

论非线性连续介质热-力耦合系统中的 的动力裂纹传播*

欧 阳 颢

(复旦大学数学系, 1982年9月15日收到)

摘 要

在许多工程问题中, 热-力耦合是重要的, 而不能加以忽略. 核反应堆工程就是这样的一个例子. 本文讨论非线性连续介质的热-力耦合系统中的裂纹传播问题. 各种的非线性介质, 包括非线性弹性、弹塑性介质, 被加以考虑, 并且给出了相应情况下的各种路径无关积分. 为了解释这些积分的物理含义, 通过考虑一个缺口试件的裂纹传播, 证明热-力耦合系统中的动力裂纹扩展力就等于这一路径无关积分. 因此, 就可利用这些积分来构造热-力耦合系统断裂动力学的非线性断裂准则.

一、前 言

在断裂静力学中人们熟知 J 积分的重要性, 它是构造非线性断裂准则的基础. J. R. Rice 提出的 J 积分⁽¹⁾为

$$J = \int_{\Gamma} W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \quad (1.1)$$

其中: W : 应变能密度, $\int \sigma_{ij} de_{ij}$, T_i : 面力 (单位面积的), u_i : 位移, Γ : 环绕裂纹顶端的积分路径.

关键之点是对任何环绕裂纹顶端的路径 Γ , J 是路径无关的.

有些时候, 在一些工程问题中热-力间的耦合是重要的, 而不能加以忽略, 在考虑核反应堆工程破坏事变中就会遇到这样的情况, 还有在诸如水力断裂开发地下资源深源地震问题等研究中, 也会遇到这种非线性介质的热-力耦合系统中的裂纹传播问题. 在这里动力效应、裂纹传播及热-力耦合效应都必须在分析中加以考虑^(2,3,4).

本文讨论非线性热-力耦合系统中的裂纹动力传播问题, 考虑的非线性介质有非线性弹性和弹塑性介质, 并作出了相应的路径无关积分. 通过对缺口试件的裂纹动力传播, 证明了这些路径无关积分就等于这种热-力耦合系统中的动力裂纹扩展力. 这样, 我们就可象利用 J 积分来形成静力非线性断裂准则一样, 利用这里给出的路径无关积分来构造非线性介质热-力耦合系统中的动力断裂准则. 最后, 还可注意, 这里第一次给出这种热-力耦合系统的动

* 本文完成于作者对美国德克萨斯大学计算力学研究所的访问期间, 并在1982年秋应邀在日本东京大学、东京工业大学、名古屋大学、国立横滨大学、日本宇航学会等讲学中加以报导.

力裂纹扩展力的显式。

二、非线性连续介质热-力耦合系统的基本方程

考虑一个同时受热和力作用的非线性固体。这种固体可以是非线性弹性的或弹塑性的。假设这一固体在所有外力卸去后处于温度 T_0 。(均匀的)时具有无应力状态。取笛卡尔直角坐标系 x_i 。设 u_i , e_{ij} , σ_{ij} , ρ , T , v_i , h_i 分别是位移、应变张量、应力张量、密度、温度、速度和热流向量。于是,对于非线性介质的热-力耦合系统,有下面的控制方程:

应变-位移方程:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

本构方程:

$$\sigma_{ij} = f'_{ij}(e_{kl}, T) = f_{ij}(e_{kl}) - \beta_{ij}\theta \quad (2.2)$$

其中:

$$\theta = T - T_0, \quad \beta_{ij}, \text{热模数。} \quad (2.3)$$

连续方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.4)$$

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (2.5)$$

运动方程:

$$\rho \dot{v}_i = \sigma_{ij,j} + x_i \quad (2.6)$$

Fourier 定律:

$$h_i = -k_{ij}T_{,j} \quad (k_{ij}, \text{热传导系数}) \quad (2.7)$$

能量守恒方程:

$$-h_{i,i} = \rho c_v \dot{\theta} + T \beta_{ij} \dot{e}_{ij} \quad (c_v; \text{常应变下单位质量的热容}) \quad (2.8)$$

这里记号“ $\dot{\cdot}$ ”表示 $\frac{\partial}{\partial t}$, “ $,j$ ”表示对于 x_j 的偏导数。

这样,就有着关于23个未知量 u_i , v_i , σ_{ij} , e_{ij} , ρ , T , h_i 的23个方程。

假若引进比例于熵位移的向量 H_i , 使得

$$h_i = \frac{\partial H_i}{\partial t} \quad (2.9)$$

且

$$H_i = 0, \text{ 当 } \theta = e_{ij} = 0 \text{ 时} \quad (2.10)$$

则(2.8)可以积分给出

$$-H_{i,i} = \rho c_v \theta + T_0 \beta_{ij} e_{ij} \quad (2.11)$$

这里我们设 $\theta = T - T_0 \ll T_0$, 因此 $T \approx T_0$ 近似地成立。

在往后的讨论中,我们需要下面的有关热和力的初始条件和边界条件:

边界条件:

$$u_i = \bar{u}_i, \text{ 在边界 } S_u \text{ 上} \quad (2.12)$$

$$\dot{T}_i = \bar{T}_i, \text{ 在边界 } S_\sigma \text{ 上} \quad (2.13)$$

$$\theta = \bar{\theta}, \quad \text{在边界 } S_1 \text{ 上} \tag{2.14}$$

$$h_n = \bar{h}_n, \quad \text{在边界 } S - S_1 \text{ 上} \tag{2.15}$$

$$\bar{T}_i = 0, \quad \theta = 0, \quad \text{在裂纹表面上} \tag{2.16}$$

初始条件:

$$u_i = g_i(x_j), \quad t = 0, \quad \text{在 } V \text{ 中} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = k_i(x_j), \quad t = 0, \quad \text{在 } V \text{ 中} \tag{2.18}$$

$$\theta = \theta_0(x_j), \quad t = 0, \quad \text{在 } V \text{ 中} \tag{2.19}$$

这里, \bar{T}_i 是面力, $h_n = h_i v_i$ 是热流向量 h_i 沿边界外法向的分量. $u_i, \bar{T}_i, \theta, \bar{h}_n$ 是边界上的给定值; g_i, k_i, θ_0 是物体体积 V 中的给定值.

三、非线性弹性介质中的裂纹传播

对于非线性弹性介质中的裂纹传播, 我们可以提出下面的

定理1. 积分

$$\begin{aligned} Y_1 = & \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\Gamma} (W + Q - X_i u_i - K) dy - (T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right. \\ & \left. - \frac{\theta v_i}{T_0} \frac{\partial H_1}{\partial x}) ds \right) dt + \int_V \rho v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \Big|_{t_0}^{t_1} \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_V \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial H_1}{\partial x} dV dt \end{aligned} \tag{3.1}$$

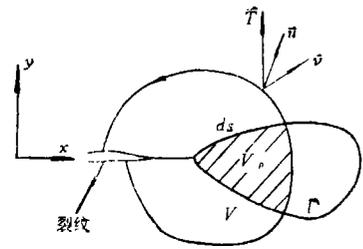


图1 非线性介质中的裂纹

对任何环绕裂纹顶端的路径 Γ 和时间 $t_1 > t_0 \geq 0$ 是路径无关的, 其中

$$W = \int f_{ij} de_{ij} \tag{3.2}$$

是均匀温度 T_0 下的应变能密度,

$$Q = \int \frac{\rho c v \theta}{T_0} d\theta \tag{3.3}$$

是可转换为有用功之热,

$$K = \frac{1}{2} \rho v_i v_i \tag{3.4}$$

是动能密度,

$$\lambda_{ij} = (k_{ij})^{-1} \tag{3.5}$$

是矩阵 (k_{ij}) 之逆. 区域 V 是由 Γ 及裂纹表面所包围的面积(图1). 在这里, 我们假设体力 X_i 是与坐标 x 无关的.

证明. 首次, 取一个内部不含有裂纹顶端的路径 C . 我们有

$$\begin{aligned} \int_C W dy &= \int_C W v_x ds = \int_V \frac{\partial W}{\partial x} dV = \int_V f_{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial x} dV \\ &= \int_V (\sigma_{ij} + \beta_{ij} \theta) \frac{\partial}{\partial x} u_{i,j} dV = \int_V \left[(\sigma_{ij} + \beta_{ij} \theta) \frac{\partial u_i}{\partial x} \right]_{,j} dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\int_V (\sigma_{ij} + \beta_{ij}\theta)_{,j} \frac{\partial u_i}{\partial x} dV = \int_O v_j (\sigma_{ij} + \beta_{ij}\theta) \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \\
& -\int_V (\sigma_{ij,j} + \beta_{ij}\theta_{,j}) \frac{\partial u_i}{\partial x} dV = \int_O T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds + \int_V \left(X_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \\
& + \int_O \beta_{ij}\theta v_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds - \int_V \beta_{ij}\theta_{,j} \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \tag{3.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_O Q dy &= \int_C Q v_x ds = \int_V \frac{\partial Q}{\partial x} dV = \int_V \frac{\rho c_V}{T_0} \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} dV \\
&= -\int_V \frac{\theta}{T_0} \left(\frac{\partial H_{i,j}}{\partial x} + T_0 \beta_{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial x} \right) dV \tag{3.7}
\end{aligned}$$

但是,

$$\int_V \frac{\theta}{T_0} \left(\frac{\partial H_{i,j}}{\partial x} \right)_{,i} dV = \frac{1}{T_0} \int_O \theta v_i \frac{\partial H_{i,j}}{\partial x} ds - \frac{1}{T_0} \int_V \theta_{,i} \frac{\partial H_{i,j}}{\partial x} dV \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\int_V \beta_{ij}\theta \frac{\partial e_{ij}}{\partial x} dV &= \int_V \beta_{ij}\theta \frac{\partial}{\partial x} u_{i,j} dV \\
&= \int_O \beta_{ij}\theta v_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds - \int_V \beta_{ij}\theta_{,j} \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \tag{3.9}
\end{aligned}$$

从(3.6)到(3.9), 得

$$\begin{aligned}
\int_O (W + Q - X_i u_i) dy - \left(T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_{i,j}}{\partial x} \right) ds \\
= -\int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \frac{\partial u_i}{\partial x} dV + \int_V \frac{\theta_{,i}}{T_0} \frac{\partial H_{i,j}}{\partial x} dV \tag{3.10}
\end{aligned}$$

注意到 $\theta_{,j} = -\lambda_{ij} \dot{H}_j$, 从(3.10)得

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \left(\int_O (W + Q - X_i u_i) dy - \left(T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_{i,j}}{\partial x} \right) ds \right) dt \\
+ \int_{t_0}^{t_1} \int_V \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial H_{i,j}}{\partial x} dV dt = -\int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \frac{\partial u_i}{\partial x} dV dt \tag{3.11}
\end{aligned}$$

对于最后一个积分, 我们有

$$\begin{aligned}
L &= \int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \frac{\partial u_i}{\partial x} dV dt = \int_V \int_{t_0}^{t_1} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \frac{\partial u_i}{\partial x} dt dV \\
&= \int_V \rho v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_V dV \left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial u_i}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dt \right) \tag{3.12}
\end{aligned}$$

由连续方程, 知道(3.12)中项 $\frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x}$ 比其前一项具有小的量级, 因而可以忽略. 因此, 得

$$\begin{aligned}
L &= \int_V \rho v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \int_V \frac{\partial}{\partial x} K dV dt \\
&= \int_V \rho v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \int_O K dy dt \tag{3.13}
\end{aligned}$$

将(3.13)代入(3.11), 最终得到下面的式子:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\sigma} (W+Q-K-X_i u_i) dy - \left(T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_i}{\partial x} \right) ds \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_V \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial x} dV dt + \int_V \rho v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (3.14)$$

假若我们有两条不同的路径 Γ_1, Γ_2 , 如图2所示, 则取 $C = \Gamma_1 + \overline{AC} + \Gamma_2^- + \overline{DB}$, 这里记号“ $-$ ”表示原路径之逆向. 由(3.14), 我们得

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\sigma} (W+Q-K-X_i u_i) dy - \left(T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_i}{\partial x} \right) ds \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_0} \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial x} dV dt + \int_V \rho v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$$

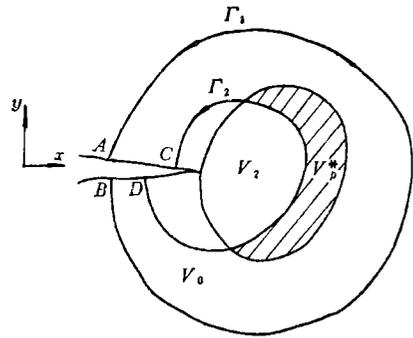


图 2

这里 V_0 是 Γ_1, Γ_2 之间的区域. 由于在 $\overline{AC}, \overline{DB}$ 上 $dy=0, T_i=\theta=0$, 又 $V_1=V_2+V_0$. 从上面的方程可得:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\Gamma_1} (W+Q-K-X_i u_i) dy - \left(T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_i}{\partial x} \right) ds \right) dt \\ & + \int_{V_1} \rho v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_1} \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial x} dV dt \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\Gamma_2} (W+Q-K-X_i u_i) dy - \left(T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_i}{\partial x} \right) ds \right) dt \\ & + \int_{V_2} \rho v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_2} \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial x} dV dt \end{aligned} \quad (3.15)$$

Q. E. D.

要是考虑运动的路径 $\Gamma(t)$, 我们可得以下的定理.

定理2. 积分

$$\begin{aligned} Y_2 = & \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\Gamma(t)} (W+Q + \overline{\rho a_i - X_i} \cdot u_i) dy - \left(T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_i}{\partial x} \right) ds \right) dt \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \rho u_i \frac{\partial a_i}{\partial x} dV dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial x} dV dt \end{aligned} \quad (3.16)$$

或者简单地

$$\begin{aligned} Y_3 = & \int_{\Gamma(t)} (W+Q + \overline{\rho a_i - X_i} \cdot u_i) dy - \left(T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_i}{\partial x} \right) ds \\ & - \int_{V(t)} \rho u_i \frac{\partial a_i}{\partial x} dV + \int_{V(t)} \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial x} dV \end{aligned} \quad (3.17)$$

对任何环绕裂纹顶端的 $\Gamma(t)$ 和时间 $t_1 > t_0 \geq 0$ 来说是路径无关的.

定理2的证明容易从下面的等式得到:

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \frac{\partial u_i}{\partial x} dV = \int_C \rho a_i u_i dy - \int_V \rho u_i \frac{\partial a_i}{\partial x} dV \quad (3.18)$$

得出。

四、弹塑性介质中的裂纹传播

引入积分

$$\begin{aligned} Y_4 = & \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_C (W_e + Q - K - X_i u_i) dy - \left(T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_i}{\partial x} \right) ds \right) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_p} (\sigma_{ij} + \beta_{ij} \theta) \frac{\partial}{\partial x} e_{ij}^p dV dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_V \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial x} dV dt \\ & + \int_V \rho v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \Big|_{t_0}^{t_1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

这里 W_e 是弹性应变能密度,

$$W_e = \int f_{ij} de_{ij}^e \quad (4.2)$$

V_p 是 Γ 内的塑性区 (图1), e_{ij}^p 是塑性应变张量。

对这里的情况, 有下面的

定理3. 在弹塑性介质中的裂纹传播情况下, 积分 Y_4 对任何环绕裂纹顶端的路径 Γ 和 $t_1 > t_0 \geq 0$ 是路径无关的。

证明. 用得到(3.6)的同样方法, 我们可得

$$\begin{aligned} \int_C W_e dy &= \int_V f_{ij} \frac{\partial}{\partial x} e_{ij}^e dV = \int_V f_{ij} \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial x} - \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial x} \right) dV \\ &= \int_C T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds + \int_V (X_i - \rho a_i) \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \\ &\quad + \int_C \beta_{ij} \theta v_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds - \int_V \beta_{ij} \theta_{,j} \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \\ &\quad - \int_{V_p} (\sigma_{ij} + \beta_{ij} \theta) \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial x} dV \end{aligned} \quad (4.3)$$

从(4.3), (3.7, 8, 9, 13)我们容易证明: 对任何闭路 C (不包含裂纹顶端在内), 存在着以下的式子:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_C (W_e + Q - K - X_i u_i) dy - \left(T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_i}{\partial x} \right) ds \right) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_p^*} (\sigma_{ij} + \beta_{ij} \theta) \frac{\partial}{\partial x} e_{ij}^p dV dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_V \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial x} dV dt \\ & + \int_V \rho v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

对于环绕裂纹顶端的任意二个路径 Γ_1, Γ_2 (图2), 可取闭路 $C = \Gamma_1 + \overline{AC} + \Gamma_2^{-1} + \overline{DB}$, 并注意在 $\overline{AC}, \overline{DB}$ 上, $dy=0, T_i=\theta=0, V_1=V_0+V_2, V_1^{-1}=V_2^{-1}+V_0^{-1}$, 于是可得

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\Gamma_1} (W_e + Q - K - X_i u_i) dy - \left(T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_i}{\partial x} \right) ds \right) dt \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_1^2} (\sigma_{ij} + \beta_{ij} \theta) \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial x} dV dt \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_1} \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial x} dV dt + \int_{V_1} \rho v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \Big|_{t_0}^{t_1} \\
& = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\Gamma_2} (W_e + Q - K - X_i u_i) dy - \left(T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_i}{\partial x} \right) ds \right) dt \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_2^2} (\sigma_{ij} + \beta_{ij} \theta) \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial x} dV dt \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_2} \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial x} dV dt + \int_{V_2} \rho v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dV \Big|_{t_0}^{t_1}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Q. E. D.

对于运动的路径，可得下面的

定理4. 积分

$$\begin{aligned}
Y_6 = & \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\Gamma(t)} (W_e + Q + \overline{\rho a_i - X_i} \cdot u_i) dy - \left(T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_i}{\partial x} \right) ds \right) dt \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e(t)} (\sigma_{ij} + \beta_{ij} \theta) \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial x} dV dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial x} dV dt \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \rho u_i \frac{\partial a_i}{\partial x} dV dt
\end{aligned} \tag{4.6}$$

或简单地

$$\begin{aligned}
Y_6 = & \int_{\Gamma(t)} (W_e + Q + \overline{\rho a_i - X_i} \cdot u_i) dy - \left(T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_i}{\partial x} \right) ds \\
& + \int_{V_e(t)} (\sigma_{ij} + \beta_{ij} \theta) \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial x} dV + \int_{V(t)} \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial x} dV \\
& - \int_{V(t)} \rho u_i \frac{\partial a_i}{\partial x} dV
\end{aligned} \tag{4.7}$$

对任何环绕裂纹顶端的路径 $\Gamma(t)$ 和 $t_1 > t > t_0 \geq 0$ 来说是路径无关的。

定理5. 积分

$$\begin{aligned}
Y_7 = & \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\Gamma(t)} (W_e + Q_e + \overline{\rho a_i - X_i} \cdot u_i^e) dy - \left(T_i \frac{\partial u_i^e}{\partial x} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_i}{\partial x} \right) ds \right) dt \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho u_i^e \frac{\partial a_i}{\partial x} dV dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_V \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial x} dV dt
\end{aligned} \tag{4.8}$$

或简单地

$$Y_8 = \int_{\Gamma(t)} (W_e + Q_e + \overline{\rho a_i - X_i} \cdot u_i^e) dy - \left(T_i \frac{\partial u_i^e}{\partial x} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_i}{\partial x} \right) ds$$

$$-\int_V \rho u_i^e \frac{\partial a_i}{\partial x} dV + \int_V \frac{1}{T_0} \lambda_{i,j} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial x} dV \quad (4.9)$$

对任何环绕裂纹顶端的路径和 $t_1 > t > t_0 \geq 0$ 是路径无关的。此地

$$\left. \begin{aligned} Q_e &= \int \frac{\rho c v \theta d\theta_e}{T_0} \\ \theta_e &= -\frac{1}{\rho c v} (H_{i,t} + T_0 \beta_{i,j} e_{i,j}^e) \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

对于定常裂纹传播，选取一个与裂纹顶端一道以沿 x 轴的速度 c 运动的坐标系 $\bar{t} = t, \bar{x}, \bar{y}$ ，则可证明下面的

定理6. 积分

$$\begin{aligned} Y_o = Y_e &= \int_{\bar{F}} \left(W_o + Q + \overline{c^2 \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial \bar{x}^2}} - X_i \cdot u_i \right) d\bar{y} \\ &\quad - \left(T_i \frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_i}{\partial \bar{x}} \right) d\bar{s} + \int_V \frac{1}{T_0} \lambda_{i,j} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial \bar{x}} d\bar{V} \\ &\quad - \int_V c^2 \rho u_i \frac{\partial^3 u_i}{\partial \bar{x}^3} d\bar{V} \end{aligned} \quad (4.11)$$

或

$$\begin{aligned} Y_{10} = Y_e &= \int_{\bar{F}} \left(W_o + Q_o + \overline{c^2 \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial \bar{x}^2}} - X_i \cdot u_i^e \right) d\bar{y} \\ &\quad - \left(T_i \frac{\partial u_i^e}{\partial \bar{x}} - \frac{\theta}{T_0} v_i \frac{\partial H_i}{\partial \bar{x}} \right) d\bar{s} - \int_V \rho a_i \frac{\partial u_i^e}{\partial \bar{x}} d\bar{V} \\ &\quad + \int_V \frac{1}{T_0} \lambda_{i,j} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial \bar{x}} d\bar{V} \end{aligned} \quad (4.12)$$

是路径无关的，这里

$$\dot{H}_j = \frac{\partial H_j}{\partial \bar{t}} - c \frac{\partial H_j}{\partial \bar{x}} \quad (4.13)$$

五、Y 积分与动力裂纹扩展力

考虑一个缺口试件，如图3所示。当缺口宽度趋于零时，便得到一个裂纹体。假设在边界 S_T 上面力 T_i 给定，在边界 $S_1 \subset S$ (区域边界) 上 θ 给定。设裂纹扩展一个距离 Δa 。考虑在这一扩展中的能量关系。

边界面力作的功为

$$\Delta A_T = \int_{S_T} T_i \Delta u_i dS$$

这里 Δu_i 是裂纹扩展中的位移增量。体力作的功由两部分组成：

a) 阴影区 ΔV 在裂纹扩展中所释放的功：

$$\Delta A_{B_1} = - \int_{\Delta V} (X_i - \rho a_i) u_i^e dV$$

b) 在区域 $V - \Delta V$ 中的功, 它等于

$$\Delta A_{B_2} = \int_{V - \Delta V} (X_i - \rho a_i) \Delta u_i dV$$

流入体内的可用热流为:

$$\Delta A_B = - \int_{S_1} \frac{\theta}{T_0} \Delta H_i \nu_i dS$$

内力作的功也由两部分组成:

a) 在区域 ΔV 上的功, 它等于裂纹扩展中释放的弹性应变能

$$\Delta A_1 = - \int_{\Delta V} \left(\int \sigma_{ij} de_{ij}^e \right) dV$$

b) 在区域 $V - \Delta V$ 上的功:

$$\Delta A_2 = \int_{V - \Delta V} \sigma_{ij} \Delta e_{ij} dV$$

物体吸收转化为有用功的热包含两部分:

$$a) \quad \Delta A_3 = - \int_V \frac{\theta}{T_0} \Delta H_{i, \cdot} dV$$

$$b) \quad \Delta A_4 = \int_{\Delta V} \left(\int \frac{\theta}{T_0} dH_{i, \cdot} \right) dV$$

内耗散能为:

$$\Delta A_5 = \int_{V - \Delta V} \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \Delta H_i dV$$

因此, 裂纹在热-力耦合系统中的动力裂纹扩展力为下式所决定:

$$\begin{aligned} \tilde{G} \Delta a = & \Delta A_T + \Delta A_{B_1} + \Delta A_{B_2} + \Delta A_B \\ & - (\Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 + \Delta A_4 + \Delta A_5) \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} \tilde{G} = & \int_S T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} dS + \int_V (X_i - \rho a_i) \frac{\partial u_i}{\partial a} dV - \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial a} dV \\ & - \int_{S_1} \frac{\theta}{T_0} \nu_i \frac{\partial H_i}{\partial a} dS - \int_V \frac{1}{T_0} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial H_i}{\partial a} dV + \int_V \frac{\theta}{T_0} \frac{\partial H_{i, \cdot}}{\partial a} dV \\ & + \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\Delta V} \left(\int \sigma_{ij} de_{ij}^e \right) dV - \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\Delta V} (X_i - \rho a_i) u_i^e dV \\ & - \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\Delta V} \left(\int \frac{\theta}{T_0} dH_{i, \cdot} \right) dV \\ = & \int_F (W_e + Q_e + \overline{\rho a_i - X_i} \cdot u_i^e) dy \end{aligned}$$

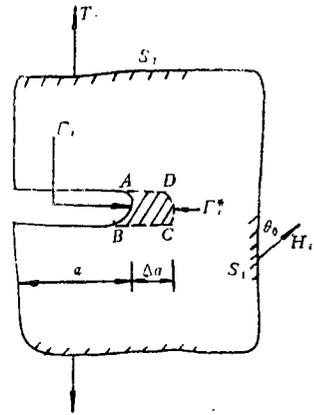


图3 裂纹扩展力

从(4.9), 可得到缺口试件的

$$\tilde{Y}_s = \int_r (W_e + Q_e + \overline{\rho a_t - \bar{X}_t} \cdot u_t^e) dy \quad (5.1)$$

所以, 我们有

$$\tilde{Y}_s = \tilde{G}$$

命缺口宽度趋于零, 得

$$G = Y_s \quad (5.2)$$

这样, 我们就证明了积分 Y_s 就是动力裂纹扩展力, 因而有可能利用这里的 Y 积分来构造非线性介质热-力耦合系统中裂纹动力传播时的断裂准则。

值得注意的是, 这里的研究首次给出了耦合的热-力系统中动力裂纹扩展力的显式。

参 考 文 献

- [1] Rice, J. R., *J. A. M.* (1968).
- [2] Ouyang, C., *TICOM Report*, UT, Austin, (1981).
- [3] Ouyang, C., *Int'l J. Engng. Sci.*, 2 (1980).
- [4] Ouyang, C., *Appl. Math and Mech.*, 3 (1982).

On Crack Propagation in a Coupled Thermo-Mechanical System of Nonlinear Media

Ouyang Chang

(Dept. of Mathematics, Fudan University, Shanghai)

Abstract

In some engineering problems, thermo-mechanical coupling is important and should not be ignored. This paper deals with the crack propagation problem in a coupled thermo-mechanical system of nonlinear media. Various nonlinear solids, including nonlinear elastic and elastic-plastic cases, have been considered and related path-independent integrals are given. To explain the physical meaning of these integrals, a notched specimen has been considered, and the dynamical crack extension force in this coupled thermo-mechanical system is shown to equal this integral. Thus, we could consider such integrals as some nonlinear fracture criteria for coupled thermo-mechanical fracture dynamics.