

可变形体的有限转动参数和回转磁效应

陈 至 达

(中国矿业学院, 1981年7月收到)

摘 要

本文的第一部份将 Syngé^[2] 关于转动变换的推导用张量公式表达, 进一步阐明作者在文[7]中所求得正交变换式的几何意义。文中并讨论转轴矢量的张量性质。文中后一部份应用拖带坐标系描述法讨论回转磁效应 (Einstein-de Haas效应), 建立一个求变形体中求磁化体力矩的简单公式。

一、引 言

可变形体作任意限度位移时, 准确的理论要求对其中的转动状态和变形状态同时进行分

析。在经典动力学中, 物体空间转动的数学描述有二个主要方法: 一是用 Euler 角; 另一是以 Euler 转动参数 (转角及转轴方向余弦) 来表达。后者的典型推导, 例如 Love^[1] 用解析几何法, Syngé^[2] 用矢量法。近几年来, 由于有理力学和可变形粒子动力学研究的要求, 对于空间转动参数表达式的数学推导又有一些讨论, 如 Kozik^[3] (1976), Koehler and Trickey^[4] (1978), Wikes^[5] (1978), Beatty^[6] (1977) 等。本文采用 Syngé 的方法用张量公式表达, 得到适合于任意曲线系的公式, 在形式上比目前其他作者的结果为简洁。

将所得结果和作者在文[7]中由运动微分变换分解的正交变换部份比较, 可以完全明确肯定正交变换的几何意义正代表变形体中一点邻域的转动状态。在变形体运动的一般状态, 各点的转轴方位与转角之值是由变形体的位移梯度所确定的。

这些结果对于近代力学和近代物理中关于变形体一般运动及变形粒子的研究都是十分重要的。

二、转动变换的张量表达式

在图1, \mathbf{g}_i 为在空间坐标系中过一点 O 的基标矢量。 P 代表物体中一点, OC 为转轴方位, \mathbf{L} 为转轴方位的单位矢量。物体绕 OC 轴转过 ϑ 角, P 变到 P' 位置, 令

$$\overrightarrow{OP} \equiv \mathbf{r}, \quad \overrightarrow{OP'} \equiv \mathbf{r}'$$

$\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP'}$ 垂直于 \mathbf{L} ;

$$\overrightarrow{CP'} = \mathbf{r}' - OC \cdot \mathbf{L}$$

(2.1)

另一方面, 作 $\overrightarrow{P'N} \perp \overrightarrow{CP}$, 令 $CP = CP' \equiv s$

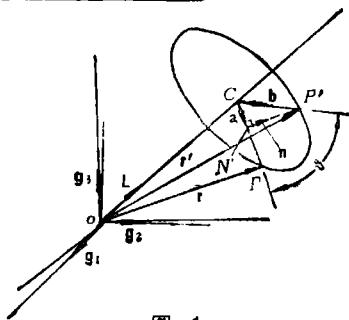


图 1

由式(2.1)与(2.4), 及 $OC=r \cdot L$, 故有

$$r' = r - [r - (r \cdot L)L](1 - \cos\theta) + \sin\theta(L \times r) \quad (2.5)$$

以上是转动变换的矢量表达式; 物体绕 L 转动 θ 角后, r 变换为 r' .

L 和 r 矢量可沿基标矢量 g_i 方向分解:

$$L = L^i g_i, \quad r = x^j g_j \quad (2.6a)$$

$$L^i L_i = 1, \quad r^2 = g_{ij} x^i x^j \quad (2.6b)$$

因此有

$$L \times r = \varepsilon_{ijk} L^i x^j g^k \quad (2.7)$$

ε_{ijk} 为排列张量, 定义它和 L^i, L_i 结合的二阶反对称张量 L_{ij}, L^{ij} :

$$L_{ij} = \varepsilon_{ijk} L^k, \quad L^{ij} = \varepsilon^{ijk} L_k \quad (2.8)$$

$$(L_{ij} = -L_{ji}, \quad L^{ij} = -L^{ji})$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & 0 & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L^3 & -L^2 \\ -L^3 & 0 & L^1 \\ L^2 & -L^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{g} \begin{pmatrix} 0 & L^{12} & L^{13} \\ L^{21} & 0 & L^{23} \\ L^{31} & L^{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L_3 & -L_2 \\ -L_3 & 0 & L_1 \\ L_2 & -L_1 & 0 \end{pmatrix}$$

而

$$L_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} L^{jk}, \quad L^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} L_{jk} \quad (2.8)'$$

因此有

$$L \times r = L_{jk} x^j g^k = L_j^k x^j g_k \quad (2.9)$$

上式中定义 $L_j^k = L_{ji} g^{ik}$.

而

$$\begin{aligned} r - (r \cdot L)L &= (\delta^i - L_i L^i) x^i g_i \\ &= \left(\delta^i - \frac{1}{4} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{imn} L^{jk} L_{mn} \right) x^i g_i \end{aligned} \quad (2.10)$$

可以证明

$$\begin{aligned} A &\equiv \delta^i - \frac{1}{4} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{imn} L^{jk} L_{mn} = L^{in} L_{in} = L^i \cdot L_i \\ &= -L_n^i L_i^n \end{aligned} \quad (2.11)$$

证明方法可以直接展开, 并注意到

$$\frac{1}{2} L^{ij} L_{ij} = 1 \quad (2.12)$$

例如当 $i=l=1$,

$$A = 1 - L^{23}L_{23} = L^{11}L_{11} + L^{12}L_{12} + L^{13}L_{13} = L^{1n}L_{1n}$$

当 $i=1, l=2,$

$$A = L^{13}L_{23} = L^{11}L_{21} + L^{12}L_{22} + L^{13}L_{23} = L^{1n}L_{2n}$$

所以(2.10)式可写成

$$\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{L}) \mathbf{L} = -L_n^i L_i^n x^j \mathbf{g}_j \quad (2.13)$$

利用式(2.9)与(2.13), 公式(2.5)可表达为

$$x^{i'} \mathbf{g}_i = [\delta_j^i + L_j^i \sin\vartheta + L_n^i L_j^n (1 - \cos\vartheta)] x^j \mathbf{g}_j \quad (2.14)$$

因 \mathbf{g}_i 为任意基标矢量, 故有

$$x^{i'} = R_j^i x^j \quad (2.15)$$

$$R_j^i = \delta_j^i + L_j^i \sin\vartheta + L_n^i L_j^n (1 - \cos\vartheta) \quad (2.16)$$

R_j^i 为转动张量的分量。由此, 可知在一点邻域的微分变换:

$$dx^{i'} = R_j^i dx^j \quad (2.17)$$

代表转动变换, 这就是在文[7]中的正交变换关系, \mathbf{L} 表示微元体的转轴方位而 ϑ 代表转动角; 但在变形体中, \mathbf{L} 和 ϑ 是拖带坐标和时间的函数。

三、转轴矢量 \mathbf{L} 的张量性质讨论

因为转轴方向余弦是转动变换的基本参数, 略为详细讨论是有必要的。

$$(1) \text{ 定义 } L_i^j = g^{jk} L_{ik}, \quad L^i_j = g_{jk} L^{ik}$$

$$\text{因 } L_{ij} = -L_{ji}^T$$

T 指转置张量, 故有

$$L_i^j = -L_i^{jT} \quad (3.1)$$

$$\text{即有 } L_1^2 = -L_2^1, \quad L_2^3 = -L_3^2, \quad L_3^1 = -L_1^3$$

又有

$$L^i_j = -L^{iT} \quad (3.2)$$

$$\text{即有 } L^1_2 = -L^2_1, \quad L^2_3 = -L^3_2, \quad L^3_1 = -L^1_3$$

(2) 由式(2.12)有

$$\frac{1}{2} L^{ij} L_{ij} = \frac{1}{2} L^i_j L_i^j = -\frac{1}{2} L^{j'i} L_{ij} = -\frac{1}{2} L_j^i L_i^j = 1 \quad (3.3)$$

$$\text{例如 } -\frac{1}{2} L_j^i L_i^j = -L_2^1 L_1^2 - L_3^1 L_1^3 - L_3^2 L_2^3 = 1 \quad (3.3)'$$

(3) 物理分量。因

$$\mathbf{L} = L^i \mathbf{g}_i = L_i \mathbf{g}^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} L_{jk} \mathbf{g}_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} L^{jk} \mathbf{g}^i$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} L_j^i g_{ik} g_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} L_i^k g^{ij} g^i \quad (3.4)$$

$$\mathbf{g}_i = \sqrt{g_{(i,i)}} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{g}^i = \sqrt{g^{(i,i)}} \mathbf{e}^i \quad (3.5)$$

\mathbf{e}_i 与 \mathbf{e}^i 是单位协变与逆变基矢. L^i , L_i , L_{jk} , L^{jk} , L_j^k , L_j^k 的物理分量定义为

$$\dot{L}^i = L^i \sqrt{g_{(i,i)}}, \quad \dot{L}_i = L_i \sqrt{g^{(i,i)}} \quad (3.6a)$$

$$\dot{L}_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} L_{jk} \sqrt{g_{(i,i)}} = \dot{L}^i \quad (i \neq j \neq k) \quad (3.6b)$$

$$\dot{L}^{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} L^{jk} \sqrt{g^{(i,i)}} = \dot{L}_i \quad (i \neq j \neq k) \quad (3.6c)$$

$$\dot{L}_j^k = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijl} g_{kl} L_j^k \sqrt{g_{(i,i)}} = \dot{L}^i \quad (i \neq j \neq k) \quad (3.6d)$$

$$\dot{L}_j^k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ilk} g^{jl} L_j^k \sqrt{g^{(i,i)}} = \dot{L}_i \quad (i \neq j \neq k) \quad (3.6e)$$

$$\dot{L}_{23} = \dot{L}^1, \quad \dot{L}_{31} = \dot{L}^2, \quad \dot{L}_{12} = \dot{L}^3 \quad (\dot{L}_{32} = -\dot{L}_{23}, \dots)$$

$$\dot{L}^{23} = \dot{L}_1, \quad \dot{L}^{31} = \dot{L}_2, \quad \dot{L}^{12} = \dot{L}_3 \quad (\dot{L}^{32} = -\dot{L}^{23}, \dots)$$

$$\dot{L}_2^3 = \dot{L}^1, \quad \dot{L}_3^1 = \dot{L}^2, \quad \dot{L}_1^2 = \dot{L}^3 \quad (\dot{L}_3^2 = -\dot{L}_2^3, \dots)$$

$$\dot{L}_2^3 = \dot{L}_1, \quad \dot{L}_3^1 = \dot{L}_2, \quad \dot{L}_1^2 = \dot{L}_3 \quad (\dot{L}_3^2 = -\dot{L}_2^3, \dots)$$

在正交坐标系有

$$(\dot{L}^1)^2 + (\dot{L}^2)^2 + (\dot{L}^3)^2 = (\dot{L}_1)^2 + (\dot{L}_2)^2 + (\dot{L}_3)^2 = 1$$

$$(\dot{L}_2^3)^2 + (\dot{L}_3^1)^2 + (\dot{L}_1^2)^2 = (\dot{L}_2^3)^2 + (\dot{L}_3^1)^2 + (\dot{L}_1^2)^2 = 1$$

及其他关系.

在正交坐标系中,

$$\dot{L}_j^k = \dot{L}_j^k, \quad \dot{L}_k^j = -\dot{L}_j^k = -\dot{L}_j^k$$

因此我们允许将混合二阶指标简记为 \dot{L}_j^k . 但对于一般非正交曲线系, 转动参数 L_i^j 并不一定等于 $-L_j^i$, 求它们的物理分量须先求 L^i , L_i .

四、回转磁效应和复合角动量

在一般情况, 变形体中各点的转动角速度不同, 角动量在各微元区域常具有不同值, 呈分布状态. 整体的角动量是局部角动量的复合结果, 故称为复合角动量.

回转磁效应 (Einstein-de Haas 效应) 表现是复合角动量之一重要基本例.

今讨论铁磁性材料圆轴的磁化运动问题. 设圆轴初始无磁性表现. 当受到外磁场 \mathbf{B} 作用后 (假设 \mathbf{B} 方向平行于轴 z 如图2), 圆轴中原子磁矩的向量和不再为零, 合成磁矩

$$\mathbf{M}_o = \Sigma \mathbf{M}_{\text{原子}} \neq 0 \tag{4.1}$$

此时在原子中，电子微观运动的角动量总和也不为零

$$\mathbf{G}_o = \Sigma \mathbf{G}_{\text{原子}} \neq 0 \tag{4.2}$$

按照回转磁比 (Gyromagnetic ratio) γ ，知

$$\mathbf{M}_o = \gamma \mathbf{G}_o \tag{4.3}$$

γ 是负值。 \mathbf{G}_o 是相对于原子的质心计算的角动量总和。

今取一个固定参考系 X' ，并在圆轴内取定一个拖带参考系 x' 。如设想将每个原子的质心和拖带坐标结连，并设想将原子质量集中到质心，则整个体系的角动量可以看成由二部份组成：

- a) \mathbf{G}_o —— 相对于原子质心的微观角动量总和。
- b) \mathbf{G}_c —— 拖带系的牵连运动角动量。由动量矩定律知

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{G}_c + \mathbf{G}_o) = \mathbf{M}_o \times \mathbf{B} \tag{4.4}$$

因为合成总磁矩平行于 \mathbf{B} ，所以 $\mathbf{M}_o \times \mathbf{B} = 0$ ，故有

$$\mathbf{G}_c = -\mathbf{G}_o \tag{4.5}$$

证明拖带系将反向转动。

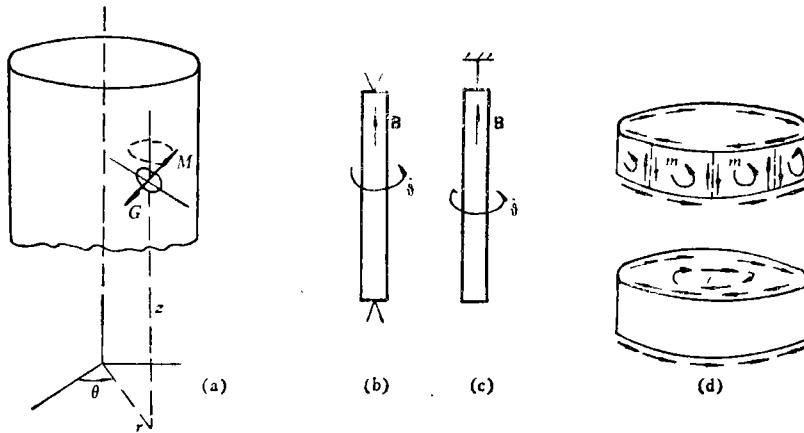


图 2

当磁化圆轴的转动不受约束(图 2(b))，轴中任一点的速度变化率 (参见[8]、[9]二文)

$$\dot{v}'_{||j} = \dot{X}'_j + L'_j \dot{\vartheta} \tag{4.6}$$

因变形极其微小， \dot{X}'_j 可忽略，于是

$$\dot{v}'_{||j} = \dot{L}'_j \dot{\vartheta} \tag{4.7}$$

固定参考系和拖带系均取作圆柱坐标系 ($x^1 \equiv r$, $x^2 \equiv \theta$, $x^3 \equiv z$, (r, θ, z) 按习惯指谓)。因合成的 \mathbf{G}_o 方向平行于 z 轴，因此转轴单位矢量沿 z 轴方向：

$$\dot{L}'_1 \dot{\vartheta} = \dot{L}'_2 \dot{\vartheta} = 1, \quad \dot{L}'_2 \dot{\vartheta} = \dot{L}'_1 \dot{\vartheta} = 0, \quad \dot{L}'_3 \dot{\vartheta} = \dot{L}'_3 \dot{\vartheta} = 0 \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial \dot{v}'^2}{\partial r} = \dot{\vartheta}; \quad \dot{v}'^1 = 0, \quad \dot{v}'^2 = r \dot{\vartheta}, \quad \dot{v}'^3 = 0 \tag{4.9}$$

设拖带系单位质量的平均合成体力矩为 \mathbf{m} ，因 \mathbf{B} 作用于原子磁矩的力矩垂直于 \mathbf{B} ，所以

$\mathbf{m} \perp \mathbf{B}$ ($m^1 \neq 0, m^2 = m^3 = 0$). 由于轴不受转动约束, 在整个体积内分布的 \mathbf{m} 矢自成平衡力系.

当圆轴一端用金属丝悬挂, 磁化轴的转动受约束, 轴回转时, 金属丝施加反力矩 \mathbf{T} 与合成体力矩相均衡. 根据动量矩定理, 存在有非对称切应力 σ^{ij} ($i \neq j$) (σ^{ij} 表示其物理分量) 和体力矩 m^i (\dot{m}^i 表示其物理分量) 的平衡关系 (见[8]、[9]):

$$\sigma^{32} - \sigma^{23} = \rho \dot{m}^1, \quad \sigma^{12} = \sigma^{21} = \sigma^{13} = \sigma^{31} = 0 \quad (4.10)$$

\mathbf{m} 在变形体内是均布的, 取圆轴的二个无穷小相邻截面看, 体力矩产生的切应力等效于面切力 (见图2(d)), 所以在圆轴下底端面出现面切力, 它对轴之矩和金属丝的反力矩平衡,

$$T = |\mathbf{T}| = \int_0^R \sigma^{32} \cdot 2\pi r^2 dr = \frac{2\pi}{3} R^3 \sigma^{32} \quad (4.11)$$

R 为轴半径.

切应力的对称部份 $1/2(\sigma^{32} + \sigma^{23})$ 和应变成比例 (见[8]、[9]). 当变形极其微小,

$$\sigma^{32} + \sigma^{23} \simeq 0 \quad (4.12)$$

所以由(4.10)与(4.12)二式有

$$\sigma^{32} = \frac{1}{2} \rho \dot{m}^1 \quad (4.13)$$

将上式代入(4.11)式求得平均体力矩公式:

$$\dot{m}^1 = \frac{3T}{\pi R^3 \rho} \quad (4.14)$$

T, R, ρ 测得后, 即可算出 \dot{m}^1 值.

以上讨论的是 Einstein-de Haas 效应. 如果铁磁性材料之圆轴高速旋转, 则沿拖带系转轴 \mathbf{L} 方向出现磁场 \mathbf{B} , 当然 \mathbf{B} 是十分微弱的; 这是熟知的 Barnett 效应.

五、结 束 语

本文除了研究有限转动参数的重要性质外, 还应用 Hencky-Brillouin-Synge-钱的拖带坐标系描述法讨论了回转磁效应, 所导得的求体力矩公式是有实用价值的.

参 考 文 献

- [1] Love, A. E. H., A treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover, (1944), 69.
- [2] Synge, J. L., Classical dynamics, in *Handbuch der Physik* Bd. III/1, §10.
- [3] Kozik, T. J., Finite rotations and associated displacement vector, *J. Appl. Mech.*, 98 (1976), 698—699.
- [4] Koehler, T. R. and S. B. Trickey, Euler vectors and rotations about an arbitrary axis, *Am. J. Phys.*, 46, 6(1978), 650—651.
- [5] Wikes, J. M., Rotations as solutions of a matrix differential equation, *Am. J. Phys.*, 46, 6(1978), 685—687.
- [6] Beatty, M. F., Vector analysis of finite rigid rotation, *J. Appl. Mech.*, 99(1977), 501—502.
- [7] 陈至达, 连续介质有限变形力学几何场论, 力学学报, 2 (1979), 107—117. 中国矿院学报, 1 (1978), 1—19.

- [8] 陈至达, 连续介质有限变形力学几何场论 (广义弹性力学, 岩石中的冲激波), 中国矿院学报, 2(1979), 11—26.
- [9] 陈至达, 连续介质有限变形力学几何场论 (弹性有限变形能量原理), 清华大学学报, 19, 4 (1979), 44—57.
- [10] 陈至达, 《有理力学》, 中国矿院, 北京, 研究生部讲义, (1980).

The Finite Rotation Parameter of a Deformable Body and Gyromagnetic Effect

Chen Zhi-da

(China Institute of Mining Technology)

Abstract

The derivation of Syngé⁽²⁾ for the finite rotation formula in terms of Euler parameter is put into tensor form. Hence a further clarification of the geometric meaning of the orthogonal transformation obtained in the author's paper[7] is made. The tensor properties of rotation axis vector are also discussed. By means of the method of co-moving coordinate system established in[8], [9], we explain the gyromagnetic effect, and derive a simple formula for calculating body couple which is induced by magnetization.