

岩石介质变模量帽盖模型 的弹塑性本构关系*

钱寿易 章根德

(中国科学院力学研究所, 1982年7月1日收到)

摘 要

本文用连续介质力学的理论分析了岩石屈服前的性状, 导出了岩石介质的非线性弹性的本构方程, 并与实验资料进行了比较, 二者十分接近. 进而用非线性弹性取代一般帽盖模型中关于弹性区的线弹性假设, 导出了非线性弹性-塑性硬化的帽盖模型.

岩石介质是一种物理力学性质十分复杂的地质材料. 为了恰当地描述它的本构关系, Dimaggio 和 Sandler 在 Drucker 等人的研究^[1]及剑桥模型^[2]的基础上, 提出了帽盖模型^{[3][4]}. 由于帽盖模型能恰当地拟合多种加载途径下的试验资料, 如实地描述岩石介质的主要性状, 可以广泛地用于不同的目的, 充分显示了适应性与灵活性, 所以近几年来获得了广泛的发展和应^{[5]-[7]}.

帽盖模型具有传统的增量塑性理论的结构. 在加载函数对屈服面、塑性势都是相适应的情况下, 正交流动的增量塑性基本关系式的推导建立在两个基本假设上^[8]. 第一个基本假设是: 存在一个标量屈服函数 F , 非弹性应变仅在 $dF > 0$ 时发生, 并且 F 不依赖于非弹性应变. 第二个假设是: 塑性应变 e_{ij}^p 对 $d\sigma_{ij}$ 的依赖关系是线性的, 即 $de_{ij}^p = g_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{km}} d\sigma_{km}$, 这里 g_{ij} 是某个常数.

在一般帽盖模型中, 弹性区常采用线弹性假设. 由于线弹性不能反映岩石介质在屈服前的应力应变关系非线性、膨胀现象等特性, 导致了用应力增量与应变增量的关系式来代替线弹性中常数的体积模量与剪切模量. 这样计算就十分复杂. 所以, 如何使帽盖模型既能反映岩石介质的主要特性, 计算上又不十分复杂, 成了一个十分重要的问题.

本文为解决这个问题进行了尝试. 首先, 运用连续介质力学的基本理论分析岩石介质屈服前的性状, 导出了岩石介质的非线性弹性本构方程, 并与实验资料进行了比较. 进而, 用非线性弹性的本构关系来取代一般帽盖模型中关于弹性区的线弹性假设, 导出了一种新的变模量帽盖模型, 即非线性弹性-塑性硬化帽盖模型.

* 钱伟长推荐.

一、岩石介质的非线性分析

具有增量关系的一般帽盖模型在三维笛卡儿坐标中能表示为^[8]:

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^E + d\epsilon_{ij}^P \quad (1.1)$$

$$d\epsilon_{ij}^E = \frac{1}{9K} \delta_{ij} d\sigma_{kk} + \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} d\sigma_{kk} \right) \quad (1.2)$$

$$F(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^P) \leq 0 \quad (1.3)$$

$$d\epsilon_{ij}^P = \begin{cases} d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, & \text{如 } F=0 \\ 0, & \text{如 } F<0 \end{cases} \quad (1.4)$$

这里, δ_{ij} 是克氏符号. $d\epsilon_{ij}$, $d\epsilon_{ij}^E$, $d\epsilon_{ij}^P$ 各表示总应变、弹性应变、塑性应变的增量. $d\sigma_{ij}$ 表示应力增量. $d\lambda$ 是一个系数, 仅当塑性应变发生时不为零.

引入 $I_1 = \sigma_{ij} \delta_{ij}$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} \right) \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} \right)$$

经过冗长的张量计算, 最终可以得到:

$$d\sigma_{ij} = K \delta_{ij} \left(d\epsilon_{kk} - 3d\lambda \frac{\partial F}{\partial I_1} \right) + 2G \left(d\epsilon_{ij} - d\lambda \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{2\sqrt{J_2}} \right) \quad (1.5)$$

$$d\lambda = \frac{3 \frac{\partial F}{\partial I_1} K d\epsilon_{kk} + G \frac{s_{im}}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} d\epsilon_{im}}{9K \left(\frac{\partial F}{\partial I_1} \right)^2 + G \left(\frac{\partial F}{2\sqrt{J_2}} \right)^2 - 3 \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^P}} \quad (1.6)$$

对于岩石介质, 常采用 Mohr-Coulomb 准则作为破坏准则. 如果破坏面与屈服面相一致作为第一近似假设, Mohr-Coulomb 关系的线性化描述可以表示为:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2c \cos \phi - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi \quad (1.7)$$

式中的 c 和 ϕ 分别为内聚力与摩擦角. (见图1).

用三个应力不变量来定义用最大和最小主应力表示的关系式(1.7), I_1 与 J_2 分别如前面所表示的, 第三个不变量 J_3 可以表示为: $J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki}$. 应力不变量可以用静水压力和偏差应力分量来表示. 于是三个偏差应力主值就满足下列三次方程:

$$s^3 - J_2 s - J_3 = 0 \quad (1.8)$$

设 $s = r \sin \theta$ 代入 (1.8) 式, 可以得到:

$$\sin^3 \theta - \frac{J_2}{r^2} \sin \theta - \frac{J_3}{r^3} = 0 \quad (1.9)$$

解方程(1.9), 可以得到:

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} J_2^{\frac{1}{2}}$$

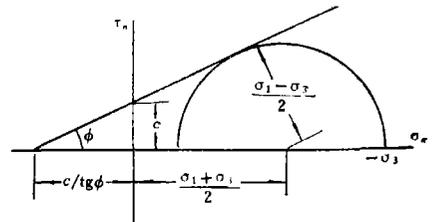


图1 线性化的莫尔-库伦关系

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(-\frac{4J_3}{r^3} \right) = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}} \right)$$

θ 作为第三不变量的方便的代换量就是Lode角。所以，以 I_1 ， $\sqrt{J_2}$ ， θ 来表示应力不变量，三个主应力可以表示为：

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \sqrt{J_2} \begin{bmatrix} \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \\ \sin\theta \\ \sin\left(\theta + \frac{4}{3}\pi\right) \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

将(1.10)式代入(1.7)式，可以得到：

$$F = \frac{1}{3} I_1 \sin\phi + \sqrt{J_2} \cos\theta - \frac{\sqrt{J_2}}{3} \sin\theta \sin\phi - c \cos\phi = 0 \quad (1.11)$$

于是，

$$\frac{\partial F}{\partial I_1} = \frac{1}{3} \sin\phi \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial F}{2\sqrt{J_2}} = \cos\theta \left[1 + \text{tg}\theta \text{tg}3\theta - \frac{\sin\phi}{\sqrt{3}} (\text{tg}\theta - \text{tg}3\theta) \right] \quad (1.13)$$

将式(1.2)与(1.13)代入式(1.5)与(1.6)，就可以得

$$d\sigma_{ij} = K \delta_{ij} (d\epsilon_{kk} - d\lambda \sin\phi) + 2G \left\{ d\epsilon_{ij} - d\lambda \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \cos\theta \left[1 + \text{tg}\theta \text{tg}3\theta - \frac{\sin\phi}{\sqrt{3}} (\text{tg}\theta - \text{tg}3\theta) \right] \right\} \quad (1.14)$$

$$d\lambda = \frac{K \sin\phi d\epsilon_{kk} + G \cos\theta \left[1 + \text{tg}\theta \text{tg}3\theta - \frac{\sin\phi}{\sqrt{3}} (\text{tg}\theta - \text{tg}3\theta) \right] \frac{s_{im}}{\sqrt{J_2}} d\epsilon_{im}}{K \sin^2\phi + G \cos^2\theta \left[1 + \text{tg}\theta \text{tg}3\theta - \frac{\sin\phi}{\sqrt{3}} (\text{tg}\theta - \text{tg}3\theta) \right]^2 - \sin^2\phi \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}}} \quad (1.15)$$

公式(1.14)与(1.15)给出了以Mohr-Coulomb准则为破坏包络轨迹时帽盖模型的应力增量表达式。

帽盖模型中包括三种不同的性状方式：弹性性状，破坏性状及塑性硬化帽盖。在屈服前岩石的性状往往认为是弹性的。弹性区的模量常用有效的卸载资料来确定。对一般的低孔隙率岩石，可以把体积模量 K ，剪切模量 G 都取作常量。但是为了更逼真地拟合岩石的特性，特别是具有较高孔隙率的岩石，就必须用非线性弹性来模拟岩石在弹性区的性状。

借助于连续介质力学基本理论的帮助，我们可以很快地导出非线性弹性的本构关系。对于弹性体，我们知道应力张量 σ 与应变张量 ϵ 有一一对应的关系：

$$\epsilon = f(\sigma) \quad (1.16)$$

(1.16)式展开成级数能写成如下的形式：

$$\epsilon = f_0 I_0 + f_1 \sigma + f_2 \sigma^2 + f_3 \sigma^3 + \dots \quad (1.17)$$

按照张量分析的Cayley-Hamilton理论，对称张量满足它自身的特征方程，可以得到关于 σ 的幂的递推公式^[9]：

$$\sigma^3 = I_3 I_0 - I_2 \sigma + I_1 \sigma^2 \quad (1.18)$$

这里， $I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}$$

I_0 为单位张量。

借助于公式(1.18)的帮助, σ 的任何高于 σ^2 的幂都能表示成 I_0 , σ 和 σ^2 的线性组合。于是公式(1.17)中关于 σ 的三次幂和所有的高次幂都消失, (1.17)式就变成:

$$\epsilon = \phi_0 I_0 + \phi_1 \sigma + \phi_2 \sigma^2 \quad (1.19)$$

公式(1.19)中的模数 $\phi_i = \phi_i(I_1, I_2, I_3)$ 能表示为主应力不变量无限级数。如果我们这样考虑 ϕ_i 中各项的取舍, 使得 ϵ 的表达式中只出现 σ^2 项, 而不出现 σ^3 或 σ 的更高次幂。于是 I_3 就不出现了, 结果公式(1.19)能写成如下的形式^[10]:

$$\epsilon = (\alpha_0 + AI_1 + BI_1^2 + CI_2)I_0 + (D + HI_1)\sigma + L\sigma^2 \quad (1.20)$$

设岩石介质在均匀无应力的自然状态时, 应变为零。于是 $\alpha_0 = 0$, A, B, C, D, H, L 为尺度常数。将(1.20)式写成分量形式:

$$\epsilon_{ij} = (AI_1 + BI_1^2 + CI_2)\delta_{ij} + (D + HI_1)\sigma_{ij} + L\sigma_{ik}\sigma_{kj} \quad (1.21)$$

公式(1.21)中除了 A 和 D 外所有的常数都消失, 就可以得到虎克定律:

$$\epsilon'_{ij} = AI_1\delta_{ij} + D\sigma_{ij}$$

这里 $A = -\frac{\nu}{E}$, $D = \frac{1+\nu}{E}$, E 为扬氏模量, ν 为泊桑比。

$$\epsilon''_{ij} = (BI_1^2 + CI_2)\delta_{ij} + HI_1\sigma_{ij} + L\sigma_{ik}\sigma_{kj}$$

表示了对虎克定律偏离的非线性分量。体积的非线性膨胀可以表示为:

$$V^d = (3B + C + H + \frac{1}{3}L)I_1^2 + (3C - 2L)J_2 \quad (1.22)$$

对单轴压缩, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 。

$$V^d = -3(3B + H)J_2 \quad (1.23)$$

(1.23)式表明了单纯的剪切能引起膨胀, 这就是人们常说的剪胀性。所以公式(1.21)作为岩石介质的一种非线性本构关系, 它能恰当地描述膨胀性、非线性响应等岩石的重要特性。

公式(1.21)中的常数能通过岩石力学常规试验得到。例如, 由常规三轴试验给出了 $\sigma_z \sim \epsilon_z$ 与 $\sigma_z \sim \epsilon_\theta$ 曲线。从 $\sigma_z \sim \epsilon_\theta$ 曲线在 $\sigma_z = 0$ 处的斜率就能定出常数 A 。从 $\sigma_z \sim \epsilon_z$ 曲线在 $\sigma_z = 0$ 处的斜率可定出 $A + D$ 。由 $\sigma_z \sim \frac{\partial \epsilon_z}{\partial \sigma_z}$ 曲线的斜率与 $\sigma_z \sim \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial \sigma_z}$ 曲线的斜率能定出 $2(B + H)$ 与 $2B$ 。

当 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$ 时, 静水压缩试验没有非线性膨胀现象, 即:

$$V^d = (3B + H + C)I_1^2 + 3CJ_2 = 0$$

于是 $C = -(3B + H)$, 再由单纯剪切或真三轴试验就可以定出常数 L 。

我们对 Schock^[11] 所给出的柳吉特砂岩在围压 1kbar 时的三轴试验的实验曲线进行了模拟。由电子计算机计算得到的常数为: $A = 0.237 \text{ Mbar}^{-1}$, $D = 1.926 \text{ Mbar}^{-1}$, $E = 0.529 \text{ Mbar}$, $\nu = 0.14$, $B = 69 \text{ Mbar}^{-2}$, $H = -106 \text{ Mbar}^{-2}$, $C = -101 \text{ Mbar}^{-2}$, $L = 0$, 理论计算的结果与实验曲线比较接近, 分别如图2、图3、图4所示。这表明了非线性弹性的本构关系能较好地模拟岩石介质在屈服前的主要物理力学特性。用它来取代一般帽盖模型中关于弹性区的线弹性假设, 就能得到非线性弹性-塑性硬化帽盖模型。

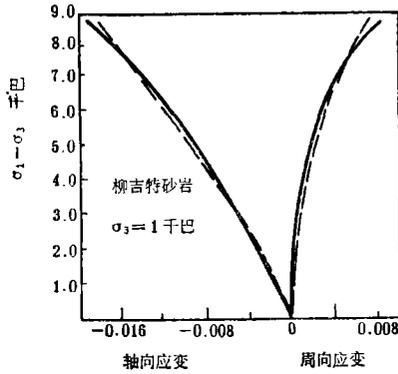


图2 围压1kbar时轴向与周向应变~轴向应力差的曲线

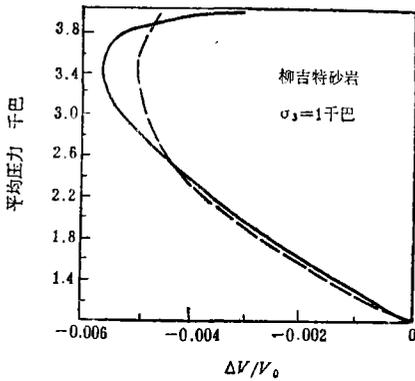


图3 围压1kbar时体积应变~平均压力曲线

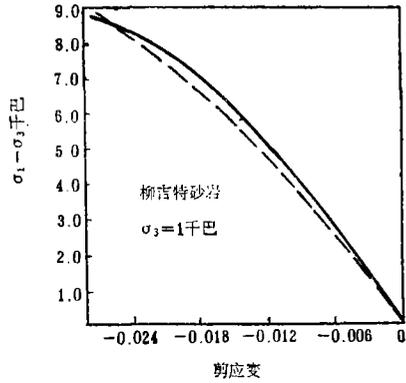


图4 围压1kbar时剪应变~轴向应力差曲线

二、非线性弹性-塑性硬化帽盖模型

前面的分析给出了岩石介质在屈服前的非线性本构方程。对于实际中存在的大量球对称问题， $\sigma_2 = \sigma_3$ 。公式 (1.21) 中的常数变成：

$$L=0, \quad A=-\frac{\nu}{E}, \quad D=\frac{1+\nu}{E}, \quad C=-(3B+H)$$

弹性应变可以写成：

$$\begin{aligned} e_{ij}^E &= (AI_1 + BI_1^2 + CI_2)\delta_{ij} + (D + HI_1)\sigma_{ij} \\ &= \left[-\frac{\nu}{E}I_1 - \frac{1}{2}(B+H)I_1^2 + \frac{1}{2}(3B+H)\sigma_{ij}\sigma_{ij} \right] \delta_{ij} + \left(\frac{1+\nu}{E} + HI_1 \right) \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (2.1)$$

弹性应变增量 de_{ij}^E ：

$$\begin{aligned} de_{ij}^E &= \frac{\partial e_{ij}^E}{\partial I_1} dI_1 + \frac{\partial e_{ij}^E}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \\ &= \frac{1}{9K} \delta_{ij} dI_1 + \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} dI_1 \right) + H\sigma_{ij} dI_1 \\ &\quad - (B+H)I_1 \delta_{ij} dI_1 - (3B+2H)I_1 d\sigma_{ij} \end{aligned} \quad (2.2)$$

于是, 具有增量关系的非线性弹性-塑性硬化帽盖模型可以写成如下的形式:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^E + d\varepsilon_{ij}^P \quad (2.3)$$

$$d\varepsilon_{ij}^E = \frac{1}{9K} \delta_{ij} dI_1 + \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} dI_1 \right) - (B+H) I_1 \delta_{ij} dI_1 \\ + H \sigma_{ij} dI_1 + (3B+2H) I_1 d\sigma_{ij} \quad (2.4)$$

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P) \leq 0 \quad (2.5)$$

$$d\varepsilon_{ij}^P = \begin{cases} d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, & \text{如 } F=0 \\ 0, & \text{如 } F<0 \end{cases} \quad (2.6)$$

在塑性形变过程中, 公式 (2.5) 与 (2.6) 变成:

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P) = 0 \quad (2.7)$$

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.8)$$

由公式 (2.7) 能得:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^P} d\varepsilon_{ij}^P = 0 \quad (2.9)$$

将 (2.8) 式代入 (2.9) 式:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^P} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \quad (2.10)$$

公式 (2.3) 可以写成:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{9K} \delta_{ij} dI_1 + \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} dI_1 \right) - (B+H) I_1 \delta_{ij} dI_1 \\ + H \sigma_{ij} dI_1 + (3B+2H) I_1 d\sigma_{ij} + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.11)$$

(2.11) 式两边乘 δ_{ij} , 化简后可得:

$$d\varepsilon_{ij} \delta_{ij} = d\varepsilon_{kk} = \frac{1}{3K} dI_1 + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{lm}} \delta_{lm}$$

于是有:

$$d\sigma_{kk} = dI_1 = 3K \left(d\varepsilon_{kk} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{lm}} - \delta_{lm} \right) \quad (2.12)$$

改写成不变量 I_1, J_2 的形式, 由于 $\frac{\partial s_{ij}}{\partial \sigma_{ij}} = 1 - \frac{1}{3} \delta_{ij}$, $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij} \frac{\partial F}{\partial I_1} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}}$,

$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^P} = \delta_{ij} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^P}$. 公式 (2.11) 能改写成:

$$d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{1}{6G} - \frac{1}{9K} \right) \delta_{ij} dI_1 - d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = 3(B+H) s_{ij} dI_1 + \frac{1}{2G} d\sigma_{ij} \quad (2.13)$$

将 (2.12) 式代入 (2.13) 式, 化简后可得:

$$d\sigma_{ij} = K \delta_{ij} \left(d\varepsilon_{ij} - 3d\lambda \frac{\partial F}{\partial I_1} \right) + 2G \left(d\varepsilon_{ij} - d\lambda \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} - \frac{\partial F}{2\sqrt{J_2}} \right) \\ - 18KG(B+H) \left(d\varepsilon_{kk} - 3d\lambda \frac{\partial F}{\partial I_1} \right) s_{ij} \quad (2.14)$$

将公式 (2.13) 两边乘 $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$, 可得:

$$\begin{aligned} d\epsilon_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \left(\frac{1}{6G} - \frac{1}{9K} \right) \delta_{ij} dI_1 \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \\ = \frac{1}{2G} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + 3(B+H) s_{ij} dI_1 \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

以公式 (2.10), (2.12) 及 $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij} \frac{\partial F}{\partial I_1} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}}$ 代入上式, 化简后可得:

$$d\lambda = \frac{3K d\epsilon_{kk} \frac{\partial F}{\partial I_1} - G \frac{s_{lm}}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} d\epsilon_{lm} - 18KG(B+H)\sqrt{J_2} \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} d\epsilon_{kk}}{9K \left(\frac{\partial F}{\partial I_1} \right)^2 + G \left(\frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \right)^2 - 3 \frac{\partial F}{\partial \epsilon_v} \frac{\partial F}{\partial I_1} - 54KG\sqrt{J_2}(B+H) \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}}} \quad (2.16)$$

将 (2.16) 式所表示的 $d\lambda$ 代入 (2.14) 式, 就能求得所需的 $d\sigma_{ij}$ 的值. 对于以 Mohr-Coulomb 准则为屈服面的非线性弹性-塑性硬化帽盖模型, 应力增量表达式为:

$$d\sigma_{ij} = [K\delta_{ij} - 18KG(B+H)s_{ij}] (d\epsilon_{kk} - d\lambda \sin \phi) + 2G \left(d\epsilon_{ij} - d\lambda \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \right) \quad (2.17)$$

$$d\lambda = \frac{K \sin \phi d\epsilon_{kk} - G \frac{s_{lm}}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} d\epsilon_{lm} - 18KG(B+H)\sqrt{J_2} \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} d\epsilon_{kk}}{K \sin^2 \phi + G \left(\frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \right)^2 - \sin \phi \frac{\partial F}{\partial \epsilon_v} - 18KG(B+H) \sin \phi \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \sqrt{J_2}} \quad (2.18)$$

公式 (2.17)、(2.18) 中的 $\frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} = \cos \theta \left[1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} 3\theta - \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} 3\theta) \right]$.

模型的拟合过程与一般常模量帽盖模型相似^[6]. 只是本模型的弹性区采用了非线性假设, 要由三轴试验来定出常数 A, B, C, D, H . 它比线性假设多了两个常数 B 与 H . 而常数 $C = -(3B+H)$ 是非独立的常数.

比较公式 (2.14) 与 (1.5), (2.16) 与 (1.6), 非线性弹性-塑性硬化帽盖模型比一般常模量帽盖模型都增加了与非线性常数相关的项. 当 $B=H=0$ 时, 相应项也就消失, 本模型也就转化为一般常模量帽盖模型. 所以, 一般常模量帽盖模型只不过本模型用来描述低孔隙率岩石时的一种特殊形式. 非线性弹性-塑性硬化帽盖模型既能较好地描述岩石在屈服前的非线性、膨胀性等特性, 又能恰当地拟合岩石的各种破坏性状与塑性硬化性状. 与常模量帽盖模型相比, 具有更广泛的适应性, 能适用于描述各种类型的岩石介质. 并且, 它的数学形式又比较简单, 能广泛地应用于岩石工程与地下激波的计算中.

结论: 为了更逼真地描述岩石介质屈服前存在的非线性、膨胀性等特性, 帽盖模型的弹性区必须采用非线性假设. 运用连续介质力学基本理论可以导出岩石介质在屈服前的非线性本构关系, 进而可以得到非线性弹性-塑性硬化帽盖模型. 当着非线性常数消失时, 它就转化为一般的常模量帽盖模型.

附 录

σ 应力张量	δ_{ij} 克氏符号
σ_{ij} 应力张量的分量形式	I_1 应力张量第一不变量
s_{ij} 应力偏量的分量形式	I_2 应力张量第二不变量
ϵ 应变张量	I_3 应力张量第三不变量
e_{ij} 应变张量的分量形式	J_2 应力偏量第二不变量
e_{ij} 应变偏量的分量形式	J_3 应力偏量第三不变量
e_{ij}^E 弹性应变张量的分量形式	A, B, C, D, H, L 非线性弹性常数
e_{ij}^P 塑性应变张量的分量形式	K 线弹性体的体变模量
de_{ij}^E 弹性应变增量	G 线弹性体的剪切模量
de_{ij}^P 塑性应变增量	E 杨氏模量
e_V^P, e_{kk}^P 塑性体积应变	ν 泊桑比
de_V^P, de_{kk}^P 塑性体积应变增量	c 内聚力
e_z 三轴压缩时的轴向应变	ϕ 摩擦角
e_θ 三轴压缩时的周向应变	V^d 非线性弹性的体积膨胀
	F 屈服面函数

参 考 文 献

- [1] Drucker, D. C., R. E. Gibson and D. J. Henkel, *Trans. A. S. C. E.*, 122, (1957) 338—346.
- [2] Schofield, A. and P. Worth, *Critical State Soil Mechanics*, London, McGraw Hill, Ltd (1968).
- [3] Dimaggio, F. L. and I. Sandler, DASA-2521, Paul Weidlinger consulting engineer, (1970).
- [4] Sandler, I. and F. L. Dimaggio, DASA-2595, Paul Weidlinger consulting engineer, (Oct. 1970).
- [5] Sandler, I. and F. L. Dimaggio, *Proc. A. S. C. E. Journal of Geotechnical Engineering Division*, 102, GT7 (1976).
- [6] Dimaggio, F. L. and I. Sandler, DNA 2801 T (AD-737662), (Oct. 1971).
- [7] Swift, R. P., Modeling of static and dynamic responses of dry kayenta sandstone, 17th, U. S., *Symposium on Rock Mechanics*, (1976).
- [8] Bazant, Zdenek, P., *Int. J. Solids Structures*, 14, 691-714.
- [9] Freudenthal, A. M., The mathematical theories of the inelastic continuum, *Handbuch der Physik VI*, Springer-Verlag, Berlin, (1958).
- [10] William, D. S. and D. James, Continuum theory of rock dilatancy, *Advances in Rock Mechanics Reports of Current Research*, 11, Part A, *Proceedings of the Third Congress of the International Society for Rock Mechanics Themes 1-2 Denver* (1974).
- [11] Schock, R. N., UCRL-51447, August 28, (1973).
- [12] Sandler, I. S. and M. L. Baron, Recent development in the constitutive modeling of geological materials, *Proc. 3rd Int. Conf. Num. Methods Geomech.*, Aachen, W. Germany.

The Elastoplastic Constitutive Relation of Generalized Cap Model for Rock Medium

Tsien Shou-i Chang Ken-ta
(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing*)

Abstract

In this paper, the rock behavior before yielding is analyzed by using the theory of continuum mechanics. The nonlinearly elastic constitutive equation of rock medium is derived and compared satisfactorily with the available experimental data. Moreover, the substitution of the linearly elastic hypothesis used in the conventional cap model with the nonlinearly elastic one leads to develop a new nonlinearly elastic-hardening plastic cap model as presented herein.