应用数学和力学，第4卷第2期（1983年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

# 空间机构的向量分析——Ⅰ 用向量分解法作空间机构的位形分析

余 燊

（华南工学院，1982年6月18日收到）

**摘 要**

在连续的四个部分中，分别提出了对某些空间四杆机构进行位形、运动和动力分析的向量方法。在第Ⅰ部分中，利用向量分解法分别对$R$-$G$-$G$-$R$和$H$-$R$-$G$-$R$机构进行了位形分析。

## 一、前 言

对于一定形式的空间四杆机构可以用向量方法进行分析，这正如Chace在文[1]和[2]首先阐述的那样。这种方法的优点在于其具有直观的几何感染力而且概念简明，这在空间机构的设计中显得至为重要。此外，向量分析是牛顿力学所固有的术语，而空间机构力学仅是它的一个分支，因而它的术语必须与向量相一致。尽管有许多作者（例如Bagci[3]以及其他）提出许多可供选择的方法，但这些方法既不具有Gibbsian向量的形象风格，也不见得简单。虽然Chace的方法也使用向量，但也经常没有突出这种形象化的优点。他的运算手段偏重于依赖标量代数式和三角函数恒等式，而且他的解取决于隐含的多项式最高为8次方程的解。在本文的四个部分中，提出了可供选择的向量法，通过纯粹使用向量的方法去获得明确的向量解。在第Ⅰ部分中用向量分解的方法来论述$R$-$G$-$G$-$R$和$H$-$R$-$G$-$R$机构的位形分析。在第Ⅱ部分中则通过建立向量方程的方法去确定$P$-$P$-$G$-$C$和$R$-$G$-$C$-$R$机构的位形方程。在第Ⅲ和第Ⅳ部分中，提出了纯粹使用向量的方法去做有关机构的运动和动力分析，并给出明确的向量解。

## 二、R-G-G-R 机构的位形方程

机构的位形方程以一系列杆向量来表示，如图1所示。图中$O$和$R$是杆件的轴心，而$P$和$Q$分别是球窝关节的中心。$OP$是曲柄而$QR$为从动杆。

令 $\overrightarrow{OP}=p\vec{\lambda}$，$\overrightarrow{PQ}=s\vec{\alpha}$，$\overrightarrow{QR}=q\vec{\beta}$，$\overrightarrow{RO}=r\vec{\gamma}$ (2.1)

这里$(\vec{\lambda},\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$为单位向量。

显然， $\vec{\lambda}\cdot\vec{a}_1=m$， $\vec{\beta}\cdot\vec{a}_2=n$ (2.2)

$m$和$n$是给出的常数。当曲柄以及从动杆分别与其轴线垂直时，$m=0$，$n=0$。以后方程式(2.2)将称为“结构方程”。

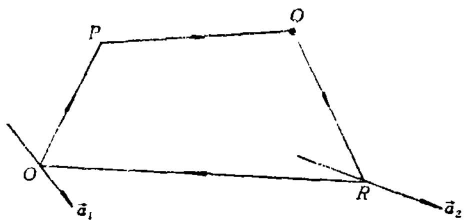


图 1

由给出的机构位形，我们有

$$p\vec{\lambda}+s\vec{\alpha}+q\vec{\beta}+r\vec{\gamma}=0 \tag{2.3}$$

此经常谓之为“环方程”．现在的问题是如何由（2.2）和（2.3）的条件去确定$\vec{\alpha}$和$\vec{\beta}$．

令
$$\left.\begin{aligned} \vec{i}&=\frac{\vec{\gamma}\wedge\vec{a}_1}{|\vec{\gamma}\wedge\vec{a}_1|}\\ \vec{j}&=\frac{(\vec{\gamma}\wedge\vec{a}_1)\wedge\vec{a}}{|(\vec{\gamma}\wedge\vec{a}_1)\wedge\vec{a}_1|}\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

显然（$\vec{a}_1$，$\vec{i}$，$\vec{j}$）是一组正交的单位向量，且可令

$$\vec{\lambda}=(\vec{\lambda}\cdot\vec{a}_1)\vec{a}_1+(\vec{\lambda}\cdot\vec{i})\vec{i}+(\vec{\lambda}\cdot\vec{j})\vec{j} \tag{2.5}$$

或由于$\vec{\lambda}\cdot\vec{a}_1=m$，有

$$\vec{\lambda}-m\vec{a}_1=(\vec{\lambda}\cdot\vec{i})\vec{i}+(\vec{\lambda}\cdot\vec{j})\vec{j} \tag{2.6}$$

将（2.6）式两边平方得

$$1-m^2=(\vec{\lambda}\cdot\vec{i})^2+(\vec{\lambda}\cdot\vec{j})^2$$

因此，可使

$$\vec{\lambda}=m\vec{a}+\sqrt{(1-m^2)}\,(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}) \tag{2.7}$$

这里$\theta$为“输入角”．由于$\theta$为给定值，$\vec{\lambda}$可完全得到确定

让

$$\vec{c}=-(p\vec{\lambda}+r\vec{\gamma}) \tag{2.8}$$

则（2.3）式变为

$$s\vec{\alpha}+q\vec{\beta}=\vec{c} \tag{2.9}$$

这样，问题就变为从(2.9)式中求出$\vec{\alpha}$和$\vec{\beta}$．

令
$$\vec{\mu}=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \tag{2.10}$$

且

$$\vec{\beta}=x\vec{a}_2+y\vec{\mu}+z\vec{a}_2\wedge\vec{\mu} \tag{2.11}$$

这里$x$，$y$，$z$为待定的未知量．方程（2.11）是未知向量$\vec{\beta}$的向量分解公式．

现由$[\vec{\mu}\wedge(\vec{a}_2\wedge\vec{\mu})\cdot(2.11)]$得

$$x=\frac{\vec{\mu}\wedge(\vec{a}_2\wedge\vec{\mu})\cdot\vec{\beta}}{\vec{\mu}\wedge(\vec{a}_2\wedge\vec{\mu})\cdot\vec{a}_2}=\frac{\vec{a}_2\cdot\vec{\beta}-(\vec{\mu}\cdot\vec{a}_2)(\vec{\mu}\cdot\vec{\beta})}{(\vec{a}_2\wedge\vec{\mu})^2} \tag{2.12}$$

且由 $[\vec{a}_2\wedge(\vec{a}_2\wedge\vec{\mu})\cdot(2.11)]$得

$$y=\frac{\vec{a}_2\wedge(\vec{a}_2\wedge\vec{\mu})\cdot\vec{\beta}}{\vec{a}_2\wedge(\vec{a}_2\wedge\vec{\mu})\cdot\vec{\mu}}=\frac{\vec{\mu}\cdot\vec{\beta}-(\vec{a}_2\cdot\vec{\mu})(\vec{a}_2\cdot\vec{\beta})}{(\vec{a}_2\wedge\vec{\mu})^2} \tag{2.13}$$

此外，由（2.9）得

$$s\vec{\alpha}=\vec{c}-q\vec{\beta}$$

方程两边各自平方得

$$s^2=c^2+q^2-2cq\vec{\beta}\cdot\vec{c} \tag{2.14}$$

由（2.10）代入得

$$\vec{\beta}\cdot\vec{\mu}=\frac{c^2+q^2-s^2}{2c^2q} \tag{2.15}$$

将（2.15）分别代入（2.12）和（2.13）并考虑$\vec{a}_2\cdot\vec{\beta}=n$得

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{n-(c^2+q^2-s^2)\vec{\mu}\cdot\vec{a}_2}{2c^2q(\vec{a}_2\wedge\vec{\mu})^2}\\ y&=\frac{(c^2+q^2-s^2)-n\vec{\mu}\cdot\vec{a}_2}{2c^2q(\vec{a}_2\wedge\vec{\mu})^2}\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

为了确定$z$，由$[(\vec{a}_2\wedge\vec{\mu})\cdot(2.11)]$，得

$$z=\frac{\vec{a}_2\wedge\vec{\mu}\cdot\vec{\beta}}{(\vec{a}_2\wedge\vec{\mu})^2} \tag{2.17}$$

鉴于已知的向量恒等式（见本文三），$z$可完全得到确定。

$$\vec{a}_2\wedge\vec{\mu}\cdot\vec{\beta}=\pm\sqrt{[1-(\vec{a}_2\cdot\vec{\mu})^2-(\vec{\mu}\cdot\vec{\beta})^2-(\vec{\beta}\cdot\vec{a}_2)^2+2(\vec{a}_2\cdot\vec{\mu})(\vec{\mu}\cdot\vec{\beta})(\vec{\beta}\cdot\vec{a}_2)]} \tag{2.18}$$

一俟$x$，$y$，$z$确定之后，$\vec{\beta}$可由向量分解公式（2.11）确定。

在本文三中，我们将介绍另一种分解未知向量的方法。

另一种比较惯用的方法是令

$$\vec{i}_1=\frac{\vec{\gamma}\wedge\vec{a}_2}{|\vec{\gamma}\wedge\vec{a}_2|},\qquad \vec{j}_1=\frac{(\vec{\gamma}\wedge\vec{a}_2)\wedge\vec{a}_2}{|(\vec{\gamma}\wedge\vec{a}_2)\wedge\vec{a}_2|} \tag{2.19}$$

且参照（2.7）的方式有

$$\vec{\beta}=n\vec{a}_2+\sqrt{(1-n^2)}\,(\cos\phi\,\vec{i}_1+\sin\phi\,\vec{j}_1) \tag{2.20}$$

这里$\phi$为“输出角”．则将（2.20）代入到（2.14）中得

$$A(\theta)\sin\phi+B(\theta)\cos\phi=E(\theta) \tag{2.21}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} A(\theta)&=2\sqrt{(1-n^2)}\,(\vec{c}\cdot\vec{j}_1)\\ B(\theta)&=2\sqrt{(1-n^2)}\,(\vec{c}\cdot\vec{i}_1)\\ E(\theta)&=c^2-q^2-s^2-2n(\vec{c}\cdot\vec{a}_2)\end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

数$A(\theta)$．$B(\theta)$和$E(\theta)$为已知，且可由“输入—输出”关系式（2.21）求出$\phi$．对于这种情况，惯用的方法将显得较为简单。

## 三、 H-R-G-R机构的位形方程

图2(a)所示$H$-$R$-$G$-$R$机构中，输入的螺旋位移量作用在螺旋副（$H$）上，则轴向量$\vec{\mu}$可由此决定。因此，给出长度$RA$则线段$\overrightarrow{AB}$也为已知。问题是要由已知的长度$a$和$b$计算单位矢量$\vec{\alpha}$和$\vec{\beta}$。

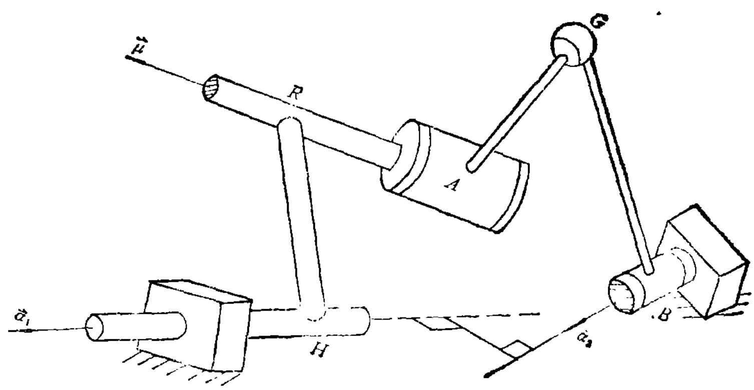


图 2(a)

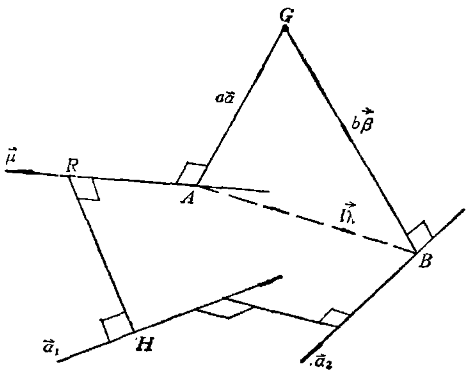


图 2(b)

由 $\triangle AGB$中给出

$$b\vec{\beta}=l\vec{\lambda}-a\vec{\alpha} \tag{3.1}$$

这里 $l=|\overrightarrow{AB}|$

而且有恒等式

$$\vec{\alpha}\wedge(\vec{\lambda}\wedge\vec{\mu})+\vec{\lambda}\wedge(\vec{\mu}\wedge\vec{\alpha})+\vec{\mu}\wedge(\vec{\alpha}\wedge\vec{\lambda})=0 \tag{3.2}$$

将（3.1）式平方

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}=\frac{l^2+c^2-b^2}{2al} \tag{3.3}$$

且由$[(\vec{\lambda}\wedge\vec{\mu})\wedge(3.2)]$得

$$(\vec{\lambda}\wedge\vec{\mu})^2\vec{\alpha}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}\wedge\vec{\mu})\vec{\lambda}\wedge\vec{\mu}+[(\vec{\lambda}\cdot\vec{\alpha})-(\vec{\mu}\cdot\vec{\alpha})(\vec{\lambda}\cdot\vec{\mu})]\vec{\lambda}+[(\vec{\mu}\cdot\vec{\alpha})-(\vec{\mu}\cdot\vec{\lambda})(\vec{\lambda}\cdot\vec{\alpha})]\vec{\mu} \tag{3.4}$$

由结构可知 $\vec{\mu}\cdot\vec{\alpha}=0$ (3.5)

且$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda})$，$(\vec{\lambda}\cdot\vec{\mu})$的大小为已知，如果（$\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}\wedge\vec{\mu}$）被求出，则$\vec{\alpha}$可由（3.4）完全确定。

但由$[\vec{\alpha}\cdot(3.4)]$得

$$(\vec{\lambda}\wedge\vec{\mu})^2=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}\wedge\vec{\mu})^2+[(\vec{\lambda}\cdot\vec{\alpha})-(\vec{\mu}\cdot\vec{\alpha})(\vec{\lambda}\cdot\vec{\mu})](\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda})+[(\vec{\mu}\cdot\vec{\alpha})-(\vec{\mu}\cdot\vec{\lambda})(\vec{\lambda}\cdot\vec{\alpha})](\vec{\alpha}\cdot\vec{\mu})$$

由此移项可得

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}\wedge\vec{\mu})=\pm\sqrt{[1-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda})^2-(\vec{\lambda}\cdot\vec{\mu})^2-(\vec{\mu}\cdot\vec{\alpha})^2+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda})(\vec{\lambda}\cdot\vec{\mu})(\vec{\mu}\cdot\vec{\alpha})]} \tag{3.6}$$

由 (3.5) 知 $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}\wedge\vec{\mu})=\pm\sqrt{[1-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda})^2-(\vec{\lambda}\cdot\vec{\mu})^2]}$ (3.7)

一旦$\vec{\alpha}$确定之后，$\vec{\beta}$可由（3.1）确定。

## 四、讨 论

由上述例子可清楚看到，在确立位形方程之前，首先去确定（2.21）的“输入—输出”关系式并不容易，也不必要。本文用向量分解法直接地建立向量形式的位形方程，实质上就是确立上述的方程(3.4)。在解题过程之始终都使用向量代数而决不借助于冗长的标量代数和三角函数恒等式。Chace的解有赖于 4 次或高次多项式方程的求解，这样的方程的解没有一般解（例如见Burnside和Panton[4]）而且仅在特殊的情况下才有数值解。作者的意见是，若首先建立“输入—输出”关系式则势必妨碍解的展开。这种看法为许多作者以及任何一种数学系统所采用。本文中绕开“输入—输出”关系式，一旦建立位形方程之后，在任何情况下都可以容易地求解。

## 参 考 文 献


[ 1 ] Chace.M. A.,Vector analysis of linkages, *J. Eng. for Ind., Trans ASME*,Series B,85(1963),289—297.

[ 2 ] Chace,M.A.,Development and application of vector mathematics for kinematic analysis of three-dimentional mechanisms, Ph. D. Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor, Mich., (1964).

[ 3 ] Bagci,C.,Dynamic force and torque analysis of mechanisms using dual vectors and 3×3 screw matrix,*J. Eng. for Ind.,Trans ASME*,94,(May 1972),738—745.

[ 4 ] Burnside, W. S. and A. W. Panton *Theory of Equations*, Dublin University Press, (1881).

# Vector Analysis of Spatial Mechanisms——( I )Configuration Analysis of Spatial Mechanisms by Means of the Method of Vector Decomposition

Yu Xin

*(South China Institute of Technology, Guangzhou)*

**Abstract**

In the present series of four papers we offer various vectorial methods for analysing the configuration, kinematics and dynamics of spatial mechanisms. In the process, we obtain vectorial solutions by means of pure vectorial procedures. In part( I )we treat the configurations of the *R-G-G-R* and the *H-R-G-R* mechanisms by the method of vector decomposition.