pi_0 l_k \delta x_k - (\bar{P}_i u_i \delta x_j)_{,j \approx i} \\
&= \Pi_0 \delta n - (\bar{P}_i u_i \delta x_j)_{,j \approx i}
\end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

n 为沿边界 Γ_a 的外法线， l_k 为外法线的方向余弦。

变分方程(1.2)是基于可动边界变分问题的情况下，求得的变形固体体系总势能函数的一阶变分为零的条件。很明显，变分方程(1.2)就是考虑元素边界可动性条件下的广义伽略金方程。当略去边界可动性的影响，它退化为通常情况下的广义伽略金方程。当考虑到待解函数事先满足全部边界条件时，则它就退化为伽略金方程。

与变分方程(1.2)等价的微分方程，为

$$\sigma_{i,j,j} + F_i = 0 \quad (\text{在 } S_a \text{ 内}) \quad (1.4a)$$

$$\sum_a (\Pi_0 + (R_{i,n} - u_{i,n}) \sigma_{i,j} l_j) \Big|_{\Gamma_a} = 0 \quad (1.4b)$$

$$P_{II} + (\sigma_{i,j} l_j - \bar{P}_i) (R_{i,n} - u_{i,n}) \delta n = 0 \quad (\text{在 } \partial\Omega_1 \text{ 上}) \quad (1.4c)$$

方程(1.4)就是待解函数应满足的部分微分方程。

1.2. 基于余能函数(第二能量函数)的情况^[1]

与上类同，对固体体系进行离散分割后，在可动边界的情况下，变形固体体系的总余能，为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\alpha) &= \sum_{a=1}^M \left\{ \iiint_{S_a(\alpha)} \mathcal{L}_0(\xi_i(\alpha), \sigma_{ij}(\xi_i, \alpha)) dv(\xi_i) \right. \\
&\quad \left. - \int \int_{\Gamma_a \cap \partial\Omega_2} \bar{u}_i \sigma_{i,j} l_j(\xi_i, \alpha) dr(\xi_i) \right\} \quad (1.5)
\end{aligned}$$

令方程(1.5)的一阶变分为零，当 σ_{ij} 满足平衡方程时，则有

$$\delta \mathcal{L}(\alpha) = \sum_{a=1}^M \left\{ \iiint_{S_a} (\varepsilon_{ij} - u_{i,j}) \bar{\delta} \sigma_{ij} dv \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{\Gamma_c} \left[\mathcal{L}_0 l_k + (T_{i,k} - (\sigma_{ij} l_j)_{,k}) u_i \right] \delta x_k dr \\
& + \iint_{\Gamma_a \cap \partial \Omega_2} (u_i - \bar{u}_i) \delta \sigma_{ij} l_j dr \} \\
& = \sum_{a=1}^M \left\{ \iiint_{S_a} (\varepsilon_{ij} - u_{i,j}) \bar{\delta} \sigma_{ij} dv \right. \\
& + \iint_{\Gamma_a} \left[\mathcal{L}_0 + (T_{i,n} - (\sigma_{ij} l_j)_{,n}) u_i \right] \delta n dr \\
& \left. + \iint_{\Gamma_a \cap \partial \Omega_2} (u_i - \bar{u}_i) \delta \sigma_{ij} l_j dr \right\} = 0 \tag{1.6}
\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} (\sigma_{ij}) \sigma_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$

$$\delta \sigma_{ij} l_j = \bar{\delta} \sigma_{ij} l_j + (\sigma_{ij} l_j)_{,k} \delta x_k = \bar{\delta} \sigma_{ij} l_j + (\sigma_{ij} l_j)_{,n} \delta n$$

$$\begin{aligned}
\text{令 } \sigma_{ij} l_j &= T_i(\xi_i), \quad \therefore \delta \sigma_{ij} l_j = T_{i,k} \delta x_k = T_{i,n} \delta n, \quad (\text{在 } \Gamma_a \text{ 上}) \\
\delta \sigma_{ij} l_j &= \bar{\delta} \sigma_{ij} l_j \quad (\text{在 } \partial \Omega_2 \text{ 上})
\end{aligned} \tag{1.7}$$

与变分方程 (1.6) 等价的微分方程, 为

$$\varepsilon_{ij} - u_{i,j} = 0 \quad (\text{在 } S_a \text{ 内}) \tag{1.8a}$$

$$u_i - \bar{u}_i = 0 \quad (\text{在 } \partial \Omega_2 \text{ 上}) \tag{1.8b}$$

$$\sum_a (\mathcal{L}_0 + (T_{i,n} - (\sigma_{ij} l_j)_{,n}) u_i) \Big|_{\Gamma_a} = 0 \tag{1.8c}$$

1.3. 基于总能量函数 (第三能量函数) 的情况

变形固体体系的总能量函数, 为

$$\mu(\alpha) = \Pi(\alpha) + \mathcal{L}(\alpha) \tag{1.9}$$

由变分方程 (1.2) 与 (1.6) 相加, 则得总能量函数的一阶变分为零的形式, 为

$$\begin{aligned}
\delta \mu(\alpha) & + \iiint_{S_a} u_i \bar{\delta} \sigma_{ij} dv = \delta \Pi(\alpha) + \delta \mathcal{L}(\alpha) + \iiint_{S_a} u_i \bar{\delta} \sigma_{ij} dv \\
& = \sum_{a=1}^M \left\{ \iiint_{S_a} \left[-(\sigma_{ij} l_j + F_i) \bar{\delta} u_i + (\varepsilon_{ij} - u_{i,j}) \bar{\delta} \sigma_{ij} \right] dv \right. \\
& + \iint_{\Gamma_a} \left[\Pi_0 + (R_{i,n} - u_{i,n}) \sigma_{ij} l_j + \mathcal{L}_0 + (T_{i,n} - (\sigma_{ij} l_j)_{,n}) u_i \right] \delta n dr \\
& + \iint_{\Gamma_a \cap \partial \Omega_2} \left[\bar{P}_n + (\sigma_{ij} l_j - \bar{P}_i) (R_{i,n} - u_{i,n}) \delta n \right] dr \\
& \left. + \iint_{\Gamma_a \cap \partial \Omega_2} (u_i - \bar{u}_i) \delta \sigma_{ij} l_j dr \right\} = 0 \tag{1.10}
\end{aligned}$$

其中

$$\bar{P}_n = [\Pi_0 + \mathcal{L}_0 + u_i (T_{i,n} - (\sigma_{ij} l_j)_{,n})] \delta n - (\bar{P}_i u_i \delta x_k)_{,k} \tag{1.11}$$

与变分方程(1.10)等价的微分方程, 为

$$\sigma_{i,j,j} + F_i = 0 \quad (\text{在 } S_a \text{ 内}) \quad (1.12a)$$

$$\varepsilon_{i,j} - u_{i,j} = 0 \quad (\text{在 } S_a \text{ 内}) \quad (1.12b)$$

$$u_i - \bar{u}_i = 0 \quad (\text{在 } \partial\Omega_2 \text{ 上}) \quad (1.12c)$$

$$\sum_a [\Pi_0 + (R_{i,n} - u_{i,n}) \sigma_{i,j} l_j + \mathcal{L}_0 + (T_{i,n} - (\sigma_{i,j} l_j)_n) u_i] \Big|_{\Gamma_a} = 0 \quad (1.12d)$$

$$\bar{P}_n + (\sigma_{i,j} l_j - \bar{P}_i) (R_{i,n} - u_{i,n}) \delta n = 0 \quad (\text{在 } \partial\Omega_1 \text{ 上}) \quad (1.12e)$$

基于变分方程(1.2), (1.6), (1.10), 我们可以建立有限元广义伽略金方程, 边界变分方程, 边界积分方程.

二、有限元广义伽略金方程

2.1. 有限元广义伽略金方程 I:

对固体体系进行几何分割与分片构造待解函数的基础上, 取位移函数为待解函数时, 当待解函数在元素内部满足几何方程和在整体边界上满足几何边界条件时, 则满足变分方程

$$\sum_{a=1}^M \left\{ \iiint_{S_a} -(\sigma_{i,j,j} + F_i) \bar{\delta} u_i dv + \iint_{\Gamma_a} [\Pi_0 + (R_{i,n} - u_{i,n}) \sigma_{i,j} l_j] \delta n dr \right. \\ \left. + \iint_{\Gamma_a \cap \partial\Omega_1} [P_n + (\sigma_{i,j} l_j - \bar{P}_i) (R_{i,n} - u_{i,n}) \delta n] dr \right\} = 0 \quad (2.1)$$

的位移函数, 为其驻值条件下的真实解.

2.2. 有限元广义伽略金方程 II:

对固体体系进行几何分割与分片构造待解函数的基础上, 取应力函数与位移函数为待解函数时, 当应力函数在元素内部满足平衡方程、物理方程时, 以及在整体边界上满足力的边界条件时, 则满足变分方程

$$\sum_{a=1}^M \left\{ \iiint_{S_a} (\varepsilon_{i,j} - u_{i,j}) \bar{\delta} \sigma_{i,j} dv + \iint_{\Gamma_a} [\mathcal{L}_0 + u_i (T_{i,n} - (\sigma_{i,j} l_j)_n)] \delta n dr \right. \\ \left. + \iint_{\Gamma_a \cap \partial\Omega_2} (u_i - \bar{u}_i) \delta \sigma_{i,j} l_j dr \right\} = 0 \quad (2.2)$$

的位移函数与应力函数, 为在驻值条件下的真实解.

2.3. 有限元广义伽略金方程 III:

对固体体系进行几何分割与分片构造待解函数的基础上, 取应力函数与位移函数为待解函数, 假定应力函数与应变函数满足物理方程时, 则满足变分方程

$$\sum_{a=1}^M \left\{ \iiint_{S_a} (\varepsilon_{i,j} - u_{i,j}) \bar{\delta} \sigma_{i,j} dv + \iiint_{S_a} -(\sigma_{i,j,j} + F_i) \bar{\delta} u_i dv \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{\Gamma_e} [\Pi_0 + (R_{i,n} - u_{i,n}) \sigma_{ij} l_j + \mathcal{L}_0 + u_i (T_{i,n} - (\sigma_{ij} l_j)_n)] \delta n dr \\
& + \iint_{\Gamma_e \cap \partial\Omega_1} [\bar{P}_n + (\sigma_{ij} l_j - \bar{P}_i) (R_{i,n} - u_{i,n}) \delta n] dr \\
& + \left\{ \iint_{\Gamma_e \cap \partial\Omega_2} (u_i - \bar{u}_i) \delta \sigma_{ij} l_j dr \right\} = 0 \tag{2.3}
\end{aligned}$$

的位移函数与应力函数, 为其驻值条件下的真实解。

考虑到变分方程(2.1), (2.2), (2.3)各自的假定条件与变分条件, 可以证明, 通过变分方程(2.1), (2.2), (2.3)求得的待解函数, 满足应满足的全部微分方程(古典固体力学的平衡方程、几何方程、物理方程和边界条件, 另外还满足元素交界处的交界方程和边界附加条件), 当略去边界可动性的影响, 它们就退化为通常的广义伽略金方程。

三、边界变分方程

3.1. 边界变分方程 I:

对固体体系进行几何分割与分片构造待解函数的基础上, 当位移函数在元素内部满足几何方程、平衡方程、物理方程和在整体边界上满足几何边界条件时, 则满足下面边界变分方程

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^M \left\{ \iint_{\Gamma_\alpha} [\Pi_0 + (R_{i,n} - u_{i,n}) \sigma_{ij} l_j] \delta n dr \right. \\
& \left. + \iint_{\Gamma_\alpha \cap \partial\Omega_1} [P_n + (\sigma_{ij} l_j - \bar{P}_i) (R_{i,n} - u_{i,n}) \delta n] dr \right\} = 0 \tag{3.1}
\end{aligned}$$

的位移函数, 为在驻值条件下的真实解。

3.2. 边界变分方程 II:

对固体体系进行几何分割与分片构造待解函数的基础上, 当应力函数在元素内部满足几何方程、平衡方程、物理方程, 以及在整体边界上满足力的边界条件时, 则满足下面边界变分方程

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^M \left\{ \iint_{\Gamma_\alpha} [\mathcal{L}_0 + u_i (T_{i,n} - (\sigma_{ij} l_j)_n)] \delta n dr \right. \\
& \left. + \iint_{\Gamma_\alpha \cap \partial\Omega_2} (u_i - \bar{u}_i) \delta \sigma_{ij} l_j dr \right\} = 0 \tag{3.2}
\end{aligned}$$

的应力函数与位移函数, 为在驻值条件下的真实解。

3.3. 边界变分方程 III:

对固体体系进行几何分割与分片构造待解函数的基础上, 假定待解函数在元素内部满足几何方程、平衡方程、物理方程时, 则满足下面边界变分方程

$$\begin{aligned}
& \sum_{a=1}^M \left\{ \iint_{\Gamma_a} [\Pi_0 + (R_{i,n} - u_{i,n}) \sigma_{ij} l_j + \mathcal{L}_0 + u_i (T_{i,n} - (\sigma_{ij} l_j), n)] \delta n dr \right. \\
& \quad + \iint_{\Gamma_a \cap \partial \Omega_1} [\bar{P}_n + (\sigma_{ij} l_j - \bar{P}_i) (R_{i,n} - u_{i,n}) \delta n] dr \\
& \quad \left. + \iint_{\Gamma_a \cap \partial \Omega_2} (u_i - \bar{u}_i) \delta \sigma_{ij} l_j dr \right\} = 0 \quad (3.3)
\end{aligned}$$

的应力函数与位移函数，为其驻值条件下的真实解。

只要注意到 (3.1)、(3.2)、(3.3) 方程的待解函数预先满足的假定条件，就可直接由方程 (1.2)、(1.6)、(1.10) 得到这三个边界变分方程。

四、边界积分方程

当我们假定可动边界的外法线的改变量 δn 为常量时，则上述的三个边界变分方程就化为任一元素的三个边界积分方程。

4.1. 边界积分方程 I:

从变形的固体体系内部，任意分割一个元素 S_a ，当位移函数在元素内部满足几何方程、平衡方程、物理方程时，且 δn 在元素边界 Γ_a 上为常数时，则真实的位移函数使下面边界积分方程

$$\iint_{\Gamma_a} \{ [\Pi_0 + (R_{i,n} - u_{i,n}) \sigma_{ij} l_j]_{\Gamma_a + 0} - [\Pi_0 + (R_{i,n} - u_{i,n}) \sigma_{ij} l_j]_{\Gamma_a - 0} \} dr = 0 \quad (4.1)$$

恒成立。

当元素 S_a 处于整体边界 $\partial \Omega_1$ 上，则真实的位移函数满足下面的方程

$$\iint_{\Gamma_a \cap \partial \Omega_1} [P_n + (R_{i,n} - u_{i,n}) (\sigma_{ij} l_j - \bar{P}_i) \delta n] dr = 0 \quad (4.2)$$

由此可知，对于有限元离散分析而言，从变形固体内部任意分割一个元素 S_a ，沿其边界 Γ_a 的围道积分为零的公式是方程 (4.1)。所以应用在 [2] 中提出的 J 积分形式来计算沿元素 S_a 的边界 Γ_a 的围道积分是不适宜的。仅仅从方程 (4.2) 中略去某些项才能得到 J 积分的形式。

4.2. 边界积分方程 II:

从变形固体体系内部，任意分割一个元素 S_a ，当应力函数在元素内部满足几何方程、平衡方程、物理方程时，且 δn 在元素边界 Γ_a 为常量时，则真实的应力函数与位移函数，使下面的边界积分方程

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Gamma_a} \{ [\mathcal{L}_0 + u_i (T_{i,n} - (\sigma_{ij} l_j), n)]_{\Gamma_a + 0} \\
& \quad - [\mathcal{L}_0 + u_i (T_{i,n} - (\sigma_{ij} l_j), n)]_{\Gamma_a - 0} \} dr = 0 \quad (4.3)
\end{aligned}$$

恒成立。

当元素 S_a 处于整体边界 $\partial\Omega_1$ 上, 则真实的应力函数与位移函数满足下面的方程

$$\iint_{\Gamma_a \cap \partial\Omega_1} \{[\mathcal{L}_0 + u_i(T_{i,n} - (\sigma_{ij}l_j), n)]\delta n - (\bar{P}_i u_i \delta x_k),_{k=i}\} dr = 0 \quad (4.4)$$

4.3. 边界积分方程 III:

从变形的固体体系内部, 任意分割一个元素 S_a , 当应力函数与位移函数在元素内部满足几何方程、平衡方程、物理方程时, 且 δn 在元素的边界 Γ_a 为常量时, 则真实的应力函数与位移函数, 使下面的边界积分方程

$$\iint_{\Gamma_a} \{[\Pi_0 + (R_{i,n} - u_{i,n})\sigma_{ij}l_j + \mathcal{L}_0 + u_i(T_{i,n} - (\sigma_{ij}l_j), n)]_{\Gamma_a+0} - [\Pi_0 + (R_{i,n} - u_{i,n})\sigma_{ij}l_j + \mathcal{L}_0 + u_i(T_{i,n} - (\sigma_{ij}l_j), n)]_{\Gamma_a-0}\} dr = 0 \quad (4.5)$$

恒成立。

当元素 S_a 处于整体边界 $\partial\Omega_1$ 上, 则真实的应力函数与位移函数, 使下面方程成立

$$\iint_{\Gamma_a \cap \partial\Omega_1} [\bar{P}_n + (\sigma_{ij}l_j - \bar{P}_i)(R_{i,n} - u_{i,n})\delta n] dr = 0 \quad (4.6)$$

考虑到这三个边界积分方程的假定条件, 直接可从方程(1.2)、(1.6)、(1.10)推得。

五、结 语

对于变形固体体系而言, 在进行离散分析时, 有限元广义伽略金方程、边界变分方程、边界积分方程, 在不同的情况下, 描述了待解函数在元素内部或在边界上应满足的条件。可以利用这些方程去建立求解待解函数的离散方程组。

此外, 由于这些方程是基于可动边界的变分原理基础上推得的, 因此它们具有一定的概括性。当对固体体系进行离散分析时, 它们可以作为各种相应情况的简化计算的依据。

参 考 文 献

- [1] 牛庠均, 固体的离散型变分原理——有限元离散分析的变分原理, 应用数学与力学, 2, 5, (1981), 505—520.
- [2] Rice, J. R., A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and crack, *Journal of Applied Mechanics*, 35, 2, June (1968).

The Generalized Galerkin's Equations of the Finite Element, the Boundary Variational Equations and the Boundary Integral Equations

Niu Xiang-jun

(*Beijing Polytechnic University, Beijing*)

Abstract

Based on [1], we further apply the variational principles of the variable boundary to research the discretization analysis of the solid system, so that we derived the generalized Galerkin's equations of the finite element, the boundary variational equations and the boundary integral equations. These equations represent that the unknown functions of the solid system must satisfy the conditions in the elements S_a or on the boundaries Γ_a .

These equations are applied to establishing the discretization equations in order to obtain the numerical solutions of the unknown functions. At a time these equations can be used as the basis for the simplified calculation in the various corresponding cases.

In this paper, the results of boundary integral equations show that the calculation of integration is not accurate along the surface Γ_a of the interior element S_a by J -integral suggested by Rice [2].