应用数学和力学，第4卷第3期（1983年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

有界封闭"裂缝-孔隙"介质弹性渗流问题的精确解及其在试井中的应用*

陈 钟 祥

（石油勘探开发科学研究院，1982年3月8日收到）

摘 要

本文全面求解和研究了有界封闭的"裂缝-孔隙"介质中的弹性渗流问题，进一步揭示和阐明了当忽略岩块系统中的流动时双重孔隙介质中弹性渗流的一些重要特性，并利用所得的解给出通过一系列试井确定有界封闭"裂缝-孔隙"介质地层的所有通常感兴趣的参数的方法.

1960年 Баренблатт 等人提出了双重孔隙介质渗流的数学模型，并且在最简化但却保留了这类介质的最本质的特征即忽略岩块系统中的流动和裂缝系统中的孔隙体积的情况下给出了一个解[1]. Баренблатт 等人的这个解是对无穷大地层作出的线源解．这种裂缝系统只是通道而岩块系统只是储集空间的双重孔隙介质被称为"裂缝-孔隙"介质．本文求解当外边界为有限封闭时这种介质中的弹性渗流问题，并指出所得的解在试井中的某些应用．

一、问题的提法和普遍情形时解的结构

设有一边界形状为任意的均质的"裂缝-孔隙"介质，其上有任意分布的产量各为$q^{(i)}(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$的n口井（采油井的产量为正，注水井的产量为负）以$\partial\Omega_+$和$\partial\Omega_-^{(i)}$分别表示地层外边界和第i口井的井缘边界，Ω表示界于$\partial\Omega_+$和$\partial\Omega_-^{(i)}$之间的平面区域，则由文献[2]，弱可压缩液体在其中的渗流可提成如下的定解问题：

$$\left\{\begin{array}{ll}\alpha k_1(p_2-p_1)=\mu\phi_1 c_1\dfrac{\partial p_1}{\partial t} & (1.1a)\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k_2\dfrac{\partial p_2}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(k_2\dfrac{\partial p_2}{\partial y}\right)+\alpha k_1(p_1-p_2)=0 & (1.1b)\\[2mm] \left.\dfrac{\partial p_2}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_+}=0 & (1.1c)\\[2mm] \displaystyle\oint_{\partial\Omega_-^{(i)}}k_2\frac{\partial p_2}{\partial n}dl=-\frac{\mu}{h}q^{(i)}(t)\qquad(i=1,2,\cdots,n) & (1.1d)\\[2mm] p_1|_{t=0}=p_0(x,y) & (1.1e)\end{array}\right.$$

* 林同骥推荐.

其中p是压力；k是渗透率；ϕ是孔隙度；c是地层综合压缩系数；μ是液体的粘度；α是控制裂缝系统和岩块系统之间的窜流的形状系数；h是地层厚度；下标1,2分别表示该物理量是岩块系统的和裂缝系统的；n表示外法线方向。

我们在此处只考察当各井产量各为恒定时的情形。当各井产量为变化时，只需在此基础上再应用一下Duhamel原理就行了。

首先把问题(1.1a)—(1.1e)作如下的分解：

$$\begin{cases} p_1(x,y,t)=f_1(x,y)-\theta t+u_1(x,y,t) & (1.2a)\\ p_2(x,y,t)=f_2(x,y)-\theta t+u_2(x,y,t) & (1.2b)\end{cases}$$

其中$f_1(x,y)$，$f_2(x,y)$，$u_1(x,y,t)$，$u_2(x,y,t)$分别为下列问题的解：

$$\begin{cases} \alpha k_1(f_2-f_1)=-\mu\phi_1c_1\theta & (1.3a)\\ k_2\left(\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}\right)+\alpha k_1(f_1-f_2)=0 & (1.3b)\\ \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_+}=0 & (1.3c)\\ \oint_{\partial\Omega_-^{(i)}}\dfrac{\partial f_2}{\partial n}dl=-\dfrac{\mu}{k_2h}q^{(i)} \qquad (i=1,2,\cdots,n) & (1.3d)\end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha k_1\ (u_2-u_1)\ =\mu\phi_1c_1\dfrac{\partial u_1}{\partial t} & (1.4a)\\ k_2\left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right)+\alpha k_1(u_1-u_2)=0 & (1.4b)\\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_+}=0 & (1.4c)\\ \oint_{\partial\Omega_-^{(i)}}\dfrac{\partial u_2}{\partial n}dl=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) & (1.4d)\\ u_1|_{t=0}=p_0(x,y)-f_1(x,y) & (1.4e)\end{cases}$$

将式(1.3a)和式(1.3b)相加，得

$$k_2\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}\right)=-\mu\phi_1c_1\theta$$

两端沿整个面积Ω积分，应用Green公式并考虑到边界条件，可定得

$$\theta=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q^{(i)}}{h\phi_1c_1\,\mathrm{mes}\,\Omega} \tag{1.5}$$

这里$\mathrm{mes}\,\Omega$是区域Ω的面积。

为解非定常问题(1.4a)—(1.4e)令

$$\begin{cases} u_1=e^{-\nu t}\Phi_1(x,y) & (1.6a)\\ u_2=e^{-\nu t}\Phi_2(x,y) & (1.6b)\end{cases}$$

代入式(1.4a)—(1.4e)，得

$$\begin{cases} \alpha k_1(\Phi_2-\Phi_1)=-\nu\mu\phi_1 c_1\Phi_1 & (1.7\text{a}) \\ k_2\left(\dfrac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2}\right)+\alpha k_1(\Phi_1-\Phi_2)=0 & (1.7\text{b}) \\ \left.\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_+}=0 & (1.7\text{c}) \\ \oint_{\partial\Omega^{(i)}}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial n}dl=0 & (1.7\text{d}) \end{cases}$$

由式(1.7a)

$$\Phi_1=\frac{\alpha k_1}{\alpha k_1-\nu\mu\phi_1 c_1}\Phi_2 \tag{1.8}$$

代入式(1.7b)，我们得到对Φ_2的特征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2}+\lambda\Phi_2=0 & (1.9\text{a}) \\ \left.\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_+}=0 & (1.9\text{b}) \\ \oint_{\partial\Omega^{(i)}}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial n}dl=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) & (1.9\text{c}) \end{cases}$$

其中

$$\lambda=\frac{\alpha k_1}{k_2}\left(\frac{\alpha k_1}{\alpha k_1-\nu\mu\phi_1 c_1}-1\right)$$

由于在边界条件(1.9b)，(1.9c)下，算子Δ是对称非负的，从而特征值问题(1.9a)—(1.9c)具有下列性质：

1．存在无穷多个特征值$\lambda_0\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots$；

2．所有特征值$\lambda_n\geqslant0$，且有$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$．易见$\lambda_0=0$，其对应的特征函数$\varphi_0=C$（$C$为常数）；

3．相应于不同特征值λ_m，λ_n的特征函数φ_m和φ_n互相正交，即

$$(\varphi_m,\ \varphi_n)=\iint_\Omega\varphi_m\varphi_n d\Omega=0;$$

4．特征函数系φ_0，φ_1，…，φ_n，…是完全的，即任何具有分片连续一阶导数且满足特征函数系所满足的边界条件的函数$f(x,\ y)$，必可按特征函数系展成绝对且一致收敛的级数．假设$\{\varphi_n\}$已经过规一化，则$f(x,y)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}(f,\ \varphi_j)\varphi_j$．

于是，问题(1.4a)—(1.4e)的解可表为

$$u_1=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\nu_j t}\cdot\frac{\alpha k_1}{\alpha k_1-\nu_j\mu\phi_1 c_1}\iint_\Omega(p_0-f)\varphi_j d\Omega\varphi_j \tag{1.10a}$$

$$u_2=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\nu_j t}\iint_\Omega(p_0-f_1)\varphi_j d\Omega\varphi_j \tag{1.10b}$$

其中

$$\nu_j=\frac{\alpha k_1}{\mu\phi_1 c_1}\left(1-\frac{\alpha k_1}{\lambda_j k_2+\alpha k_1}\right) \tag{1.11}$$

我们看到，问题(1.7a)—(1.7d) 的特征值 ν_j 以有穷远点 $\lim\limits_{j\to\infty}\nu_j=\frac{\alpha k_1}{\mu\phi_1 c_1}$ 为聚点。我们还看到，在忽略岩块系统中的流动时，有界封闭的双重孔隙介质中的渗流都可归结为相同的特征值问题(1.9a)—(1.9c)。当忽略裂缝系统的孔隙度时，此特征值问题的每一个特征值 λ_j 通过式(1.11)对应着原问题(1.7a)—(1.7d)的一个特征值 ν_j；而当考虑到二个系统的孔隙度时，则每一个 λ_j 对应着原问题的二个特征值[2]。可以推知，当岩块系统中由于存在着岩性的级差而需再分为 $n-1$ 级即所谓"n重介质"时，每个 λ_j 即对应着原问题的 n 个特征值。文献[3]就是研究了当 $n=3$ 时的情形，其中给出的有关分析在这里得到了颇好的补充。

把式(1.5)，(1.10a)，(1.10b)代入式(1.2a)，(1.2b)，我们便得到问题(1.1a)—(1.1e)当 $q^{(i)}(t)=q^{(i)}=$ 常量时的解为

$$\left\{\begin{aligned} p_1&=f_1(x,y)-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q^{(i)}}{h\phi_1 c_1\,\mathrm{mes}\,\Omega}t+\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\nu_j t}\frac{\alpha k_1}{\alpha k_1-\nu_j\mu\phi_1 c_1}\iint_{\Omega}(p_0-f_1)\varphi_j d\Omega\varphi_j \qquad (1.12\text{a})\\ p_2&=f_2(x,y)-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q^{(i)}}{h\phi_1 c_1\,\mathrm{mes}\,\Omega}t+\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\nu_j t}\iint_{\Omega}(p_0-f_1)\varphi_j d\Omega\varphi_j \qquad (1.12\text{b})\end{aligned}\right.$$

当形状系数 $\alpha\to\infty$ 时，"裂缝-孔隙"介质的性态应趋近于渗透率为 k_2，弹性容量系数为 $\phi_1 c_1$ 的一般多孔介质。事实正是如此。此时，由式(1.11)，(1.8)，

$$\nu_j=\frac{k_2}{\mu\phi_1 c_1}\lambda_j,\qquad \Phi_{1j}=\Phi_{2j}=\varphi_j$$

正好是一般多孔介质弹性渗流问题的特征值和特征函数。解(1.12a)，(1.12b)随即化为一般多孔介质时的解[4]。

文献[1]中曾指出，"裂缝-孔隙"介质与一般多孔介质在渗流动态上的差异，在于前者较后者在非定常过程方面有某种滞后。我们看到，在地层为有界封闭时，这种滞后表现在每一个非定常衰减指数都多了一个滞后因子 $\beta_j=\frac{\alpha k_1}{\alpha k_1+\lambda_j k_2}$，当 $\alpha\to\infty$ 时，它趋近于1。

把式(1.12a)沿整个面积 Ω 积分，我们便可得到岩块系统（也即整个地层）中的平均压力

$$\bar{p}_1=\frac{\iint_{\Omega}p_1(x,y)d\Omega}{\mathrm{mes}\Omega}$$

由于特征函数系 $\{\varphi_j\}$ 在区域上正交，而常数也是特征函数，所以

$$\iint_{\Omega}\varphi_j d\Omega=0\qquad (j\neq 0)$$

于是

$$\bar{p}_1=\frac{1}{\mathrm{mes}\Omega}\left[\iint_{\Omega}p_0(x,y)d\Omega-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q^{(i)}}{h\phi_1 c_1}t\right] \qquad (1.13)$$

理应如此。

文献[3]曾从对比中发现，对岩块系统中无流动的有界封闭的三重介质，与零特征值 λ_0 相

对应的二个原问题的非零特征值，恰好就是各重介质的平均压力解中所包含的二个衰减指数．我们指出，如果像上面那样将相应的精确解沿整个区域积分，则可立即证明文献[3]中的这个结论．并且还可把它推广到"n重介质"中去，即对岩块系统中无流动的有界封闭的"n重介质"，与λ_0相对应的$n-1$个原问题的非零特征值，就是各重介质的平均压力解中所包含的$n-1$个衰减指数．这$n-1$个衰减指数决定着各重介质中平均压力变化的非定常过程的衰减速度．将这一结论用到本文所研究的"裂隙-孔隙"介质的情形，则零特征值λ_0只对应原问题的一个零特征值，即平均压力解中的衰减指数在此情况下消失，平均压力的表达式中不再含有指数衰减项．果然如此．

二、圆形均质地层中仅有一口圆心井时的精确解

此时，特征值问题(1.9a)—(1.9c)化为

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Phi_2}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d\Phi_2}{dr}+\lambda\Phi_2=0 & (2.1a)\\[2ex] \left.\dfrac{d\Phi_2}{dr}\right|_{r_e}=\left.\dfrac{d\Phi_2}{dr}\right|_{r_w}=0 & (2.1b)\end{cases}$$

其中r是以圆心为极点的极径；r_e是地层的外半径；r_w是圆心井的井半径．

显然，$\lambda=0$是特征值，其对应的特征函数φ_0是常数，在规一化后$\varphi_0=\dfrac{1}{\sqrt{\pi(r_e^2-r_w^2)}}$ (2.2)

当$\lambda\neq0$时，令$R=\lambda^{\frac{1}{2}}r$，得带第二类齐次边界条件的零阶 Bessel 方程

$$\begin{cases} R^2\dfrac{d^2\Phi_2}{dR^2}+R\dfrac{d\Phi_2}{dR}+R^2\Phi_2=0\\[2ex] \left.\dfrac{d\Phi_2}{dR}\right|_{R_e,R_w}=0\end{cases}$$

于是，易知问题(2.1a)，(2.1b)的非零特征值λ_i应是下列方程的第i个正零点

$$\Phi_{1,1}(r_e,r_w,\lambda)=0 \tag{2.3}$$

而其对应的特征函数为 $\Phi_{1,0}(r,r_w,\lambda_i)$ (2.4)

这里 $\Phi_{n,m}(r,r_w,\lambda)=J_n(\sqrt{\lambda}r_w)Y_m(\sqrt{\lambda}r)-Y_n(\sqrt{\lambda}r_w)J_m(\sqrt{\lambda}r)$ (2.5)

特征函数 $\Phi_{1,0}(r,r_w,\lambda_i)$的模$N_i$则为

$$N_i=\pi^{\frac{1}{2}}[r_e^2\Phi_{1,0}^2(r_e,r_w,\lambda_i)-r_w^2\Phi_{1,0}^2(r_w,r_w,\lambda_i)]^{\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

定常问题(1.3a)—(1.3d)在此情况下化为

$$\begin{cases} \alpha k_1(f_2-f_1)=-\mu\phi_1c_1\theta & (2.7a)\\[1ex] \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_2}{\partial r}+\dfrac{\alpha k_1}{k_2}(f_1-f_2)=0 & (2.7b)\\[2ex] \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial r}\right|_{r_e}=0 & (2.7c)\\[2ex] \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial r}\right|_{r_w}=\dfrac{\mu}{2\pi k_2hr_w}q & (2.7d)\end{cases}$$

由式(1.5)

$$\theta=\frac{q}{h\phi_1c_1\pi(r_e^2-r_w^2)} \tag{2.8}$$

易得问题(2.7a)—(2.7d)的解为

$$\begin{cases} f_1=\dfrac{\mu q}{\pi h(r_e^2-r_w^2)}\left[\dfrac{1}{\alpha k_1}+\dfrac{1}{2k_2}\left(r_e^2\ln r-\dfrac{r^2}{2}\right)\right]+C & (2.9a)\\ f_2=\dfrac{\mu q}{2k_2h\pi(r_e^2-r_w^2)}\left(r_e^2\ln r-\dfrac{r^2}{2}\right)+C & (2.9b)\end{cases}$$

其中C为任意常数。

把式(2.2)，(2.4)，(2.6)，(2.8)，(2.9a)，(2.9b)代入式(1.12a)，(1.12b)，便可得到当圆形均质"裂缝-孔隙"介质地层中有一口圆心井以恒定的产量q生产时地层中的压力分布，当p_0=常数时，它们为：

$$p_1=p_0-\frac{\mu q}{2k_2\pi h(r_e^2-r_w^2)}\left\{\frac{1}{r_e^2-r_w^2}\left[r_e^2\left(r_e^2\ln r_e-r_w^2\ln r_w-\frac{r_e^2-r_w^2}{2}\right)-\frac{r_e^4-r_w^4}{4}\right]-r_e^2\ln r\right.$$

$$\left.+\frac{r^2}{2}\right\}-\frac{qt}{h\phi_1c_1\pi(r_e^2-r_w^2)}+\frac{\mu q}{hk_2\pi\alpha k_1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\lambda_jk_2+\alpha k_1)\Phi_{1,0}(r_w,r_w,\lambda_j)}{\lambda_j[r_e^2\Phi_{1,0}^2(r_e,r_w,\lambda_j)-r_w^2\Phi_{1,0}^2(r_w,r_w,\lambda_j)]}$$

$$\cdot\Phi_{1,0}(r,r_w,\lambda_j)\exp\left[-\frac{\alpha k_1}{\mu\phi_1c_1}\left(1-\frac{\alpha k_1}{\lambda_jk_2+\alpha k_1}\right)t\right] \tag{2.10a}$$

$$p_2=p_0-\frac{\mu q}{\pi h(r_e^2-r_w^2)}\left\{\frac{1}{\alpha k_1}+\frac{1}{2k_2(r_e^2-r_w^2)}\left\{r_e^2\left(r_e^2\ln r_e-r_w^2\ln r_w-\frac{r_e^2-r_w^2}{2}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{r_e^4-r_w^4}{4}\right]-\frac{1}{2k_2}\left(r_e^2\ln r-\frac{r^2}{2}\right)\right\}-\frac{qt}{h\phi_1c_1\pi(r_e^2-r_w^2)}$$

$$+\frac{\mu q}{hk_2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Phi_{1,0}(r_w,r_w,\lambda_j)}{\lambda_j[r_e^2\Phi_{1,0}^2(r_e,r_w,\lambda_j)-r_w^2\Phi_{1,0}^2(r_w,r_w,\lambda_j)]}$$

$$\cdot\Phi_{1,0}(r,r_w,\lambda_j)\exp\left[-\frac{\alpha k_1}{\mu\phi_1c_1}\left(1-\frac{\alpha k_1}{\lambda_jk_2+\alpha k_1}\right)t\right] \tag{2.10b}$$

当 $r_w\to0$，由于$J_1(0)=0$，$Y_1(0)=-\infty$，故

$$\varphi_j\to\frac{J_0(\sqrt{\lambda_j}r)}{\pi^{\frac{1}{2}}J_0(\sqrt{\lambda_j}r_e)r_e}$$

而确定特征值的方程(2.3)趋近于

$$J_1(\sqrt{\lambda}r_e)=0$$

此即相应的线源问题的特征函数和确定特征值的方程。

这样，令圈井解(2.10a)，(2.10b)中的$r_w\to0$，我们便得到相应的线源解

$$p_1=p_0-\frac{\mu q}{2k_2\pi hr_e^2}\left\{\frac{r^2}{2}-r_e^2\ln\frac{r}{r_e}-\frac{3}{4}r_e^2+\frac{2k_2}{\mu\phi_1c_1}t\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\alpha k_1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_jk_2+\alpha k_1}{\lambda_jJ_0^2(\sqrt{\lambda_j}r_e)}J_0(\sqrt{\lambda_j}r)\exp\left[-\frac{\alpha k_1}{\mu\phi_1c_1}\left(1-\frac{\alpha k_1}{\lambda_jk_2+\alpha k_1}\right)t\right]\right\} \tag{2.11a}$$

$$p_2=p_0-\frac{\mu q}{2k_2\pi hr_e^2}\left\{\frac{2k_2}{\alpha k_1}+\frac{r^2}{2}-r_e^2\ln\frac{r}{r_e}-\frac{3}{4}r_e^2+\frac{2k_2}{\mu\phi_1c_1}t\right.$$

$$\left.-2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_jJ_0^2(\sqrt{\lambda_j}r_e)}J_0(\sqrt{\lambda_j}r)\exp\left[-\frac{\alpha k_1}{\mu\phi_1c_1}\left(1-\frac{\alpha k_1}{\lambda_jk_2+\alpha k_1}\right)t\right]\right\} \tag{2.11b}$$

我们指出，当外边界定压时圆形"裂缝-孔隙"介质渗流问题的线源解曾在文献[5]中给出。

当 $\alpha\to\infty$，解(2.10a)，(2.10b)，(2.11a)，(2.11b)就化为熟知的 $k=k_2$，$\phi c=\phi_1c_1$ 的一般多孔介质时的相应解[6]。

三、在试井中的应用

文献[2]根据所得的普遍情形时的解的结构，给出了在多井生产的情形下，通过多井压降试井方法确定封闭的任意边界形状的非均质双重孔隙介质油层的弹性容量的方法。显然，根据式(1.12a)或(1.12b)，对均质的"裂缝-孔隙"介质也将有同样的结果。而且，由于此时$\phi_2c_2=0$，该多井试井方法将能直接确定地层储量。事实上，由式(1.12a)或(1.12b)，当t足够大后，流动将呈拟定常状态，而有

$$\frac{\partial p_w^{(i)}}{\partial t}=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q^{(i)}}{h\iint_{\Omega}\phi_1c_1d\Omega}\qquad(i=1,2,\cdots,n)\tag{3.1}$$

式中 $p_w^{(i)}$是在第 i 口井中量得的压力。

如果把 c_1 视作常数并已由实验测定，则地层中的储量为

$$V\equiv h\iint_{\Omega}\phi_1d\Omega=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q^{(i)}}{c_1m}\tag{3.2}$$

式中的 m 是在压降曲线上量得的直线段的斜率。

下面，我们阐明如何根据上节得到的圆形均质"裂缝-孔隙"介质地层中有一口圆心井时的精确解，并配合相应情形下的Warren-Root解[7]，通过压降测试或压力恢复测试确定这类地层的所有感兴趣的参数。

在解(2.10b)中置 $r=r_w$，则可得到井底压力$p_w(t)$为

$$p_w(t)=A-\frac{qt}{h\phi_1c_1\pi(r_e^2-r_w^2)}+\frac{\mu q}{hk_2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Phi_{1,0}^2(r_w,r_w,\lambda_j)}{\lambda_j[r_e^2\Phi_{1,0}^2(r_e,r_w,\lambda_j)-r_w^2\Phi_{1,0}^2(r_w,r_w,\lambda_j)]}$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{\alpha k_1}{\mu\phi_1c_1}\left(1-\frac{\alpha k_1}{\lambda_jk_2+\alpha k_1}\right)t\right]\tag{3.3}$$

其中

$$A=p_0-\frac{\mu q}{\pi h(r_e^2-r_w^2)}\left\{\frac{1}{\alpha k_1}+\frac{1}{2k_2(r_e^2-r_w^2)}\left[r_e^2\left(r_e^2\ln r_e-r_w^2\ln r_w-\frac{r_e^2-r_w^2}{2}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{4}(r_e^4-r_w^4)\right]-\frac{1}{2k_2}\left(r_e^2\ln r_w-\frac{r_w^2}{2}\right)\right\}$$

利用关系式 $J_1(z)Y_0(z)-Y_1(z)J_0(z)=\frac{2}{\pi z}$，并注意到式(2.3)，可把上式中的

$$\frac{\Phi_{1,0}^2(r_w,r_w,\lambda_j)}{\lambda_j[r_e^2\Phi_{1,0}^2(r_e,r_w,\lambda_j)-r_w^2\Phi_{1,0}^2(r_w,r_w,\lambda_j)]}$$

化简为

$$\frac{J_1^2(\sqrt{\lambda_j}r_e)}{\lambda_j r_w^2[J_1^2(\sqrt{\lambda_j}r_w)-J_1^2(\sqrt{\lambda_j}r_e)]}$$

当 t 适当的大时，式(3.3)中的求和号中只剩下 $j=1$ 的第一项，其它各项都可捨去．此时称为非定常晚期．我们应用微分法[8]处理非定常晚期段的数据．利用试井文献中常采用的近似式[8]，即由 Bessel 函数表可知，当 $\frac{r_e}{r_w}>100$ 时，

$$\frac{J_1^2(\sqrt{\lambda_1}r_e)}{\lambda_1 r_w^2[J_1^2(\sqrt{\lambda_1}r_w)-J_1^2(\sqrt{\lambda_1}r_e)]}\cong 0.42 \tag{3.4}$$

$$\lambda_1\cong\frac{14.68}{r_e^2} \tag{3.5}$$

则可得到非定常晚期时井底压力的公式为

$$p_w(t)=A-\frac{qt}{h\phi_1 c_1\pi(r_e^2-r_w^2)}+\frac{0.42\mu q}{hk_2\pi}\exp\left[-\frac{\alpha k_1}{\mu\phi_1 c_1}\left(1-\frac{r_e^2\alpha k_1}{14.68k_2+\alpha k_1}\right)t\right] \tag{3.6}$$

将上式对 t 求导二次，得

$$\frac{1}{q}\frac{d^2p_w}{dt^2}=\frac{0.42\mu}{hk_2\pi}\left[\frac{\alpha k_1}{\mu\phi_1 c_1}\left(1-\frac{r_e^2\alpha k_1}{14.68k_2+\alpha k_1}\right)\right]^2\exp\left[-\frac{\alpha k_1}{\mu\phi_1 c_1}\left(1-\frac{r_e^2\alpha k_1}{14.68k_2+\alpha k_1}\right)t\right]$$

记 $z\equiv\frac{1}{q}\frac{d^2p_w}{dt^2}$，两边取对数，得

$$\lg z=\lg\frac{0.42\mu}{hk_2\pi}\left[\frac{\alpha k_1}{\mu\phi_1 c_1}\left(1-\frac{r_e^2\alpha k_1}{14.68k_2+\alpha k_1}\right)\right]^2-\frac{\alpha k_1}{2.3\mu\phi_1 c_1}\left(1-\frac{r_e^2\alpha k_1}{14.68k_2+\alpha k_1}\right)t \tag{3.7}$$

我们看到，在单对数纸上作 $\lg z\sim t$ 图，相应于压降曲线的非定常晚期段的数据将呈一直线．量出其斜率 m_1，它和地层参数有如下关系

$$m_1=-\frac{\alpha k_1}{2.3\mu\phi_1 c_1}\left(1-\frac{r_e^2\alpha k_1}{14.68k_2+\alpha k_1}\right) \tag{3.8}$$

将此直线段延长到纵轴，其截距为 $\lg b_1$．b_1 可直接从单对数纸上读得，它与地层参数有关系：

$$b_1=\frac{0.42\mu}{hk_2\pi}\left[\frac{\alpha k_1}{\mu\phi_1 c_1}\left(1-\frac{r_e^2\alpha k_1}{14.68k_2+\alpha k_1}\right)\right]^2 \tag{3.9}$$

由式(3.8)，(3.9)可得

$$\frac{k_2 h}{\mu}=\frac{2.222m_1^2}{\pi b_1} \tag{3.10}$$

代入式(3.8)，得

$$\phi_1 c_1=\frac{\alpha k_1}{2.3\mu m_1}\left[\frac{\pi hb_1 r_e^2\alpha k_1}{32.62m_1^2\mu+\pi hb_1\alpha k_1}-1\right] \tag{3.11}$$

当流动达到拟定常期时，式(3.3)中的级数项全部消失，此时压降曲线呈一直线．量出其斜率 m_2，显然

$$m_2=-\frac{q}{h\phi_1 c_1\pi(r_e^2-r_w^2)} \tag{3.12}$$

这就是式(3.2)的一个特例，除了能给出储量外，还给出了联系$\phi_1 c_1$和r_e的一个关系式.

令熟知的Warren-Root解[7]中的$\omega=0$，即得无穷大"裂缝-孔隙"介质中一口井以等产量q生产时井底压力的近似解:

$$p_w(t)=p_0-\frac{\mu q}{4\pi k_2 h}\left[\ln\frac{k_2 t}{\mu r_w^2\phi_1 c_1}+0.80928-E_i\left(-\frac{\alpha k_1 t}{\mu\phi_1 c_1}\right)\right] \tag{3.13}$$

当t足够小时，有近似式

$$p_w=p_0-\frac{\mu q}{4\pi k_2 h}\left(0.2219-\ln\frac{\alpha k_1 r_w^2}{k_2}\right) \tag{3.14}$$

当t足够大时，则有渐近式

$$p_w(t)=p_0-\frac{\mu q}{4\pi k_2 h}\left(\ln\frac{k_2 t}{\mu r_w^2\phi_1 c_1}+0.80928\right) \tag{3.15}$$

显然，当边界影响尚未到达之前，此解也适用于有界地层.

就压降测试所得的非定常早期的数据作$p_0-p_w(t)$与$\lg t$的关系图. 由式(3.14)，(3.15)可知，将得一初期水平段和一渐近直线段. 量出渐近直线段的斜率m_3和截距b_3以及初期水平段的截距b_4，它们与地层参数有如下关系:

$$m_3=\frac{\mu q}{2.3\times 4\pi k_2 h} \tag{3.16}$$

$$b_3=\frac{\mu q}{4\pi k_2 h}\left(\ln\frac{k_2}{\mu r_w^2\phi_1 c_1}+0.80928\right) \tag{3.17}$$

$$b_4=\frac{\mu q}{4\pi k_2 h}\left(0.2219-\ln\frac{\alpha k_1 r_w^2}{k_2}\right) \tag{3.18}$$

由此可得:

$$\frac{k_2 h}{\mu}=\frac{q}{2.3\times 4\pi m_3} \tag{3.19}$$

$$\phi_1 c_1=\frac{q}{2.3\times 4\pi m_3 h r_w^2}\exp\left(0.80928-\frac{b_3}{2.3m_3}\right) \tag{3.20}$$

$$\alpha k_1=\frac{\mu q}{2.3\times 4\pi h m_3 r_w^2}\exp\left(0.2219-\frac{b_4}{2.3m_3}\right) \tag{3.21}$$

将式(3.20)代入式(3.12)，我们得到

$$r_e=r_w\left[1-\frac{2.3\times 4m_3 r_w^2}{m_2\exp\left(0.80928-\dfrac{b_3}{2.3m_3}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.22}$$

把式(3.20)，(3.22)代入式(3.11)，我们将再一次得到αk_1，把式(3.21)与式(3.11)，(3.12)联立，又可再一次求得$\phi_1 c_1$和r_e. 这样，我们便通过对在圆形均质"裂缝-孔隙"地层的圆心井中所获得的压降测试资料的相应处理，多次获得该地层的全部感兴趣的参数k_2，$\phi_1 c_1$，αk_1和r_e. 这些用不同处理方法得到的同一参数组的多组值，可以互相验证和校核.

假如我们在压降测试以后紧接着再进行一次压力恢复测试，则关井以后的井底压力可根据叠加原理从式(3.3)得到

$$p_w(t)=p_0-\frac{q}{\pi h}\left\{\frac{T}{\phi_1 c_1(r_e^2-r_w^2)}+\frac{\mu}{k_2 r_w^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{J_1^2(\sqrt{\lambda_j}r_e)}{\lambda_j[J_1^2(\sqrt{\lambda_j}r_w)-J_1^2(\sqrt{\lambda_j}r_e)]}\right.$$

$$\left.\cdot\exp\left[-\frac{\alpha k_1}{\mu\phi_1 c_1}\left(1-\frac{\alpha k_1}{\lambda_j k_2+\alpha k_1}\right)(t-T)\right]\right\} \tag{3.23}$$

其中T是关井的时刻.

当关井后经过适当长的时间，上式求和号中只剩下第一项有贡献．此时对t求导，并考虑到近似式(3.4)，(3.5)，有

$$\frac{1}{q}\frac{dp_w}{dt}=\frac{0.42\alpha k_1}{\pi h k_2\phi_1 c_1}\left(1-\frac{r_e^2\alpha k_1}{14.68k_2+\alpha k_1}\right)\exp\left[-\frac{\alpha k_1}{\mu\phi_1 c_1}\left(1-\frac{r_e^2\alpha k_1}{14.68k_2+\alpha k_1}\right)(t-T)\right]$$

记$Y\equiv\frac{1}{q}\frac{dp_w}{dt}$，两边取对数，得

$$\lg Y=\lg\frac{0.42\alpha k_1}{\pi h k_2\phi_1 c_1}\left(1-\frac{r_e^2\alpha k_1}{14.68k_2+\alpha k_1}\right)-\frac{\alpha k_1}{2.3\mu\phi_1 c_1}\left(1-\frac{r_e^2\alpha k_1}{14.68k_2+\alpha k_1}\right)(t-T) \tag{3.24}$$

作$\lg Y\sim(t-T)$图，将得一直线．量得其斜率m_4和截距b_5，将有

$$m_4=-\frac{\alpha k_1}{2.3\mu\phi_1 c_1}\left(1-\frac{r_e^2\alpha k_1}{14.68k_2+\alpha k_1}\right) \tag{3.25}$$

$$b_5=\frac{0.42\alpha k_1}{\pi h k_2\phi_1 c_1}\left(1-\frac{r_e^2\alpha k_1}{14.68k_2+\alpha k_1}\right) \tag{3.26}$$

由式(3.25)，(3.26)，可得

$$\frac{k_2 h}{\mu}=-\frac{0.966m_4}{\pi b_5} \tag{3.27}$$

代入式(3.25)，得

$$\phi_1 c_1=-\frac{\alpha k_1}{2.3\mu m_4}\left[1+\frac{\pi b_5 h r_e^2\alpha k_1}{14.18m_4\mu+\pi b_5 h\alpha k_1}\right] \tag{3.28}$$

把式(3.25)，(3.26)与式(3.8)，(3.9)相比较，可知应有

$$m_4=m_1 \tag{3.29}$$

$$b_5=-\frac{b_1}{2.3m_4} \tag{3.30}$$

把式(3.20)，(3.22)代入式(3.28)，又得到αk_1，把式(3.21)与式(3.28)，(3.12)联立，又可求得$\phi_1 c_1$和r_e．这样，我们又多了一种利用压力恢复测试的非定常晚期段资料确定“裂缝-孔隙”介质地层参数的手段．

四、小 结

1．本文在任意区域任意口井的普遍情形下得到了有界封闭“裂缝-孔隙”介质中弹性渗流问题的解的结构；在圆形区域中有一口圆心井的典型情形下，则得到了该问题的精确解．

2．在忽略岩块系统中的流动时，有界封闭双重孔隙介质中的弹性渗流问题都可归结为

相同的特征值问题。它的每一个特征值所对应的原问题的特征值的个数等于该双重孔隙介质孔隙体积的级数，且零特征值所对应的原问题的非零特征值，全是地层中各级孔隙体积的平均压力解中所包含的衰减指数。而原问题的特征值，都有在有限远处的聚点。

3． 有界封闭"裂缝-孔隙"介质中弹性渗流时的非定常过程，较一般多孔介质有某种滞后，其每一个非定常衰减指数与一般多孔介质的相较，都带有各自的主要取决于窜流系数的滞后因子。

4． 本文给出了通过试井确定有界封闭"裂缝-孔隙"介质地层所有感兴趣的参数的方法。

在完成本工作的过程中，曾分别和姜礼尚、刘慈群同志作过有益的讨论，谨致谢意。

参 考 文 献

[1] Баренблатт, Г. И., Ю. П. Желтов и И. Н. Кочина. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах, *ПММ*, 24, 5 (1960), 852—864.

[2] 陈钟祥、姜礼尚，双重孔隙介质渗流方程组的精确解，中国科学，2(1980)，152—165.

[3] 刘慈群，三重介质弹性渗流方程组的精确解，应用数学和力学，2. 4(1981)，419—424.

[4] Gavalas, G. R. and J. H. Seinfeld, Reservoirs with spatially properties, estimation of volume from late transient pressure data, *Soc. Pet. Eng. J.*, 13, 6(Dec. 1973), 335—342.

[5] Авакян, Э. А., Некоторые приближенные решения задач фильтрации в трещиновато—пористой среде, Изв АН СССР, *Механика Жидкости и Газа*, 4(1967), 108—113.

[6] Muskat, M., *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York (1937).

[7] Warren, J. E. and P. J. Root, The behavior of naturally fractured reservoirs, *Soc. Pet. Eng. J.*, 3, 3(Sept., 1963), 245—255.

[8] 陈钟祥，由 军，利用试井曲线非定常晚期段确定有界封闭油藏储量和流动系数的微分法，石油勘探与开发，6(1981)，44—48.

[9] Matthews, C. S. and D. G. Russell, Pressure Buildup and Flow Tests in Wells, Monograph Series, Society of Petroleum Engineers of AIME, Dallas 1 (1967).

Exact Solution to the Problem of Flow of Slightly Compressible Fluids in a Bounded Confined "Fracture-Pore" Medium and Its Application to Well Testing

Chen Zhong-xiang

(Scientific Research Institute of Petroleum Exploration and Development, Beijing)

Abstract

The problem of flow of slightly compressible fluids through a bounded confined "fracture-pore" medium is solved and studied thoroughly in this paper. Some essential natures of flow of elastic liquids through a medium with double porosity under the condition of neglecting the flow in matrix system were revealed and clarified further. The method to estimate all parameters commonly interested in a bounded confined "fracture-pore" medium reservoir through a series of flow tests in wells by use of the obtained solution was presented.