

有限元法中大单元的构造

梁国平 傅子智

(中国科学院数学研究所) (北京石油设计院)

(钟万勰推荐, 1982年2月27日收到)

摘 要

在通常的有限元法中, 单元内的插值多项式的阶数固定不变, 通过加密剖分网格来提高精度. 大单元法则剖分的网格固定不变而通过增加单元内逼近级数的项数来提高精度.

本文提出采用两套变量的办法来构造大单元, 即单元内采用一套变量, 单元的边界上采用另一套变量, 然后用杂交-罚函数法把两者联系起来. 这种方法能适用于任何椭圆型方程, 任意几何形状区域以及任何复杂的边界条件. 本文用严密的数学方法证明了: 在一般情况下, 这种方法的精度比通常的有限元法和文[7]的大单元法高得多. 即在达到相同的精度时, 本文方法所需要的自由度(即未知数数目)比上述两种方法少得多.

一、引 言

通常的有限元方法是把求解区域剖分为许多小单元, 然后在每个小单元上建立插值多项式. 如果满足适当的条件, 这种分片插值多项式函数将随着所有小单元的直径趋于零而趋于真解. 因此用有限元法求近似解往往需要把区域剖分为很多个小单元. 由于单元多、自由度多、计算机的计算量、存储量及数据输入量就相应要多. 因此用有限元法时, 准备数据的时间和计算机的计算时间都比经典的解析法要长得多. 然而经典的解析法只能解规则区域及简单方程的问题, 而有限元法则适用于任意复杂区域和复杂的方程.

针对有限元法与解析法各自的优缺点, 曾提出了把两者结合起来的“结合法”^[1~4]. 即在规则区域上采用解析法, 而在非规则区域上采用有限元法. 这种方法用于奇点问题和无界区域问题时, 在奇点附近采用解析法而在其余区域采用有限元法. 由于解析法在奇点附近的计算比有限元法精确得多^[4], 从而特别有效, 因而在这类问题中应用得较早^[5].

解析法与有限元法的一大区别在于: 有限元法通过加密网格来提高精度, 解析法则是通过增加级数展开式的项数来提高精度. 因此后者比前者方便. 文[6]提出了在部分非规则区域上也采用级数展开式, 即所谓的大单元法. 大单元法与有限元法不同, 它是通过单元内级数展开式的项数趋于无穷而趋于真解. 它包括了经典的解析法但又与解析法不同, 可以在非规则区域上构造, 不要求满足方程. 文[7]提出了完全由大单元组成的有限元法. 尽管工程界近几年来已有不少人采用过类似的方法, 但文[7]是首次给出理论分析的论文. 该文采用的是三角形单元和多项式展开式, 当各单元满足协调性条件时得到了误差估计. 但该文的主要缺点是: (1)只用多项式级数, 由于在角点附近(尤其是凹角附近)真解的光滑性较差,

多项式级数逼近精度不理想, 因此从其理论结果看, 计算量及存储量尚未优于有限元; (2) 采用协调元, 使得该方法的应用受到了极大的限制. 因为要求在两个不同的区域上采用不同的级数展开式, 而在共同边界上要满足协调条件, 这是一件很难办到的事. 所以必然会导致第一个缺点, 即只好在所有单元内都采用同阶的多项式级数. 而且很难应用于高阶方程 (如板和壳问题)、曲边区域等较复杂的问题.

本文提出了一种在有限元中构造大单元的方法. 采用两套变量, 单元内一套, 边界上另一套. 用杂交-罚函数法把这两套变量联系起来. 单元内的一套变量可以在形成代数方程组之前消去, 最后形成只有边界变量的代数方程组. 由于对单元内的级数展开式没有任何协调性要求, 单元可具有任意几何形状, 单元内可采用任何级数展开式. 因此按照本文方法构造出来的大单元可适用于任意复杂的区域及高阶方程. 而且在达到相同精度时, 采用本文方法通常比文 [7] 的方法和通常的有限元法所需要的自由度少得多, 最终形成的代数方程组的阶数也低得多, 因此计算量和存储量均比上述两种方法省得多.

二、变 分 公 式

根据线性弹性力学的一般理论^[8], 许多固体力学问题均可归结为在某个区域 Ω 上求解椭圆型方程的边值问题

$$\left. \begin{aligned} L^*ELu &= f && \text{在 } \Omega \text{ 上} \\ \gamma u &= g && \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \\ sELu &= \Sigma && \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中, u 是位移函数, L 是 m 阶 ($m \geq 1$) 微分算子, L^* 是 L 的共轭算子. $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \partial\Omega$, $\partial\Omega$ 是 Ω 的周界. E 是一对称正定矩阵, f 是定义在区域 Ω 上的外力, g 是给定的边界位移值, Σ 是给定的边界外力值. g 和 Σ 都是 m 维列向量 $g = (g_0, g_1, \dots, g_{m-1})^T$ 和 $\Sigma = (\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{m-1})^T$. $\gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u)^T$, $su = (s_0 u, s_1 u, \dots, s_{m-1} u)^T$, γ_i 是 i 阶边界微分算子, s_i 是 $m-i-1$ 阶边界微分算子 ($i=0, 1, \dots, m-1$). 假定对任意区域 $\omega \subseteq \Omega$ 及任何函数 $u \in H^m(\omega)$, $\sigma \in H^m(\omega)$, 有格林公式

$$\langle Lu, \sigma \rangle_\omega = \langle L^* \sigma, u \rangle_\omega + \langle \gamma u, s \sigma \rangle_{\partial\omega} \quad (2.2)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ 表示两个 (向量) 函数在区域 ω 上的内积, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\omega}$ 表示两个 (向量) 函数在边界区域 $\partial\omega$ 上的内积.

$$\langle \gamma u, s \sigma \rangle_{\partial\omega} = \sum_{i=0}^{m-1} \langle \gamma_i u, s_i \sigma \rangle_{\partial\omega} \quad (2.3)$$

本节及以下各节将用到一些普遍使用的索伯列夫空间符号, 请参阅文 [9] [10], 本文不再一一定义.

根据椭圆型微分方程的一般理论, 解边值问题 (2.1) 等价于在空间 $H^m_\gamma(\Omega) = \{u | u \in H^m(\Omega), \gamma u|_{\Gamma_u} = g\}$ 上求泛函

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle Lu, ELu \rangle_\Omega - \langle f, u \rangle_\Omega - \langle \gamma u, \Sigma \rangle_{\Gamma_\sigma} \quad (2.4)$$

的极小值. 其中

$$g_i \in H^{m-i-\frac{1}{2}}(\Gamma_u), \quad \Sigma_i \in H^{-m+i+\frac{1}{2}}(\Gamma_\sigma) \quad (i=0, 1, 2, \dots, m-1)$$

为了求问题 (2.4) 的近似解, 按照类似于通常的有限元法把 Ω 剖分为一定数量的单元. 用 e 表示任意一个单元 (面元), 用 A 表示这些面元的总体集合; 用 τ 表示单元的任意一条边 (线元), 用 T 表示这些线元的总体集合. 设 u 是定义在所有面元 $e \in A$ 上的函数, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})^T$ 是定义在所有线元 $\tau \in T$ 上的 m 维列向量函数. 定义 Hilbert 空间 $\mathcal{H} = S(A) \times A(T)$, 其中

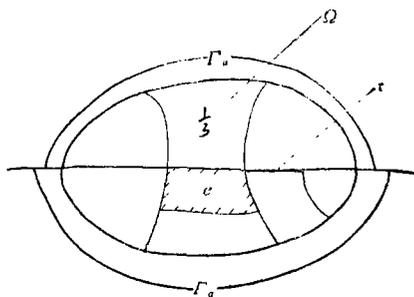


图 1

$$S(A) = \{u | u \in \prod_{e \in A} H^m(e)\}$$

$$A(T) = \{\lambda | \lambda_i \in \prod_{\tau \in T} H^{m-i-\frac{1}{2}}(\tau) \quad (i=0, 1, \dots, m-1)\}$$

其模定义如下:

$$\begin{aligned} \|(u, \lambda)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \sum_{e \in A} \{ |u|_{m,e}^2 + \langle \gamma u - \lambda, \gamma u - \lambda \rangle_{\partial e} \\ &\quad + C(\gamma u - \lambda, \gamma u - \lambda)_{\partial e} \} \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $|u|_{m,e}^2 = \sum_{|\alpha|=m} \int_e |D^\alpha u|^2$, ∂e 是 e 的周界, 由若干个线元 $\tau \in T$ 组成, $C(\cdot, \cdot)_{\partial e}$ 是定义在 τ 上的双线性正定对称泛函.

$$\begin{cases} C(w, w)_\tau > 0 & \text{若在 } \tau \text{ 上 } w \neq 0 \\ C(w, w)_\tau = 0 & \text{若在 } \tau \text{ 上 } w \equiv 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

$C(\cdot, \cdot)$ 的具体表达式将在后面给出. 定义 \mathcal{H} 空间的子集合

$$\mathcal{H}_g = S(A) \times A_g(T), \text{ 其中 } A_g(T) = \{\lambda | \lambda \in A(T), \lambda|_{\Gamma} = g\}$$

及子空间

$$\mathcal{H}_0 = S(A) \times A_0(T), \text{ 其中 } A_0(T) = \{\mu | \mu \in A(T), \mu|_{\Gamma} = 0\}$$

引理1: 如果 $\lambda_i \in H^{m-i-\frac{1}{2}}(\partial e)$, $\sigma \in H^0(e)$ 则有

$$|\langle \lambda, s\sigma \rangle_{\partial e}| \leq C_e \sum_{i=0}^{m-1} \|\lambda_i\|_{m-i-\frac{1}{2}, \partial e} \|\sigma\|_{0,e} \tag{2.7}$$

其中 C_e 是一只依赖于区域 e 的常数.

证明: 求 w 满足椭圆型方程边值问题

$$\begin{cases} L^*ELw = 0 & \text{在 } e \text{ 内} \\ \gamma w = \lambda & \text{在 } \partial e \text{ 上} \end{cases}$$

的解, 由椭圆型方程的一般理论^{[9][10]}知道

$$\|w\|_{m,e} \leq C_e' \sum_{i=0}^{m-1} \|\lambda_i\|_{m-i-\frac{1}{2}, \partial e}$$

C_e' 是一只依赖于区域 e 的常数. 由格林公式 (2.2)

$$\langle \lambda, s\sigma \rangle_{\partial e} = \langle \gamma w, s\sigma \rangle_{\partial e} = \langle Lw, \sigma \rangle_e - \langle w, L^*\sigma \rangle_e$$

$$\begin{aligned} |\langle Lw, \sigma \rangle_e| &\leq C_e'' \|w\|_{m,e} \|\sigma\|_{0,e} \\ |\langle w, L^* \sigma \rangle_e| &\leq \|w\|_{m,e} \|L^* \sigma\|_{-m,e} \\ &\leq C_e'' \|w\|_{m,e} \|\sigma\|_{0,e} \end{aligned}$$

其中 C_e' 及 C_e'' 是只依赖于 e 的常数.

从而

$$\begin{aligned} |\langle \lambda, s\sigma \rangle_{\partial\Omega}| &\leq (C_e'' + C_e') \|w\|_{m,e} \|\sigma\|_{0,e} \\ &\leq C_e' (C_e'' + C_e') \sum_{i=0}^{m-1} \|\lambda_i\|_{m-i-\frac{1}{2},\partial\Omega} \|\sigma\|_{0,e} \end{aligned}$$

由此式即得 (2.7), 其中 $C_e = C_e' (C_e'' + C_e')$.

引理 2: 如果对所有线元 $\tau \in T$, $\lambda_i \in H_{m-i-\frac{1}{2},\tau}$ ($i=0,1,\dots,m-1$), $\sigma \in H^m(\Omega)$, 则由格林公式 (2.2) 可得

$$\sum_{e \in A} \langle \lambda, s\sigma \rangle_{\partial\Omega} = \langle \lambda, s\sigma \rangle_{\partial\Omega} \quad (2.8)$$

其证明与引理 1 相似.

在 Hilbert 空间 \mathcal{H} 上定义泛函

$$\begin{aligned} J(u, \lambda) &= \sum_{e \in A} \left\{ \frac{1}{2} \langle Lu, ELu \rangle_e - \langle \gamma u - \lambda, sELu \rangle_{\partial e} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} C(\gamma u - \lambda, \gamma u - \lambda)_{\partial\Omega} \right\} - \langle f, u \rangle_{\Omega} - \langle \lambda, \Sigma \rangle_{\Gamma_0} \end{aligned} \quad (2.9)$$

我们有

定理 1: 若 u 是方程 (2.1) 的解, 在全部 $\tau \in T$ 上取 $\lambda = \gamma u$, 则这样的 (u, λ) 是泛函 J 在集合 $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ 上的一个极小值.

证明: 对 J 求变分, 得变分方程

$$\delta J = D(u, \lambda; v, \mu) - \langle f, v \rangle_{\Omega} - \langle \mu, \Sigma \rangle_{\Gamma_0} = 0 \quad \forall (v, \mu) \in \mathcal{H}_0 \quad (2.10)$$

其中

$$\begin{aligned} D(u, \lambda; v, \mu) &= \sum_{e \in A} \{ \langle Lu, ELv \rangle_e - \langle \gamma u - \lambda, sELv \rangle_{\partial e} \\ &\quad - \langle \gamma v - \mu, cELu \rangle_{\partial e} + C(\gamma u - \lambda, v - \mu)_{\partial\Omega} \} \end{aligned} \quad (2.11)$$

由格林公式 (2.2)

$$\langle Lu, ELv \rangle_e = \langle L^*ELu, v \rangle_e + \langle \gamma v, sELu \rangle_{\partial e}$$

因为 u 满足方程 (2.1), 故

$$L^*ELu = f$$

由上述两式及 $\lambda = \gamma u$, 即得

$$\begin{aligned} D(u, \lambda; v, \mu) &= \sum_{e \in A} \{ \langle f, v \rangle_e + \langle \mu, sELu \rangle_{\partial e} \} \\ &= \langle f, v \rangle_{\Omega} + \sum_{e \in A} \langle \mu, sELu \rangle_{\partial e} \end{aligned}$$

由引理 2 的 (2.8) 式得

$$\begin{aligned} \sum_{e \in A} \langle \mu, sELu \rangle_{\partial e} &= \langle \mu, sELu \rangle_{\partial\Omega} \\ &= \langle \mu, sELu \rangle_{\Gamma_0} + \langle \mu, sELu \rangle_{\Gamma_0} \end{aligned}$$

在 Γ_σ 上 $sELu = \Sigma$

在 Γ_u 上 $u = 0$

因此

$$D(u, \lambda; v, \mu) = \langle f, v \rangle_\Omega + \langle \mu, \Sigma \rangle_{\Gamma_\sigma}$$

从而 (u, λ) 满足变分方程(2.10), 故 (u, λ) 是 J 的一个极小值.

三、近似解空间及其误差估计

从二节的定理1知道, 边值问题(2.1)的解是泛函 J 在 \mathcal{H} 空间中的凸子集 \mathcal{H}_0 上的极小. 因此我们可以把对(2.1)的真解 u 的逼近问题转换为在 \mathcal{H} 空间上对 $(u, \gamma u)$ ($\in \mathcal{H}$) 的逼近问题, 其中

$$\mathcal{H} = S(A) \times \Lambda(T)$$

$$S(A) = \prod_{e \in A} H^m(e), \quad \Lambda(T) = \prod_{\tau \in T} \prod_{i=0}^{m-1} H^{m-i-\frac{1}{2}}(\tau) \quad \left. \vphantom{S(A)} \right\} \quad (3.1)$$

由此看出只需分别研究近似解在每一个面元 e 上 (在 $H^m(e)$ 空间上) 对 u 的逼近问题以及在每一条线元 τ 上 (在 $H^{m-i-\frac{1}{2}}(\tau)$ 空间上) 对 $\gamma_i u$ ($i=0, 1, \dots, m-1$) 的逼近问题就足够了.

在任一面元 $e \in A$ 上, 我们用近似函数

$$\hat{u}^e = \sum_{n=1}^{N_e} \hat{u}_n^e \varphi_n^e \quad (3.2)$$

逼近真解 u , 其中 \hat{u}_n^e 是未知量, φ_n^e 是定义在 e 上的充分光滑的基函数 (要求 $\varphi_n^e \in H^m(e)$). 记 \hat{u} 为由全部 \hat{u}^e 组成的定义在 Ω 上的函数, 即在 e 上, $\hat{u} = \hat{u}^e, \forall e \in A$.

在任一线元 $\tau \in T$ 上用 m 维近似向量函数

$$\hat{\lambda}^\tau = \sum_{k=1}^{M_\tau} \hat{\lambda}_k^\tau \psi_k^\tau \quad (3.3)$$

逼近 $\lambda (= \gamma u)$, 其中 $\hat{\lambda}_k^\tau$ 是 m 维未知向量, ψ_k^τ 是定义在 τ 上的充分光滑的基函数 (要求其 m 个分量 $\psi_{ki}^\tau \in H^{m-i}(\tau)$ ($i=0, 1, \dots, m-1$)). 记 $\hat{\lambda}$ 为由全部 $\hat{\lambda}^\tau$ 组成的函数, 即在 τ 上 $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}^\tau, \forall \tau \in T$.

取近似解空间

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{S}(A) \times \hat{\Lambda}(T) \quad (3.4)$$

其中, $\hat{S}(A) = \prod_{e \in A} S_e$, S_e 是以 φ_n^e ($n=1, 2, \dots, N_e$) 为基 (函数) 的 N_e 维线性空间.

$\hat{\Lambda}(T) = \prod_{\tau \in T} \Lambda_\tau$, Λ_τ 是以 ψ_{ki}^τ ($i=0, 1, \dots, m-1, k=1, 2, \dots, M_\tau$) 为基 (函数) 的 $m \times M_\tau$ 维线性空间.

定义 $\hat{\mathcal{H}}$ 空间上的凸子集

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hat{S}(A) \times \hat{\Lambda}_0(T) \quad (3.5)$$

其中 $\hat{\Lambda}_0(T) = \prod_{\tau \in T} \Lambda_{\tau,0}$

$$\begin{cases} A_{\tau, g} = A_{\tau} & \text{当 } \tau \notin \Gamma_u \\ \lambda^{\tau} = g & \text{当 } \tau \subset \Gamma_u \end{cases}$$

近似解 $(\hat{u}, \hat{\lambda})$ 的全部未知量 $\{\hat{u}_{\tau}^n\}$ (共有 $\prod_{e \in A} N_e$ 个) 及 $\{\hat{\lambda}_{\tau}^k\}$ (共有 $\prod_{\tau \in T} M_{\tau} \times m$ 个) 通过在集

合 $\hat{\mathcal{H}}_0$ 上求泛函 $J(\hat{u}, \hat{\lambda})$ 的极小得到. 相应的变分子空间

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hat{S}(A) \times \hat{A}_0(T) \tag{3.6}$$

其中 $A_0(T) = \prod_{\tau \in T} A_{\tau, 0}$

$$\begin{cases} A_{\tau, 0} = A_{\tau} & \text{当 } \tau \notin \Gamma_u \\ \lambda^2 = 0 & \text{当 } \tau \subset \Gamma_u \end{cases}$$

显然有 $\hat{\mathcal{H}}_0 \subset \mathcal{H}_0$.

在 $\hat{\mathcal{H}}_0$ 上求泛函 $J(\hat{u}, \hat{\lambda})$ 的极小, 等价于求 $(\hat{u}, \hat{\lambda}) \in \hat{\mathcal{H}}_0$ 满足变分方程

$$D(\hat{u}, \hat{\lambda}; \hat{v}, \hat{\mu}) = \langle f, \hat{v} \rangle_0 + \langle \hat{\mu}, \Sigma \rangle_{r_0} \quad \forall (\hat{v}, \hat{\mu}) \in \hat{\mathcal{H}}_0 \tag{3.7}$$

的解 (其中 D 按 (2.11) 式定义). 为因 $\hat{\mathcal{H}}_0 \subset \mathcal{H}_0$, 故真解 (u, λ) (其中 $\lambda = \gamma u$) 也满足 (3.7).

如果我们适当引入范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ (真解 (u, λ) 及 $\hat{\mathcal{H}}$ 空间中的所有元素对此范数都有意义) 之后, 对称算子 D 满足正定性条件

$$D(\hat{v}, \hat{\mu}; \hat{v}, \hat{\mu}) \geq \alpha \|\hat{v}, \hat{\mu}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall (\hat{v}, \hat{\mu}) \in \hat{\mathcal{H}}_0 \tag{3.8}$$

及有界性条件

$$\begin{aligned} |D(u - \hat{u}, -\lambda - \hat{\lambda}; \hat{v}, \hat{\mu})| &\leq d \|(u - \hat{u}, \lambda - \hat{\lambda})\|_{\mathcal{H}} \|\hat{v}, \hat{\mu}\|_{\mathcal{H}} \\ \forall (u, \lambda) \in \mathcal{H}_0 \text{ 及 } \forall (\hat{v}, \hat{\mu}) \in \hat{\mathcal{H}}_0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

其中 (u, λ) 是真解, α 和 d 是大于零的常数. 则由一般误差理论⁽⁹⁾ 可以证明方程 (3.7) 的解存在唯一, 并有误差估计

$$\|(u - \hat{u}, \lambda - \hat{\lambda})\|_{\mathcal{H}} \leq \left(1 + \frac{d}{\alpha}\right) \inf_{(\hat{u}, \hat{\lambda}) \in \hat{\mathcal{H}}_0} \|(u - \hat{u}, \lambda - \hat{\lambda})\|_{\mathcal{H}} \tag{3.10}$$

其中 $(\hat{u}, \hat{\lambda}) \in \hat{\mathcal{H}}_0$ 是方程 (3.7) 的解.

关键的问题在于如何选择罚函数 $C(\cdot, \cdot)_{0e}$ 和范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, 使 D 满足条件 (3.8) 和 (3.9). 由 (2.11) 有

$$\begin{aligned} D(\hat{v}, \hat{\mu}; \hat{v}, \hat{\mu}) &= \sum_{e \in A} \{ \langle L\hat{v}, EL\hat{v} \rangle_e - 2\langle \gamma\hat{v} - \hat{\mu}, sEL\hat{v} \rangle_{0e} \\ &\quad + C(\gamma\hat{v} - \hat{\mu}, \gamma\hat{v} - \hat{\mu})_{0e} \} \end{aligned} \tag{3.11}$$

由引理 1 的估计式 (2.7) 有

$$\begin{aligned} |2\langle \gamma\hat{v} - \hat{\mu}, sEL\hat{v} \rangle_{0e}| &\leq 2C_e \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma_i \hat{v} - \hat{\mu}_i\|_{m-i-\frac{1}{2}, 0e} \|EL\hat{v}\|_{0,e} \\ &\leq 2C_E C_e \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma_i \hat{v} - \hat{\mu}_i\|_{m-i-\frac{1}{2}, 0e} \sqrt{\langle L\hat{v}, EL\hat{v} \rangle_e} \end{aligned}$$

其中 C_E 是一只依赖于 E 的常数 ($C_E = \max_{\rho} \sqrt{\rho(E)}$, $\rho(E)$ 是正定矩阵 E 的最大特征值). 又

由索伯列夫插值空间理论知道

$$\begin{aligned} \|\gamma_i \hat{v} - \hat{\mu}_i\|_{2m-i-\frac{1}{2}, \partial e}^2 &\leq D_e \|\gamma_i \hat{v} - \hat{\mu}_i\|_{m-i-1, \partial e} \|\gamma_i \hat{v} - \hat{\mu}_i\|_{m-1, \partial e} \\ &\leq \frac{D_e}{2} \left\{ \frac{1}{N_e} \|\gamma_i \hat{v} - \hat{\mu}_i\|_{2m-i, \partial e}^2 + N_e \|\gamma_i \hat{v} - \hat{\mu}_i\|_{2m-i-1, \partial e}^2 \right\} \end{aligned}$$

其中 D_e 是一只依赖于区域 e 的常数。从而

$$\begin{aligned} |2\langle \gamma \hat{v} - \hat{\mu}, sEL\hat{v} \rangle_{\partial e}| &\leq \frac{1}{2} \langle L\hat{v}, EL\hat{v} \rangle_e \\ &+ mC_B^2 C_e^2 D_e \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \frac{1}{N_e} \|\gamma_i \hat{v} - \hat{\mu}_i\|_{2m-i, \partial e}^2 \right. \\ &\left. + N_e \|\gamma_i \hat{v} - \hat{\mu}_i\|_{2m-i-1, \partial e}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

由 (3.11)、(3.12) 两式不难看出, 如果取 $C(\cdot, \cdot)_{\partial e}$ 的表达式为 [注]

$$\begin{aligned} C(\gamma \hat{v} - \hat{\mu}, \gamma \hat{v} - \hat{\mu})_{\partial e} &= K \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \frac{1}{N_e} \|\gamma_i \hat{v} - \hat{\mu}_i\|_{2m-i, \partial e}^2 \right. \\ &\left. + N_e \|\gamma_i \hat{v} - \hat{\mu}_i\|_{2m-i-1, \partial e}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

其中 K 是一充分大的正常数, $K \geq \max \{ 2mC_B^2 C_e^2 D_e \}$ 则有

$$|2\langle \gamma \hat{v} - \hat{\mu}, sEL\hat{v} \rangle_{\partial e}| \leq \frac{1}{2} \langle L\hat{v}, EL\hat{v} \rangle_e + \frac{1}{2} C(\gamma \hat{v} - \hat{\mu}, \gamma \hat{v} - \hat{\mu})_{\partial e} \quad (3.14)$$

定义范数

$$\|(\hat{v}, \hat{\mu})\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{e \in A} \{ \langle L\hat{v}, EL\hat{v} \rangle_e + C(\gamma \hat{v} - \hat{\mu}, \gamma \hat{v} - \hat{\mu})_{\partial e} \} \quad (3.15)$$

则 D 满足正定性条件

$$D(\hat{v}, \hat{\mu}; \hat{v}, \hat{\mu}) \geq \frac{1}{2} \|(\hat{v}, \hat{\mu})\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (3.16)$$

另一方面, 由引理 1 有

$$\begin{aligned} |\langle z, sELw \rangle_{\partial e}| &\leq C_e \sum_{i=0}^{m-1} \|z_i\|_{m-i-\frac{1}{2}, \partial e} \|ELw\|_{0, e} \\ &\leq C_B C_e \sum_{i=0}^{m-1} \|z_i\|_{m-i-\frac{1}{2}, \partial e} \sqrt{\langle Lw, ELw \rangle_e} \\ &\leq C_B C_e \sqrt{D_e} \sum_{i=0}^{m-1} [\|z_i\|_{m-i-1, \partial e} \|z_i\|_{m-i, \partial e} \langle Lw, ELw \rangle_e]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

[注] 为了 (3.13) 式有意义, 要求 $\lambda_i, \hat{\lambda}_i$ 以及相应的变分 $\hat{\mu}_i$ 属于 $\Pi H^{m-i}(\tau)$ 空间 ($i=0, 1, \dots, m-1$).

这需要当 $\tau \subset \Gamma_i$ 时 $g_i \in H^{m-i}(\tau)$, 当 $\tau \subset \Gamma_e$ 时 $\Sigma_i H^{-m+i+1}(\tau)$.

$$\begin{aligned}
&\leq C_B C_e \sqrt{mD_e} \left[N_e \sum_{i=0}^{m-1} \|z_i\|_{m-i-1}^2 + \frac{1}{N_e} \sum_{i=0}^{m-1} \|z_i\|_{m-i}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{\langle Lw, ELw \rangle_e} \\
&\leq C_B C_e \sqrt{\frac{mD_e}{K}} \sqrt{C(z, z)_{ee}} \sqrt{\langle Lw, ELw \rangle_e} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{C(z, z)_{ee}} \sqrt{\langle Lw, ELw \rangle_e}
\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{e \in A} |\langle z, sELw \rangle_{ee}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{e \in A} C(z, z)_{ee}} \sqrt{\sum_{e \in A} \langle Lw, ELw \rangle_e} \quad (3.17)$$

显然有

$$\sum_{e \in A} |C(z, w)_{ee}| \leq \sqrt{\sum_{e \in A} C(z, z)_{ee}} \sqrt{\sum_{e \in A} C(w, w)_{ee}} \quad (3.18)$$

及

$$\sum_{e \in A} |\langle Lz, ELz \rangle_e| \leq \sqrt{\sum_{e \in A} \langle Lz, ELz \rangle_e} \sqrt{\sum_{e \in A} \langle Lw, ELw \rangle_e} \quad (3.19)$$

由以上 (3.17)–(3.19) 三式即得 D 的有界性估计

$$\begin{aligned}
|D(u-\hat{u}, \lambda-\hat{\lambda}, \hat{v}, \hat{\mu})| &= \sum_{e \in A} \{ \langle L(u-\hat{u}), EL\hat{v} \rangle_e \\
&\quad - \langle \gamma(u-\hat{u}) - (\lambda-\hat{\lambda}), sEL\hat{v} \rangle_{ee} - \langle \gamma\hat{v} - \hat{\mu}, sEL(u-\hat{u}) \rangle_{ee} \\
&\quad + C(\gamma(u-\hat{u}) - (\lambda-\hat{\lambda}), \hat{v} - \hat{\mu})_{ee} \} \\
&\leq \left(\sqrt{\sum_{e \in A} \langle L(u-\hat{u}), EL(u-\hat{u}) \rangle_e} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\sum_{e \in A} C(\gamma(u-\hat{u}) - (\lambda-\hat{\lambda}), \gamma(u-\hat{u}) - (\lambda-\hat{\lambda}))_{ee}} \right) \\
&\quad \left(\sqrt{\sum_{e \in A} \langle L\hat{v}, EL\hat{v} \rangle_e} + \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{e \in A} C(\gamma\hat{v} - \hat{\mu}, \gamma\hat{v} - \hat{\mu})_{ee}} \right) \\
&\leq 2 \| (u-\hat{u}, \lambda-\hat{\lambda}) \|_{\mathcal{H}} \| (\hat{v}, \hat{\mu}) \|_{\mathcal{H}} \quad (3.20)
\end{aligned}$$

由 (3.16)、(3.20) 及 (3.10) 即得误差估计

$$\| (u-\hat{u}, \lambda-\hat{\lambda}) \|_{\mathcal{H}} \leq 5 \inf_{(\hat{u}, \hat{\lambda}) \in \mathcal{H}_e} \| (u-\hat{u}, \lambda-\hat{\lambda}) \|_{\mathcal{H}} \quad (3.21)$$

因此我们有

定理 2: 如果罚函数 $C(\cdot, \cdot)_{ee}$ 由 (3.13) 式给出, 范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ 按 (3.15) 式定义, 则方程 (3.7) 在 \mathcal{H}_e 凸集上存在唯一的解 $(\hat{u}, \hat{\lambda})$ 并且与真解 (u, λ) 之差有估计式 (3.21)。

四、逼近误差

从上节定理 2 可知, 由变分方程 (3.7) 求得的近似解 $(\hat{u}, \hat{\lambda})$ 与真解 (u, λ) 的误差的大小, 取决于近似解空间 \mathcal{H} 对真解 (u, λ) 的逼近精度, 也就是说取决于在每个面元 $e \in A$ 上, 由 N_e 个

基函数 $\left\{ \varphi_n^e \right\}_{n=1}^{n=N_e}$ 张成的 N_e 维空间对 u 的逼近精度, 以及在每条线元 $\tau \in T$ 上, 由 M_τ 个 m 维向量基函数 $\left\{ \psi_k^\tau \right\}_{k=1}^{k=M_\tau}$ 张成的空间对 $\lambda (\lambda = \gamma u)$ 的逼近精度. 在每个面元 $e \in A$ 上对 u 的逼近精度不仅取决于基函数的数目 N_e , 而且 (可能更加重要) 取决于选取什么样的函数作为近似解空间的基函数. 我们知道可以有許多方法构造逼近函数, 例如在有限元法中采用分片低阶插值多项式, Spline 插值函数等等. 但本文只讨论采用级数逼近的方法.

由文[7]知道, 如果采用多项式级数在面元 e 上逼近某函数 $u \in H^r(e)$, 用 S_N 表示全部 N 阶多项式集合, 则有逼近精度估计式

$$\inf_{p \in S_N} \|u - p\|_{e,0} \leq C_e N^{s-r} \|u\|_{r,e} \quad (4.1)$$

其中 C_e 是一只依赖于 e 的常数 (以下为了书写方便, 用同一个符号 C_e 表示依赖于区域 e 的不同常数); $r \geq s \geq 0$.

同理, 如果在线元 τ 上采用多项式级数逼近 λ , 则有逼近精度估计

$$\inf_{p \in S_N} \|\lambda - p\|_{\tau,0} \leq C_\tau N^{s-r} \|\lambda\|_{r,\tau} \quad (4.2)$$

如果对所有的面元 $e \in A$ 和所有的线元 $\tau \in T$, 都采用多项式级数逼近真解. 则由 (4.1) 及 (4.2) 式不难导出

$$\begin{aligned} \inf_{(\hat{u}, \hat{\lambda}) \in \mathcal{X}} \|(u - \hat{u}, \lambda - \hat{\lambda})\|_{\mathcal{X}}^2 &\leq K \left\{ \sum_{e \in A} C_e \|u\|_{k_e, e}^2 N_e^{2(m-k_e)} \right. \\ &\left. + \sum_{e \in A} \sum_{\tau \in \partial e} C_\tau \left[N_e^{-1} M_\tau^{2m+1-2k_e} + N_e M_\tau^{2m-1-2k_e} \right] \|u\|_{k_\tau, -\frac{1}{2}, \tau}^2 \right\} \quad (4.3) \end{aligned}$$

其中 $k_e \geq m, k_\tau \geq m + \frac{1}{2}$, C_e 和 C_τ 分别是依赖于 e 和 τ 的常数.

如果对所有的 $e \in A$ 有 $k_e = k_A, N_e = N$ (k_A 与 N 是不依赖于 e 的正常数); 对所有的 $\tau \in T$ 有 $k_\tau = k_T, M_\tau = M$ (k_T 和 M 是不依赖于 τ 的正常数). 且令 $C_A = \max_{e \in A} \{C_e\}$, $C_T = \max_{\tau \in T} \{C_\tau\}$, 则可将 (4.3) 式简化为

$$\begin{aligned} \inf_{(\hat{u}, \hat{\lambda}) \in \mathcal{X}} \|(u - \hat{u}, \lambda - \hat{\lambda})\|_{\mathcal{X}}^2 &\leq K \left\{ C_A \|u\|_{k_A, \Omega}^2 N^{2(m-k_A)} \right. \\ &\left. + \sum_{\tau \in T} C_\tau \|u\|_{k_\tau, -\frac{1}{2}, \tau}^2 \left(\frac{M}{N} + \frac{N}{M} \right) M^{2(m-k_\tau)} \right\} \quad (4.4) \end{aligned}$$

由 (3.21) 和 (4.4) 即可得到近似解的误差估计

$$\begin{aligned} \|(u - \hat{u}, \lambda - \hat{\lambda})\|_{\mathcal{X}} &\leq C \sqrt{K} \left\{ \sqrt{C_A} \|u\|_{k_A, \Omega} N^{m-k_A} \right. \\ &\left. + \sqrt{\sum_{\tau \in T} C_\tau \|u\|_{k_\tau, -\frac{1}{2}, \tau}^2} \left(\frac{M}{N} + \frac{N}{M} \right)^{\frac{1}{2}} M^{m-k_T} \right\} \quad (4.5) \end{aligned}$$

其中 C 是一绝对常数, $k_A \geq m, k_T \geq m + \frac{1}{2}$.

采用 Nitsche 技巧即能得到 L_2 估计

$$\begin{aligned} \|u - \hat{u}\|_{0,\Omega} &\leq C' \sqrt{K} \left\{ \sqrt{C_A} N^{-m} + \sqrt{C_T} \left(\frac{M}{N} + \frac{N}{M} \right)^{\frac{1}{2}} M^{-m} \right\} \\ &\cdot \|(u - \hat{u}, \lambda - \hat{\lambda})\|_{\mathcal{X}} \quad (4.6) \end{aligned}$$

其中 C' 是一只依赖于 Ω 及 E 的常数。

由(4.3)式可以看到, 在每一面元 $e \in A$ 上的逼近阶精度将随着 k_e 的增大而增高, 也就是说真解 u 在 e 上越光滑则逼近精度越好. 我们知道椭圆型方程的解 u 在区域内部及右端 f 与方程系数光滑之处具有很高的光滑性, 此时采用多项式级数逼近真解 u , 将有很高的精度, 往往比有限元的精度高很多. 然而在边界的角点附近或在 f (或方程系数) 光滑性很差的地方, 真解只有很低的光滑性, 即 k_e 很小, 此时采用多项式逼近的精度较差, 不一定比通常的有限元好. 但若采用其他形式的级数, 例如三角级数, 则其逼近精度会好得多.

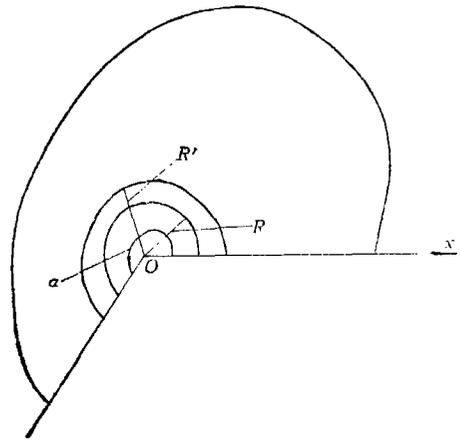


图 2

例如当 u 在平面凹角域附近满足 Laplace 方程 ($\Delta u = 0$), 在角的两条边上取自由边界条件 ($\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, 其中 n 是边界上的法线方向) (图2). 如果在凹角附近采用极坐标, 坐标原点取在角的顶点上, 角的一条边取为坐标轴, 角度的大小设为 α , 则真解 u 在角域附近的通解表达式为

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \cos n\theta \quad (0 \leq \theta \leq \alpha \leq 2\pi) \quad (4.7)$$

由此表达式可知, 当 $\alpha \neq \pi$ 时, 在角域附近 u 只属于 $H^{1+\frac{\pi}{\alpha}-\epsilon}$ ($\epsilon > 0$) 空间, 即 $k_e = 1 + \frac{\pi}{\alpha} - \epsilon$, 当 α 较大时, (例如 $\alpha > \pi$, 即凹角的情形), u 的光滑性很差, 多项式级数的逼近精度不理想. 但是如果采用 (4.7) 式作级数逼近, 则具有非常高的精度. 不难证明, 若在角域 $0 \leq r \leq R'$, $0 \leq \theta \leq \alpha$ 上真解 u 有通解表达式 (4.7), 则在较小的角域 $e = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \alpha\}$ 上 (其中 $R < R'$) 对任何正数 k , 都有截断误差估计

$$\left\| u(r, \theta) - \sum_{n=0}^N u_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \cos n\theta \right\|_{1,e} \leq C(k, R) N^{-k} \quad (4.8)$$

其中 $C(k, R)$ 是一只依赖于 k 和 R 的常数. 这说明若采用 (4.7) 式作级数逼近真解, 则有任意高阶的逼近精度, 而采用多项式级数, 其逼近阶不超过 π/α , 当 $\alpha = 2\pi$ 时只有 $1/2$ 阶精度. 不仅如此, 在许多实际问题中需要计算展开式 (4.7) 的第二项系数 u_1 (如断裂问题中的应力强度因子), 而采用此级数逼近真解, 则可直接算得 u_1 , 并且也有任意高阶精度.

由此可见, 在不同的面元 e 上采用不同类型的级数逼近真解往往可以大大提高逼近精度, 并且更适应实际的需要.

现在讨论在每一线元 $\tau \in T$ 上对 λ 的逼近问题. 我们对 τ (即对剖分) 作两点一般性的限制: (1) 每一条线元 τ 或是一条直线段, 或是一条充分光滑的曲线段; (2) τ 必需而且只能是下面的三种情形之一, 即 ① $\tau \subset \Gamma_u$, ② $\tau \subset \Gamma_\sigma$, ③ 整条落在 Ω 区域内 (即为单元间公共边). 现分别对这三种情形进行讨论. 第一, $\tau \subset \Gamma_u$, 此时 $\hat{\lambda} = g$, 不含有未知量; 第二, $\tau \subset \Gamma_\sigma$, 若取 $\hat{\lambda} = \gamma \hat{u}$ 则可取消 Γ_σ 上的全部 $\hat{\lambda}$ 变量, 此时把 (2.9) 式泛函 $J(u, \lambda)$ 的最后一项 $\langle \lambda, \Sigma \rangle_{r_\sigma}$ 改

为 $\langle u, \Sigma \rangle_{r_0}$, 或相应的变分方程(3.7)的最后一项 $\langle \hat{u}, \Sigma \rangle_{r_0}$ 改为 $\langle \hat{v}, \Sigma \rangle_{r_0}$ 即可; 第三, $\tau \subset \Omega$ 内, 由于这些线元 τ 是人为地选取的, 我们常常可以把它们选在真解 u (从而 λ)充分光滑的地方. 因此在这些 τ 上采用多项式级数即可得到很高的逼近精度.

此外, 还应看到, 近似解 \hat{u} 是分别定义在每个面元 $e \in A$ 上的. 不同面元 e 的未知量没有任何联系, 可在形成整体代数方程组之前先行消去. 最终形成只有线元 $\tau \in T$ 上的未知量 $\hat{\lambda}$ 的代数方程组. 因此对总体计算量和存储量起决定性作用的是 $\hat{\lambda}$ 未知量的数目及其稀疏性. 由于 $\hat{\lambda}$ 的逼近阶精度很高, 故其未知量可取得比通常的有限元法或文[7]的大单元法的未知量少得多(也就是说其代数方程组的阶数少得多)即可得到相同的精度.

有关应用本文方法的各种结果将陆续另文介绍.

参 考 文 献

- [1] 梁国平, 分层解法——有限元的一个新算法, 应用数学学报, 2, 1(1979).
- [2] 梁国平, 半解析法及其误差估计, 计算数学, 2, 3(1980).
- [3] Zienkiewicz, O. C., D. W. Kelly and P. Bettess, The coupling of the finite element method and boundary solution procedure, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 11, 2(1977).
- [4] 梁国平、顾永耕, 平面弹性断裂问题的半解析法, 计算数学, 1, 4(1978).
- [5] Tong, P. and T. H. H. Pian, A hybrid element approach to crack problems in plane elasticity, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 7 (1973), 297—308.
- [6] 李子才、梁国平, 椭圆型方程边值问题的结合法, 中国科学, (1981).
- [7] Babuska, I., B. A. Szabo and I. N. Katz, The p -version of the finite element method, *SIAM J. Numer. Anal.*, 18, 3(1981).
- [8] Oden, J. T. and J. N. Reddy, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Heidelberg, (1976).
- [9] Oden, J. T. and J. N. Reddy, *Mathematical Theory of Finite Elements*, John Wiley and Sons, New York, (1976).
- [10] Treves, F., *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, San Francisco, London, (1975).

The Construction of Large Elements in Finite Element Method

Liang Guo-ping

(Institute of Mathematics, Academia Sinica, Beijing)

Fu Zi-zhi

(Beijing Petroleum Design Institute, Beijing)

Abstract

In the usual finite element method, the order of the interpolation in an element is kept unchanged, and the accuracy is raised by subdividing the grid denser and denser. Alternatively, in the large element method, the grid is retained unchanged, and the terms of approximate series in the element are increased to raise the accuracy.

In this paper, a method for constructing large elements is presented. When using this method, two sets of variables, one set defined inside the element, and the other defined on the boundary of the element, are adopted. Then, these two sets of variables are combined by the hybrid-penalty function method. This method can be applied to any elliptic equations in a domain with arbitrary shape and arbitrary complex boundary condition. It is proved with strict mathematical method in this paper, that in general cases, the accuracy of this method is much higher than that of the usual element and the large element method presented by [7]. Therefore, the degrees of freedom needed in this method is much fewer than that in those two methods if the same accuracy is preserved.