

关于亚音速绕流问题的强奇性基本解法*

叶 敬 棠

(复旦大学, 1981年12月2日收到)

摘 要

本文对求解亚音速流的偶极子基本解法作了新的处理, 导出了一个关于求解偶极子强度的强奇性积分方程, 给出了强奇性积分有效主值的定义及计算公式. 由此可以导出多种整体连续分布的数值基本解法. 适用于亚音速气动力计算.

一、引 言

对亚音速势流绕流物体, 扰动势 φ 所满足的线性化方程为

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

其中 $\beta^2 = 1 - M^2$, M 为马赫数, 物面上的边界条件为

$$(\vec{V}_\infty + \vec{V}^* + \nabla\varphi) \cdot \vec{n}|_s = 0 \quad (1.2)$$

其中 \vec{n} 为物面的法向, \vec{V}_∞ 为来流速度, \vec{V}^* 为体现干扰效应的速度.

随着计算机的发展, 目前机翼或组合体的亚音速气动力计算多数采用基本解迭加法, 所使用的基本解有源汇、偶极子、马蹄涡和涡环等几种, 迭加基本解的办法有离散分布的有限基本解法^{[1][2]}, 也有局部连续分布或整体连续分布的基本解迭加法^{[3][4]}. 采用离散分布法时, 一般讲来, 计算公式比较简单, 但对分块和控制点的选择要进行凑试, 或者要求加密分块从而增大了基本线性代数方程组的阶数, 增加了对计算机存储量和计算速度的要求; 采用连续分布法时, 计算公式虽然比离散法复杂, 但可以减少对分块和控制点选择的限制和凑试, 分块可以稀一些, 从而降低了基本方程组的阶数, 降低了对计算机存储量的要求. 因此需要研究有效的连续分布法.

为此, 本文对偶极子解法作了新的处理, 提出一种强奇性基本解法, 它便于导出多种连续分布的数值算法. 其计算结果稳定, 对分块和控制点的任意选择不敏感. 适用于薄翼的带侧滑飞行的计算, 也可应用于厚翼和组合体的压力分布计算.

二、基本积分方程和发散积分的收敛性定义

设中弧面的面积元为 dS_P , 其法向为 $\vec{n}_P(n_\xi, n_\eta, n_\zeta)$, dS_P 上偶极子的密度为 m , 则 dS_P 上

* 叶开沅推荐.

的偶极子在点 $M(x, y, z)$ 产生的速度势为

$$\delta\varphi(M) = \frac{m}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{l}^\circ} \left(-\frac{1}{r_\beta} \right) dS_P \quad (2.1)$$

其中 $r_\beta^2 = (x-\xi)^2 + \beta^2[(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]$, 点 $P(\xi, \eta, \zeta)$ 为 dS_P 上的点, \bar{l}° 是由 $K\bar{l}^\circ = (\beta^2\eta_\xi, \eta_\eta, \eta_\zeta)$ 规定的偶极子方向. 如所周知, 对于不在面元上的点, 这样的偶极子将和无限小涡环相当. 涡环的环量

$$\Gamma = \frac{m}{K} \quad (K^2 = \beta^4\eta_\xi^2 + \eta_\eta^2 + \eta_\zeta^2) \quad (2.2)$$

涡环的涡线和 dS_P 的周线重合. (2.1) 式可改写为

$$\delta\varphi(M) = -\frac{m(P)}{4\pi} \beta^2 \frac{\bar{n}_P \cdot \bar{r}_{PM}}{r_\beta^3} dS_P \quad (2.1)'$$

式中的 $\bar{r}_{PM} = (x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$. 如果在正攻角时, 希望 $\Gamma(P)$ 取正值, 则应取 \bar{n}_P 的方向向下.

将 (2.1)' 式沿整个中弧面 S 及尾涡面 Σ 积分, 即得基本方程 (1.1) 的解

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S+\Sigma} \frac{m(P) \bar{n}_P \cdot \bar{r}_{PM}}{r_\beta^3} dS \quad (2.3)$$

这是偏微分方程理论中已知的结果. 考虑到边界条件 (1.2) 中只规定了 φ 的导数, 而未规定 φ 本身. 为此, 对 (2.3) 求导, 得

$$\bar{V}_M = - \iint_{S+\Sigma} \frac{m(P)}{4\pi} \beta^2 \left\{ \frac{\bar{n}_P}{r_\beta^3} - 3 \frac{\bar{n}_P \cdot \bar{r}_{PM}}{r_\beta^5} \bar{r}_{PM} \right\} dS_P \quad (2.4)$$

式中 $\bar{r}_{PM} = (x-\xi, \beta^2(y-\eta), \beta^2(z-\zeta))$. (2.4) 式目前只适用于 $S+\Sigma$ 外的点. 如果能将它推广到积分面 $S+\Sigma$ 上的点去, 则可以代入 (1.2) 式而得基本积分方程

$$\bar{n}_M \cdot (\bar{V}_\infty + \bar{V}_M^*) = -\bar{n}_M \cdot \bar{V}_M = \frac{\beta^2}{4\pi} \iint_{S+\Sigma} m(P) \left[\frac{\bar{n}_P \cdot \bar{n}_M}{r_\beta^3} - 3 \frac{(\bar{n}_P \cdot \bar{r}_{PM}) \cdot (\bar{n}_M \cdot \bar{r}_{PM})}{r_\beta^5} \right] dS_P \quad (2.5)$$

式中的 \bar{V}_M^* 作为体现机身、发房或其他部件对翼面气流影响的速度, 在第一步近似处理中, 可以从已知的公式算出. 如果取消 \bar{V}_M^* 则 (2.5) 右边的积分区域 S 应扩大到包括所有部件的表面. \bar{n}_M 为边界面在控制点 M 处的法向.

对于积分区域上的 M 点, (2.4) 和 (2.5) 中的积分, 特别是第一积分为强发散积分, 必须规定其有效主值, 方能实现推广. 考虑到物面上点的 \bar{V}_M 应是物面外点的 \bar{V} 的极限, 这极限是实际存在的. 因此, 强发散积分应有确定的有效主值. 再从另一方面考虑, 面分布旋涡应看作是体分布旋涡的一种理想化近似. 由理想化近似带来的强奇性, 应该有相应的收敛性规定, 因此可以把一维情况下的 Hadamard 主值的定义推广到目前二维曲面上的发散积分上来.

定义: 强发散积分的有效主值为

$$\iint_{S-S_\epsilon(M)} \frac{f(P)}{r_{PM}^3} dS_P = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\iint_{S-S_\epsilon(M)} \frac{f(P)}{r_{PM}^3} dS_P - \frac{Af(M)}{\epsilon} \right) \quad (2.6)$$

式中的

$$A = 2\pi - \varepsilon \iint_{S_\varepsilon(M) - \delta_\varepsilon} \frac{dS_P}{r_{PM}^3} \quad (2.7)$$

$S_\varepsilon(M)$ 为 M 点的小邻域, δ_ε 是 $S_\varepsilon(M)$ 内以 M 点为圆心, ε 为半径的圆形邻域 (即它在 M 点的切平面上的投影是半径为 ε 的圆域)。系数 A 和邻域序列 S_ε 的形状有关。例如, 在平面积分的情况, 当取 $S_\varepsilon(M)$ 为以 M 点为中心、边长为 2ε 的正方形时, $A = 4\sqrt{2}$ 。

关于定义 (2.6) 的合理性可以论述如下:

首先要把曲面上的积分转化为相应切平面上的积分, 以便于估计 (2.6) 式右边是否有极限。设曲面 S_δ 的线度为 δ , 曲面 S_δ 内各点的主曲率绝对值的平均大小为 c , 函数 $f(P)$ 在曲面内的平均变化率为 K , 又设 S_δ^* , S_δ^* 为曲面片 S_δ , S_δ 在 M 点的切平面上的投影区域, 则曲面 S_δ 上的积分表示式和投影区域 S_δ^* 上的积分之间有关系式

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\iint_{S_\delta - S_\varepsilon} \frac{f(P)}{r_{PM}^3} dS_P - \frac{Af(M)}{\varepsilon} \right] \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\iint_{S_\delta^* - S_\varepsilon^*} \frac{f(P)}{r_{PM}^3} dS_P^* - \frac{Af(M)}{\varepsilon} \right] + O(cK\delta + c^2f\delta) \end{aligned}$$

由此知, S_δ 上奇性积分有效主值的计算就归结为相应切平面上投影区域 S_δ^* 上有效主值的计算。而对于平面区域 S_δ^* 上的强奇性积分, 由 (2.6) 式定义的极限易知是存在的。因此按 (2.6) 来规定有效主值是有意义的。同时, 从上式也可以知道, 当曲面较平坦时, 可以允许对较大的曲面块 (δ 较大) 进行上述切平面积分替代。而对较弯曲的曲面 (c 非小量), 则只能对小块的曲面片进行平面积分替代。

现在回到 (2.4) 和 (2.5) 式, 研究从物面外向物面趋近时的极限值与按 (2.6) 计算的有效主值之间的关系, 以 (2.4) 式为例, 首先将曲面上的积分转化到切平面上, 在切平面上建立以切点 M_0 为原点的局部坐标系, 它以物面在 M_0 点的法向为 z 轴, 而且不妨设物面外任意一点 M 的诱导速度 \vec{V}_M 仍具有 (2.4) 的形式。因此, 包含点 M_0 的面积元 ΔS 上的偶极子对 z 轴上的点 $M(0, 0, z)$ 的诱导速度为

$$V_x \approx 0, \quad V_y \approx 0$$

$$V_z = -\frac{m\beta^2}{4\pi} \iint_{\Delta S} \left[\frac{1}{(\xi^2 + \beta^2\eta^2 + \beta^2z^2)^{3/2}} - 3 \frac{\beta^2z^2}{(\xi^2 + \beta^2\eta^2 + \beta^2z^2)^{5/2}} \right] d\xi d\eta \quad (2.8)$$

引进极坐标 $r = \sqrt{\xi^2 + \beta^2\eta^2}$, $\theta = \text{tg}^{-1} \frac{\beta\eta}{\xi}$

且取 ΔS 为半径等于 R 的圆, 则由 (2.8) 算得

$$V_z = -\frac{m\beta^2}{4\pi} \left[-\frac{2\pi}{(R^2 + \beta^2z^2)^{1/2}} + \frac{2\pi}{\beta z} + \beta^2 \frac{2\pi z^2}{(R^2 + \beta^2z^2)^{3/2}} - \frac{2\pi}{\beta z} \right]$$

显见, 第一积分中的发散部分 $\frac{2\pi}{\beta z}$ 正好和第二积分中的发散部分相消。因而当 $z \rightarrow 0$ 时, 即 M 点趋向 M_0 点时, 有极限值

$$V_z(M_0) \approx \frac{2\pi}{R} \cdot \frac{m\beta^2}{4\pi} = \frac{m\beta^2}{2R}$$

由此可见, 对于物面上的点 M_0 , 完全可以规定它的有效值。即按上述极限步骤计算之值。

但是实际上,这一极限值的计算,可以不必通过极限步骤,只要对(2.4)、(2.5)中的发散积分另作收敛性规定就可以了.因为当我们用(2.4)、(2.5)直接计算物面上 M_0 的诱导速度值时,只要 M_0 点邻域内的面元充分平坦,其上的第二积分形式上可取为零,因为 $\vec{n}_P \cdot \vec{r}_{PM} \approx 0$.因此必须在计算第一积分时扣去相应的发散部分,这就是有效主值定义式(2.6)的由来.

三、两个特例

通过下面两个典型例子可以检验此定义的合理性及其和通常一维情况下Hadamard主值的关系.

例1. 对于不可压缩流,在 xy 平面上的矩形区域(图1)内布置等密的 z 向偶极子,它应该正好和周线上布置的涡环相当.这一相当性,对 xy 平面外的点是早已知道的,现对 xy 平面上的点来验证这一相当性.事实上,这时,根据(2.4)式计算 V_z 时,其第二积分为零,而第一积分,按有效主值的定义计算结果为

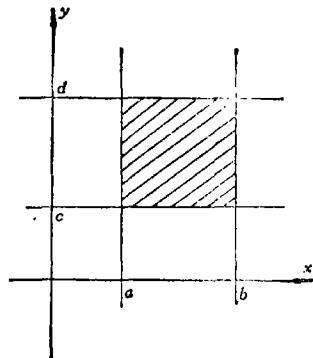


图 1

$$V_z = -\frac{m}{4\pi} \iint \frac{d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} = -\frac{m}{4\pi} \left[-\frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-c)^2}}{(x-a)(y-c)} + \frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-d)^2}}{(x-a)(y-d)} - \frac{\sqrt{(x-b)^2 + (y-d)^2}}{(x-b)(y-d)} + \frac{\sqrt{(x-b)^2 + (y-c)^2}}{(x-b)(y-c)} \right] \quad (3.1)$$

这和环量为 m 的矩形涡环对其平面上点的诱导速度完全一致.

也可以按极限步骤来计算(2.8)式的第一积分,这时,先考虑平面外的点 (x, y, z) ,利用渐近展开式 $\operatorname{tg}^{-1} \frac{A}{z} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} A - \frac{1}{A} z + \dots$ 第一积分对 V_z 的贡献

$$\begin{aligned} V_z &= -\frac{m}{4\pi} \iint \frac{d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} \\ &= -\frac{m}{4\pi} \left\{ \frac{1}{|z|} \cdot \frac{\pi}{2} [\operatorname{sign}(b-x)\operatorname{sign}(d-y) - \operatorname{sign}(c-y)\operatorname{sign}(b-x) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sign}(a-x)\operatorname{sign}(d-y) + \operatorname{sign}(a-x)\operatorname{sign}(c-y)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{(b-x)^2 + (d-y)^2}}{(b-x)(d-y)} + \frac{\sqrt{(b-x)^2 + (c-y)^2}}{(b-x)(c-y)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{(a-x)^2 + (d-y)^2}}{(a-x)(d-y)} - \frac{\sqrt{(a-x)^2 + (c-y)^2}}{(a-x)(c-y)} + O(z) \right\} \end{aligned}$$

当 (x, y) 在积分域外时,上式中 $\frac{1}{z}$ 的系数恒为零,即积分不存在奇性部分;当 (x, y) 在积分域内时, $\frac{1}{z}$ 的系数不为零,积分有奇性,当 $z \rightarrow 0$ 时,略去此奇性部分,所得结果刚好和(3.1)式一致.

例2. 偶极子分布面为平面上(取为 xy 平面)的半带形区域,此区域沿 x 轴趋向无限远处.这时,对于 xy 平面上的 M 点(2.4)式化为

$$V_z(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_a^b \frac{d\eta}{(y-\eta)^2} \int_{x_a}^{\infty} \frac{\partial m}{\partial \xi} \left(1 - \frac{\xi-x}{r_\beta}\right) d\xi \quad (3.2)$$

式中 x_a 为半带形区域的前边线的 x 坐标; a, b 为半带形区域左、右边线的位置. (3.2) 就是亚音速流中基元马蹄涡按面分布计算的公式. 式中的

$$r_\beta = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

由此知, 基元马蹄涡面分布法就是本文的强奇性基本解法的特例.

顺便指出, 文献[4]将(3.2)式写成好像对 xy 平面外的点也适用的形式, 即将其中的 r_β 写成

$$r_\beta = \sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2[(y-\eta)^2 + z^2]} \quad (3.3)$$

这是错误的. 如取(3.3)式, 则由(3.2)计算出的平面 $z=0$ 以外的点上的速度分量 v_z 并不是此偶极子面 (也可称马蹄涡面) 所诱导的速度.

(3.2) 式的积分主值通常按 Hadamard 主值计算, 即

$$\int_a^b \frac{F(\eta) d\eta}{(\eta-y)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{y-\varepsilon} \frac{F(\eta) d\eta}{(y-\eta)^2} + \int_{y+\varepsilon}^b \frac{F(\eta) d\eta}{(y-\eta)^2} - \frac{2F(y)}{\varepsilon} \right] \quad (3.4)$$

对比(2.6)和(3.4)可知, 本文的有效主值定义(2.6)就是 Hadamard 主值在二维曲面积分上的推广. 而且, 由于在此情况下(2.2)式中的 $K=1, m=\Gamma$, 所以 $\frac{\partial m}{\partial \xi} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}$. 这表明

(3.2) 式中的 $\frac{\partial m}{\partial \xi}$ 正好相当于 x 向基元马蹄涡的分布密度, 也就是环量分布密度.

基元马蹄涡面分布法只便于解决共面机翼的无侧滑绕流问题; 强奇性基本解法则还可以用来解决非共面物体的带侧滑的绕流问题. 适用范围拓宽了, 这是本文提出的方法的优点之一.

四、关于尾涡面的处理

利用积分方程(2.5)来解决绕流问题时, 要注意到(2.4)和(2.5)的积分区域还包含尾流面 (也称尾涡面), 在尾流面上也要布置偶极子, 以模拟尾流效应. 对尾流面的选取允许有一定的任意性, 但要满足下列三条件:

(一) 尾流面 Σ 要落在实际的尾涡区内, 这样方能逼近实际流动.

(二) 对于薄翼, 尾流面和机翼的中弧面在后缘相接处应有连续过渡的切平面. 这样可以避免出现奇性, 并为满足库塔条件创造一定的条件. 但升力面和尾流面在翼尖的边缘线允许有转折, 以适应布置侧滑尾涡的需要. 对于厚翼, 条件可放宽些, 在后缘处不必严格要求有连续过渡的切平面.

(三) 尾流面最后要顺流向趋向无限远处.

关于尾流面上偶极子强度的布置, 只要求满足下述条件: 在尾流面上, 强度 m 对流向参变量的变化率为零. 也即顺每一条尾涡线, 强度 m 保持不变, 且等于后缘处的 m 值, 因而能保证尾流面不承受载荷.

五、强奇性积分方程的数值解法

一般讲来, (2.5) 式可以有多种解法. 把强度 m 表示成

$$m = W_j \gamma_j \quad (5.1)$$

称 $W_j(\xi, \eta)$ 为基函数, 选取不同的基函数, 就得到不同的解法. γ_j 为待求的量, 当 W_j 关于纵向坐标 ξ 为二次函数时, γ_j 就相当于环量密度.

将积分方程(2.5)用于 n 个控制点, 其中的 m 又用(5.1)式代入, 就得到 n 个方程的线代数方程组:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} \gamma_j = q_i \quad (5.2)$$

其中 $q_i = \bar{n}_i \cdot (\bar{V}_\infty + \bar{V}^*)$.

$$c_{ij} = \frac{\beta^2}{4\pi} \iint_{S+\Sigma} W_j \left[\frac{\bar{n}_P \cdot \bar{n}_i}{r_{\beta i}^3} - \frac{3(\bar{n}_P \cdot \bar{r}_{P i})(\bar{n}_i \cdot \bar{r}_{\beta P i})}{r_{\beta i}^5} \right] dS_P \quad (5.3)$$

上式积分中的下标 i 代表第 i 个控制点. S 为物面, Σ 为尾涡面. 积分(5.3)式时, 通常要把积分区域分块, 对不包含控制点的分块, 积分就用普通的数值积分法计算; 对包含控制点的分块, 积分(5.3)要按照(2.6)的规定计算其有效主值.

当 W_j 是二阶以上的代数曲面时, 整个计算结果相当稳定. 物面分块和边界条件控制点的不同选择对计算结果的影响很小. 避免了有限基本解法中凑试分块和控制点的缺点.

参 考 文 献

- [1] Rubbert, P. E. and G. R. Saaris, A general three-dimensional potential flow method applied to V/STOL aerodynamics, SAE paper 680304(1968).
- [2] Rowan, J. C. and T. A. Burns, Aeroelastic loads predictions using finite element aerodynamics, *J. of Aircraft*, 12, 11(1975).
- [3] Hess, J. L., Calculation of potential flow about arbitrary three-dimensional lifting bodies, Phase II Final Report, Douglas Report MDC-J. 0971-01, Oct. (1970).
- [4] Shen, C. C., M. L. Lopez and N. F. Wasson, Jet-Wing lifting-surface theory using elementary vortex distributions, *J. of Aircraft*, 12, 11(1975).

On the Strong Singular Method for the Problems of Subsonic Flow Past Obstacles

Ye Jing-tang

(Department of Mathematics, Fudan University, Shanghai)

Abstract

The purpose of this paper is to give a new research for the doublet elementary solution method to solve the problem of subsonic flow. A strong singular integral equation is produced. The definition and the calculating formula of the effective principle value of strong singular integral are given. From this integral equation, some numerical methods corresponding to whole continuous distribution of elementary solution can be deduced. This method is applicable to calculate subsonic aerodynamic force.