应用数学和力学，第4卷第5期（1983年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

有一条裂纹的圆形焊接问题*

路 见 可

（武汉大学，1983年2月7日收到）

摘 要

本文讨论了在带圆孔的无限平面中焊接一个不同材料的带裂纹的近似圆板的问题．该问题化为求解解析函数边值问题然后又转化为求解沿裂纹的奇异积分方程．后者的数字解法也已给出．文末并对Ⅰ型、Ⅱ型情况得出了应力强度因子的公式以及数字结果．

一、引 言

关于具有裂纹的拼接半平面问题已有很多工作，例如[1—3]．在[4]中，我们提出了一种新的解法，这方法在很一般的条件下有效而且较简单，裂纹的数目和形状都可以是任意的，并且这些裂纹不必全部位于同一材料中．当接触面不是一条直线时此方法仍然有效．

在本文中，我们将说明即使沿两种材料的接触面存在位移差，此法仍可应用．为简单起见，我们将通过考虑以下问题来详细说明这种方法：一个挖去一个圆洞的无限平面和一个近乎圆形的另一种材料的板相焊接，板内中心处有一裂纹．不带裂纹的类似问题在[5]中作为一般焊接问题的一个特殊情形被讨论过．我们将假设裂纹是一条直线段，其中点位于板的中心．所使用的方法对于相当一般的情形，即使裂纹位于无限平面内而不是板内，仍是有效的．

我们先将问题化为一个沿裂纹和接触面的奇异积分方程，再进一步化为只沿裂纹的方程，然后描述其数值解法．对于第Ⅰ型（均匀压力）和第Ⅱ型（均匀剪力）的情况，应力强度因子的公式都已导出．在文章末尾，我们还给出了一些数值结果．

二、问 题 的 提 法

一个近乎圆形的板S^+与挖去单位圆的无限平面S^-相焊接，板内有一长为$2a(0<a<1)$、中点位于原点的直裂纹(见图)．假设材料是各向同性的，S^+和S^-的弹性常数分别为κ^+，μ^+和κ^-，μ^-．用γ表示圆$|t|=1$，以L表示裂纹$-a\leqslant x\leqslant a$．为简单起见，假定施于L的上下缘的外力的线密度是对称的，记为$X_n^\pm(x)+iY_n^\pm(x)=\pm[X_n(x)+iY_n(x)]$．令

$$f(x)=i\int_{-a}^{x}[X_n(\xi)+iY_n(\xi)]d\xi \tag{2.1}$$

* 周焕文推荐．

记γ上t处的位移差函数为$g(t)$. 我们假设$f'(x)$和$g'(t)\in H$(Hölder 条件). 我们还假设在无穷远处无外力和旋转. 我们的问题是要通过 Kolosov 函数$\varphi(z)$和$\psi(z)$求出平衡应力场，$\varphi(z)$和$\psi(z)$是$S^{\pm}$中的分区全纯函数，满足下列边界条件$(x\in L,\ t\in\gamma)$:

$$\varphi^+(x)+x\overline{\varphi^{+\prime}(x)}+\overline{\psi^+(x)}=f(x)+C \tag{2.2}$$

$$\varphi^-(x)+x\overline{\varphi^{-\prime}(x)}+\overline{\psi^-(x)}=f(x)+C \tag{2.3}$$

$$\varphi^+(t)+t\overline{\varphi^{+\prime}(t)}+\overline{\psi^+(t)}=\varphi^-(t)+t\overline{\varphi^{-\prime}(t)}+\overline{\psi^-(t)} \tag{2.4}$$

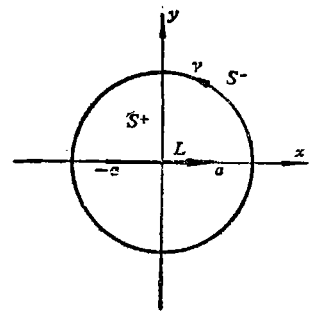

图 1

$$\alpha^+\varphi^+(t)-\beta^+[t\overline{\varphi^{+\prime}(t)}+\overline{\psi^+(t)}]=\alpha^-\varphi^-(t)-\beta^-[t\overline{\varphi^{-\prime}(t)}+\overline{\psi^-(t)}]+2g(t) \tag{2.5}$$

其中

$$\alpha^{\pm}=\kappa^{\pm}/\mu^{\pm},\quad \beta^{\pm}=1/\mu^{\pm} \tag{2.6}$$

C是一个待定的（复）常数. (2.2) 和 (2.3) 分别对应裂纹上下缘的外荷载，(2.4) 表示应力沿γ连续，而(2.5)显示沿γ的位移差. 此外，根据在无穷远处的假设，应有$\varphi(\infty)=\psi(\infty)=0$.

整个平面上的应力分布由

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x+\sigma_y=4\mathrm{Re}\Phi(z)\\&\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)]\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

给出，这里$\Phi(z)=\varphi'(z)$，$\Psi(z)=\psi'(z)$（参见[6]）. 当z从两侧趋于$x\in L$或$t\in\gamma$时，有关的函数理解为对应的极限值.

三、化成奇异积分方程

为了解边值问题(2.2)～(2.5)，如[4]那样我们设

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L+\gamma}\frac{\omega(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{3.1}$$

$$(z\bar{\in}L+\gamma)$$

$$\psi(z)\frac{-1}{2\pi i}\int_{L+\gamma}\frac{\overline{\omega(\zeta)}+\bar{\zeta}\omega'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{3.2}$$

其中$\omega(\zeta)$是$L+\gamma$上的未知函数，$\omega'(\zeta)\in H^*$.

将(3.1)和(3.2)代入(2.2)或(2.3)，由著名的 Plemelj 公式（参见[7]），我们得同一方程

$$\frac{1}{\pi i}\int_{L+\gamma}\frac{\omega(\zeta)}{\zeta-x}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\omega(\tau)d\log\frac{\bar{\tau}-x}{\tau-x}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\overline{\omega(\tau)}\,d\frac{\tau-x}{\bar{\tau}-x}$$
$$=f(x)+C\qquad(x\in L) \tag{3.3}$$

将(3.1), (3.2)代入(2.4)，可知它恒能满足. 由(2.5)，则得另一方程

$$(\alpha^++\alpha^-+\beta^++\beta^-)\,\omega(t)+\frac{\alpha^+-\alpha^--\beta^++\beta^-}{\pi i}\int_{L+\gamma}\frac{\omega(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta$$

$$+\frac{\beta^+-\beta^-}{\pi i}\left\{\int_{-a}^{a}\omega(x)\,d\log\frac{x-t}{x-\bar{t}}+\int_{-a}^{a}\overline{\omega(x)}\,d\frac{x-t}{x-\bar{t}}\right.$$

$$+\int_{\gamma}\frac{\omega(\tau)}{\tau}d\tau-t\int_{\gamma}\overline{\omega(\tau)}\,d\tau\Big\}=4g(t)\qquad(t\in\gamma)\tag{3.4}$$

(3.3)和(3.4)一起是$L+\gamma$上的一个正则型奇异积分方程．我们将寻求它在$x=\pm a$附近有界的解，按照[7]的术语，就是在h_2类中求解．容易看出，这样的解实际上在两端为零：$\omega(\pm a)=0$．如同[4]中那样，我们可以证明，满足这些条件及$\omega'(\zeta)\in H^*$的解$\omega(\zeta)$存在且唯一．

我们将进一步把(3.3)和(3.4)化为只沿L的方程．引入下面的记号：

$$I_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\omega(x)}{x-z}dx\tag{3.5}$$

$$I_2(z)=\frac{1-z^2}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{d\overline{\omega(x)}}{zx-1}\tag{3.6}$$

由于当$t\in\gamma$时$\bar{t}=1/t$，我们有

$$I_2(t)=\frac{t-\bar{t}}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{d\overline{\omega(x)}}{x-\bar{t}}=-\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\overline{\omega(x)}\,d\frac{x-t}{x-\bar{t}}\qquad(t\in\gamma)\tag{3.7}$$

因此(2.4)可写为

$$A\omega(t)+\frac{B}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau=-(\alpha^+-\alpha^-)I_1(t)$$
$$+(\beta^+-\beta^-)[I_1(\bar{t})+I_2(t)+Kt-D]+4g(t)\tag{3.8}$$

其中

$$A=\alpha^++\alpha^-+\beta^++\beta^-,\quad B=\alpha^+-\alpha^--\beta^++\beta^-\tag{3.9}$$

$$K=\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\overline{\omega(\tau)}d\tau,\quad D=\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{\omega(\tau)}{\tau}d\tau\tag{3.10}$$

暂时将$I_1(t)$和$I_2(t)$看作已知函数，(3.8)的唯一解为

$$\omega(t)=\frac{A}{A^2-B^2}\{-(\alpha^+-\alpha^-)I_1(t)+(\beta^+-\beta^-)[I_1(\bar{t})+I_2(t)$$
$$+Kt-D]+4g(t)\}-\frac{B}{A^2-B^2}\,\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{d\tau}{\tau-t}\{-(\alpha^+-\alpha^-)I_1(\tau)$$
$$+(\beta^+-\beta^-)[I_1(\bar{\tau})+I_2(\tau)+K\tau-D]+4g(\tau)\}\qquad(\tau\in\gamma)\tag{3.11}$$

但对于$t\in\gamma$，容易验证

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{I_1(\tau)}{\tau-t}d\tau=-I_1(t),\quad\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{I_1(\bar{\tau})}{\tau-t}d\tau=I_1(\bar{t})$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{I_2(\tau)}{\tau-t}d\tau=I_2(t)$$

因此(3.11)成为

$$\omega(t)=-\alpha^*I_1(t)+\beta^*[I_1(\bar{t})+I_2(t)+Kt-D]$$
$$+\frac{4}{A^2-B^2}[Ag(t)-BG_1(t)]\qquad(t\in\gamma)\tag{3.12}$$

其中已令

$$G_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{g(\tau)}{\tau-z}d\tau\qquad(z\in\gamma\text{或}\bar{\in}\gamma)\tag{3.13}$$

及

$$\alpha^*=\frac{\alpha^+-\alpha^-}{2(\alpha^-+\beta^+)},\quad \beta^*=\frac{\beta^+-\beta^-}{2(\alpha^++\beta^-)} \tag{3.14}$$

现将 (3.3) 写为

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\omega(\xi)d\xi}{\xi-x}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\omega(\tau)d\tau}{\tau-x}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\omega(\tau)d\bar\tau}{\bar\tau-x}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\tau-x}{\bar\tau-x}d\,\overline{\omega(\tau)}=f(x)+C$$

但是由于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\omega(\tau)d\bar\tau}{\bar\tau-x}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\omega(\tau)d\tau}{\tau(x\tau-1)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{x\omega(\tau)d\tau}{x\tau-1}-\frac{1}{2}D$$

我们可进一步将其写成下列形式

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\omega(\xi)d\xi}{\xi-x}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\omega(\tau)d\tau}{\tau-x}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{x\omega(\tau)d\tau}{x\tau-1}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\tau-x}{\bar\tau-x}d\overline{\omega(x)}=f(x)+C' \tag{3.15}$$

这里$C'=C+\frac{1}{2}D$也是一个待定常数.

为了消去此方程中沿γ的积分，我们注意到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{I_1(\tau)}{\tau-z}d\tau=\begin{cases}0, & \text{当}z\in S^+\\ -I_1(z), & \text{当}z\in S^-\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{I_1(\bar\tau)}{\tau-z}d\tau=\begin{cases}I_1(1/z), & \text{当}z\in S^+\\ 0, & \text{当}z\in S^-\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{I_2(\tau)}{\tau-z}d\tau=\begin{cases}I_2(z), & \text{当}z\in S^+\\ 0, & \text{当}z\in S^-\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\tau-x}{\bar\tau-x}d\overline{I_1(\tau)}=0,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\tau-x}{\bar\tau-x}d\overline{I_1(\bar\tau)}=\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{1-\xi^2}{x\xi-1}d\overline{\omega(\xi)}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\tau-x}{\bar\tau-x}d\overline{I_2(\tau)}=\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{2+(\xi^2+x^2)(x\xi-2)}{(x\xi-1)^2}d\omega(\xi)$$

并且如果我们令

$$G_2(x)=\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{\bar\tau-x}{\tau-x}d\overline{g(\tau)}=\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{\tau-\bar\tau}{\bar\tau-x}d\overline{g(\tau)}\qquad (x\in L) \tag{3.16}$$

则对于$x\in L$有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{G_1(\tau)d\tau}{\tau-x}=\frac{1}{2}G_1(x),\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{xG_1(\tau)d\tau}{x\tau-1}=-\frac{1}{2}G_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\tau-x}{\bar\tau-x}d\overline{G_1(\tau)}=\frac{1}{2}G_2(x)$$

所有这些等式都易于验证. 我们仅证明例如最后一式. 由(3.13)，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\tau-x}{\bar{\tau}-x}\,d\overline{G_1(\tau)}=\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}d\overline{g(t)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{(\tau-x)\,d\bar{\tau}}{(\bar{\tau}-x)(\bar{\tau}-\bar{t})}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}d\overline{g(t)}\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{t(\tau-x)\,d\tau}{(1-\tau x)(\tau-t)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{t(t-x)}{1-tx}\,d\overline{g(t)}=\frac{1}{2}G_2(x)$$

利用这些等式，由(3.12)，我们得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\omega(t)}{\tau-x}d\tau=\beta^*\left[I_1\left(\frac{1}{x}\right)+I_2(x)+Kx-D\right]+\frac{G_1(x)}{\alpha^++\beta^-}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\omega(\tau)}{\tau-\dfrac{1}{x}}d\tau=\alpha^*I_1\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\alpha^-+\beta^+}G_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\tau-x}{\bar{\tau}-x}\,d\overline{\omega(\tau)}=\beta^*\left[\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{1-\xi^2}{x\xi-1}\,d\overline{\omega(\xi)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{2+(\xi^2+x^2)(x\xi-2)}{(x\xi-1)^2}d\omega(\xi)+\bar{K}x\right]+\frac{G_2(x)}{\alpha^++\beta^-}$$

于是，由(3.5)和(3.6)，方程(3.15)成为

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\omega(\xi)\,d\xi}{\xi-x}+\frac{\alpha^*+\beta^*}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{x\omega(\xi)\,d\xi}{x\xi-1}$$

$$+\beta^*\left[\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{2-(x^2+\xi^2)}{x\xi-1}\,d\overline{\omega(\xi)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{2+(\xi^2+x^2)(x\xi-2)}{(x\xi-1)^2}d\omega(\xi)+2\mathrm{Re}\,Kx\right]$$

$$=f(x)-\frac{1}{\alpha^++\beta^-}\left[G_1(x)+G_2(x)\right]-\frac{1}{\alpha^-+\beta^+}G_2\left(\frac{1}{x}\right)+C'' \qquad (3.17)$$

其中 $C''=C'+\beta^*D$ 是另一个待定常数.

这样，我们的问题就归结为在 h_2 类中求解(3.17)；适当选择常数 C'' 后，此方程有唯一解.

四、消去待定常数

因为我们仅对应力分布感兴趣，可以在 (3.17) 中令 $\Omega(x)=\omega'(x)$ 以避免确定 C''，而 $\Omega(x)$ 在 $x=\pm a$ 处则具有可积奇异性. 在(3.17)中对 x 求导，我们得

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\Omega(\xi)\,d\xi}{\xi-x}-\frac{\alpha^*+\beta^*}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\xi\Omega(\xi)\,d\xi}{x\xi-1}$$

$$+\beta^*\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{(\xi-x)(\xi^2+x\xi-2)}{(x\xi-1)^2}\overline{\Omega(\xi)}\,d\xi\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{(x-\xi)[\xi(x+\xi)(x\xi-3)+4]}{(x\xi-1)^3}\Omega(\xi)\,d\xi+2\mathrm{Re}\,K\right\}$$

$$=f'(x)+\frac{1}{\alpha^{+}+\beta^{-}}\{G_1'(x)+G_2'(x)\}$$

$$-\frac{1}{\alpha^{-}+\beta^{+}}\cdot\frac{1}{x^2}G_1'\left(\frac{1}{x}\right) \tag{4.1}$$

这是因为由

$$\int_{-a}^{a}\Omega(\xi)d\xi=\omega(a)-\omega(-a)=0 \tag{4.2}$$

可知

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\omega(\xi)d\xi}{(x\xi-1)^2}=\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\Omega(\xi)d\xi}{x(x\xi-1)}=\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\xi\Omega(\xi)d\xi}{x\xi-1}$$

令

$$\Omega(x)=\Omega_1(x)+i\Omega_2(x)$$

由(2.1)，有

$$f'(x)=-Y_n(x)+iX_n(x)$$

分离(4.1)式的实部和虚部，我们得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\Omega_1(x)\,dx}{x-x_0}-\frac{\alpha^*+\beta^*}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{x\Omega_1(x)\,dx}{x_0x-1}$$

$$+\frac{2\beta^*}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{(x-x_0)(x^2-1)}{(x_0x-1)^3}\Omega_1(x)\,dx$$

$$=-X_n(x_0)+\frac{1}{\alpha^{+}+\beta^{-}}\mathrm{Im}\{G_1'(x_0)+G_2'(x_0)\}$$

$$-\frac{1}{\alpha^{-}+\beta^{+}}\cdot\frac{1}{x_0^2}\mathrm{Im}G_1'\left(\frac{1}{x_0}\right) \tag{4.3}$$

和

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\Omega_2(x)\,dx}{x-x_0}-\frac{\alpha^*+\beta^*}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{x\Omega_2(x)dx}{x_0x-1}$$

$$-2\beta^*\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}(x-x_0)\left[\frac{1}{x_0x-1}+\frac{x^2-1}{(x_0x-1)^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{x^2-1}{(x_0x-1)^3}\right]\Omega_2(x)\,dx-\mathrm{Re}K\right\}=-Y_n(x_0)$$

$$-\frac{1}{\alpha^{+}+\beta^{-}}\mathrm{Re}\{G_1'(x_0)+G_2'(x_0)\}+\frac{1}{\alpha^{-}+\beta^{+}}\cdot\frac{1}{x_0^2}\mathrm{Re}G_1'\left(\frac{1}{x_0}\right) \tag{4.4}$$

而(4.2)成为

$$\int_{-a}^{a}\Omega_1(x)\,dx=0 \tag{4.5}$$

$$\int_{-a}^{a}\Omega_2(x)\,dx=0 \tag{4.6}$$

我们还须用 $\Omega(x)$ 表示ReK，K是由(3.10)定义的，由(3.12)，我们有

$$K=-\frac{\alpha^*}{\pi i}\int_\gamma \overline{I_1(t)}\,dt+\beta^*\left[\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \overline{I_1(\bar t)}\,dt\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \overline{I_2(t)}\,dt+2\bar K\right]+\frac{1}{\alpha^++\beta^-}\frac{2}{\pi i}\int_\gamma \overline{g(t)}\,dt$$

但是，容易证明

$$\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \overline{I_1(t)}\,dt=0,\quad \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \overline{I_2(t)}\,dt=\frac{2}{\pi i}\int_{-a}^a x\Omega(x)\,dx$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \overline{I_1(\bar t)}\,dt=\frac{2}{\pi i}\int_{-a}^a \overline{\omega(x)}\,dx=-\frac{2}{\pi i}\int_{-a}^a x\,\overline{\Omega(x)}\,dx$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \overline{g(t)}\,dt=\overline{\left\{-\frac{1}{\pi i}\int_\gamma g(t)\,d\bar t\right\}}=\overline{\left\{\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{g(t)}{t^2}\,dt\right\}}=\overline{G_1'(0)}$$

因此，

$$K=2\beta^*\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^a x\,[\Omega(x)-\overline{\Omega(x)}]\,dx+\bar K\right\}+\frac{2}{\alpha^++\beta^-}\overline{G_1'(0)}$$

取其实部，我们得

$$\mathrm{Re}\,K=\frac{4\beta^*}{1-2\beta^*}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^a x\,\Omega_2(x)\,dx+\frac{2}{\alpha^+-\beta^++2\beta^-}\mathrm{Re}G_1'(0)$$

于是，(4.4)最后取如下形式：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^a\frac{\Omega_2(x)\,dx}{x-x_0}-\frac{\alpha^*+\beta^*}{\pi}\int_{-a}^a\frac{x\Omega_2(x)\,dx}{x_0x-1}$$

$$-\frac{2\beta^*}{\pi}\int_{-a}^a(x-x_0)\left[\frac{1}{x_0x-1}+\frac{x^2-1}{(x_0x-1)^2}-\frac{x^2-1}{(x_0x-1)^3}\right]\Omega_2(x)\,dx$$

$$+\frac{8\beta^{*2}}{1-2\beta^*}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^a x\,\Omega_2(x)\,dx=-Y_n(x_0)$$

$$-\frac{1}{\alpha^++\beta^-}\mathrm{Re}\left\{G_1'(x_0)+G_2'(x_0)+\frac{2(\beta^+-\beta^-)}{\alpha^+-\beta^++2\beta^-}G_1'(0)\right\}$$

$$+\frac{1}{\alpha^-+\beta^+}\cdot\frac{1}{x_0^2}\mathrm{Re}\,G_1'\left(\frac{1}{x_0}\right)\tag{4.7}$$

我们的问题现已归结为：分别在附加条件(4.5)和(4.6)下，在h_0类（即$\Omega_1(x)$和$\Omega_2(x)$在$x=\pm a$处可以有可积的奇异性）中求解(4.3)和(4.7)．

方程(4.3)和(4.7)表明，沿板和无限平面的接触面γ的位移差等价于裂纹上一定的外荷载．例如，若焊接的板是半径为$1-\delta$的圆且$g(t)=\delta t$（同心焊接），则(4.3)和(4.7)右端最后一项容易算出分别等于0和$-\dfrac{4\delta}{\alpha^+-\beta^++2\beta^-}$．在此情况下，裂纹上的等价外力是密度为$\dfrac{4\delta}{\alpha^+-\beta^++2\beta^-}$的均匀压力，没有剪力；由对称性，这是可以预见的．

五、数 值 解 法

我们可以应用奇异积分的任何一种求积公式，例如 Lobatto-Chebyshev 公式（参见[8]或[9]），来求所得方程的数值解。我们将就 $g(t)\equiv 0$ 的情况来说明第Ⅰ型和第Ⅱ型的方法。

第Ⅰ型，均匀压力 P：$X_n=0$，$Y_n=P$。这时，(4.3) 成为齐次方程，它的满足(4.5)的唯一解为 $\Omega_1(x)\equiv 0$。令 $x=aX$，$x_0=aX_0$，$\Omega_2(x)=\Omega_2^*(X)$ 及

$$k_2(X_0,X)=a^2\left\{-\frac{(\alpha^*+\beta^*)X}{a^2X_0X-1}-2\beta^*(X-X_0)\left[\frac{1}{a^2X_0X-1}+\frac{a^2X^2-1}{(a^2X_0X-1)^2}-\frac{a^2X^2-1}{(a^2X_0X-1)^3}\right]+\frac{8\beta^{*2}X}{1-2\beta^*}\right\} \tag{5.1}$$

则 (4.7) 取如下形式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Omega_2^*(X)}{X-X_0}dX+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k_2(X_0,X)\Omega_2^*(X)dX=-P \tag{5.2}$$

(5.2)应在附加条件

$$\int_{-1}^{1}\Omega_2^*(X)dX=0 \tag{5.3}$$

下、在 h_0 类中求解。我们知道（参见[7]），$\Omega_2^*(X)$ 可以写成

$$\Omega_2^*(X)=\frac{F_2^*(X)}{\sqrt{1-X^2}} \tag{5.4}$$

其中 $F_2^*(X)\in H$。由[8]中所描述的配位法，(5.2)，(5.3) 可用线性方程组

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_k}{n}F_2^*(T_k)\left[\frac{1}{T_k-X_r}+k_2(X_r,T_k)\right]=-P\qquad(r=1,\cdots,n) \tag{5.5}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_kF_2^*(T_k)=0 \tag{5.6}$$

逼近，其中

$$T_k=\cos\frac{k\pi}{n}\qquad(k=0,1,\cdots,n),\quad X_r=\cos\frac{2r-1}{2n}\pi\qquad(r=1,\cdots,n)$$

$$\lambda_0=\lambda_n=\frac{1}{2}\qquad(\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=1)$$

由 $k_2(-X_0,\ -X)=-k_2(X_0,\ X)$知，若 $\Omega_2^*(X)$ 是(5.2)，(5.3) 的解，则$-\Omega_2^*(-X)$ 也是，这说明 $\Omega_2^*(X)$ 是奇函数。从而 $F_2^*(X)$ 也是奇函数。因此，(5.6) 恒能满足，并且 $F_2^*(0)$ 必为 0。

现取$n=2m$为偶数．由

$$X_r=-X_{2m-r+1},\quad T_k=-T_{2m-k}\qquad(T_m=0)$$

可知，(5.5) 中仅前 m 个方程是本质的，因此成为

$$\sum_{k=0}^{m-1}C_{rk}F_2^*(T_k)=-P\qquad(r=1,\cdots,m) \tag{5.7}$$

其中

$$C_{rk}=\frac{\lambda_k}{2m}\left[\frac{2T_k}{T_k^2-X_r^2}+k_2(X_r,\ T_k)-k_2(X_r,\ -T_k)\right]$$

$$(r=1,\cdots,m;\ \ k=0,1,\cdots,m-1;\quad \lambda_0=\frac{1}{2},\ \ \lambda_1=\cdots=\lambda_{m-1}=1) \tag{5.8}$$

第Ⅱ型，均匀剪力 T: $X_n=T$, $Y_n=0$. 和上面类似，可知 $\Omega_2(x)\equiv 0$，并且(4.3)，(4.5)成为 $(\Omega_1^*(X)=\Omega_1(x))$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Omega_1^*(X)}{X-X_0}dX+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k_1(X_0,X)\Omega_1^*(X)dX=-T \tag{5.9}$$

$$\int_{-1}^{1}\Omega_1^*(X)dX=0 \tag{5.10}$$

其中

$$k_1(X_0,X)=a^2\left\{-\frac{(\alpha^*+\beta^*)X}{a^2X_0X-1}+2\beta^*\frac{(X-X_0)(a^2X^2-1)}{(a^2X_0X-1)^3}\right\} \tag{5.11}$$

$\Omega_1^*(X)$ 也显然是奇函数，因此(5.10)恒能满足。令

$$\Omega_1^*(X)=\frac{F_1^*(X)}{\sqrt{1-X^2}} \tag{5.12}$$

其中 $F_1^*(X)\in H$. 与前类似，取$n=2m$，我们得近似线性方程组

$$\sum_{k=0}^{m-1}D_{rk}F_1^*(T_k)=-T\qquad (r=1,\cdots,m) \tag{5.13}$$

其中

$$D_{rk}=\frac{\lambda_k}{2m}\left[\frac{2T_k}{T_k^2-X_r^2}+k_1(X_r,T_k)-k_1(X_r,-T_k)\right]$$

$$(r=1,\cdots,m;\ \ k=0,1,\cdots,m-1)$$

六、应力强度因子

现在我们在第五节的假设下对第Ⅰ型和第Ⅱ型算出端点 $x=a$ 处的应力强度因子. 我们将看到，实际上只有$F_2^*(1)$和$F_1^*(1)$的值是重要的.

设 $z_0=a+\varepsilon$ $(0<\varepsilon<1-a)$是 a 附近的一点. 由(3.1)，(3.2)，我们有(当 $\varepsilon\to 0$)

$$\Phi(z_0)=\varphi'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\Omega(x)}{x-z_0}dx+O(1)$$

若令$z_0=aZ_0$，则

$$\Phi^*(Z_0)=\Phi(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\Omega^*(X)}{X-Z_0}dX+O(1) \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}\bar z_0\Phi'(z_0)+\Psi(z_0)&=\bar z_0\varphi''(z_0)+\psi'(z_0)\\&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\overline{\Omega(x)}}{x-z_0}dx-\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\Omega(x)}{x-z_0}dx+O(1)\\&=-2i\ \mathrm{Im}\,\Phi^*(Z_0)+O(1)\end{aligned} \tag{6.2}$$

第Ⅰ型．在此情况下，$\Omega^*(X)=iF_2^*(X)/\sqrt{1-X^2}$，因而，由(6.1)，

$$\Phi^*(Z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{F_2^*(X)dX}{(X-X_0)\sqrt{1-X^2}}+O(1)$$

注意到 $\arg\sqrt{1-Z_0^2}=-\pi/2$， 我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\varepsilon}\,\Phi(z_0)=\frac{i}{2}F_2^*(1)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1-Z_0^2}}=-\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}F_2^*(1) \tag{6.3}$$

由(6.3)和(6.2)可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\varepsilon}\,[\bar{z}_0\Phi'(z_0)+\Psi(z_0)]=0$$

因此，由(2.7)我们得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{2\varepsilon}\,[\sigma_x(z_0)+\sigma_y(z_0)]=-2\sqrt{a}\,F_2^*(1)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{2\varepsilon}[\sigma_y(z_0)-\sigma_x(z_0)+2i\tau_{xy}(z_0)]=0$$

于是，应力强度因子为

$$K_{\rm I}=\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{2\varepsilon}\sigma_y(z_0)=-\sqrt{a}\,F_2^*(1) \tag{6.4}$$

第Ⅱ型．在此情况下，与前类似，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\varepsilon}\,\Phi(z_0)=\frac{i\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}F_1^*(1)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\varepsilon}\,[\bar{z}_0\Phi'(z_0)+\Psi(z_0)]=-\frac{i\sqrt{a}}{\sqrt{2}}F_1^*(1)$$

因此，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{2\varepsilon}[\sigma_x(z_0)+\sigma_y(z_0)]=0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{2\varepsilon}\,[\sigma_y(z_0)-\sigma_x(z_0)+2i\,\tau_{xy}(z_0)]=-2\sqrt{a}\,iF_1^*(1)$$

从而应力强度因子为

$$K_{\rm II}=\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{2\varepsilon}\,\tau_{xy}(z_0)=-\sqrt{a}\,F_1^*(1) \tag{6.5}$$

注．若 $\kappa^+=\kappa^-$，$\mu^+=\mu^-$，则 $\alpha^*=\beta^*=0$．方程(5.2)成为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Omega_2^*(X)}{X-X_0}dX=-P \text{ 或 } \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\Omega_2^*(X)}{X-X_0}dX=iP$$

它满足（5.3）的 h_0 类的解由

$$\Omega_2^*(X_0)=\frac{P}{\sqrt{1-X_0^2}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-X_0^2}}{X-X_0}dX=-\frac{PX_0}{\sqrt{1-X_0^2}}$$

给出，因此 $F_2^*(X)=-PX$．由此可知，对于第Ⅰ型，$K_{\rm I}=\sqrt{a}P$．类似地，我们可得$K_{\rm II}=\sqrt{a}T$．这和经典的结果是一致的。

七、数 值 例 子

我们用计算机算出了一些数值结果．容易看出，有关常数依赖于 a，κ^+，κ^- 和 μ^+/μ^-（在 $g(t)\equiv 0$ 的情况下）．若我们在(5.7)和(5.13) 中取 $m=20$，下表中给出的结果精确到末位数

字。

作者对马道玮同志协助校核原稿并上机计算表示衷心感谢。

第Ⅰ型：$P=1$

表 1　　$a=0.6$，$\kappa^+=1.6$，$\kappa^-=1.8$，$\mu^+/\mu^-=12.5$

j	$F_2(T_j)$	j	$F_2(T_j)$	j	$F_2(T_j)$	j	$F_2(T_j)$
0	−1.46759	5	−1.39375	10	−1.12786	15	−0.63788
1	−1.46485	6	−1.35821	11	−1.04695	16	−0.51797
2	−1.45652	7	−1.31429	12	−0.95693	17	−0.39301
3	−1.44225	8	−1.26147	13	−0.85825	18	−0.26419
4	−1.42155	9	−1.19938	14	−0.75163	19	−0.13275

$K_{\rm I}=1.13679$

表 2　　$P=1$或$T=1$，$\kappa^+=1.6$

μ^+/μ^-	1/10	1/3	1	3	10	50
a \ $K_{\rm I}$ / $K_{\rm II}$ \ κ^-	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
0.2	0.41707 0.43494	0.43086 0.43952	0.44721 0.44721	0.46086 0.45523	0.46922 0.46139	0.47301 0.46423
0.4	0.49811 0.57261	0.55493 0.59407	0.63245 0.63245	0.70631 0.67746	0.75585 0.71172	0.77953 0.72913
0.6	0.49812 0.63546	0.60366 0.68263	0.77459 0.77459	0.96989 0.89639	1.12093 1.00147	1.19955 1.05973
0.8	0.46165 0.63781	0.60805 0.71876	0.89442 0.89442	1.30611 1.17030	1.69712 1.46153	1.93013 1.65128
0.9	0.42258 0.59653	0.58627 0.70192	0.94868 0.94868	1.56470 1.39065	2.25924 1.94754	2.72876 2.37452
0.95	0.38454 0.64297	0.55631 0.66654	0.97467 0.97467	1.79089 1.59056	2.87026 2.49858	3.70322 3.31578
0.99	0.30396 0.42294	0.48073 0.57158	0.99498 0.99498	2.30079 2.04680	4.73712 4.16415	7.36937 6.87430

参 考 文 献

[1] Cook, T. S. and F. Erdogen, Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface, *Int. J. Eng. Sci.*, 10 (1972), 677-697.

[2] Erdogen, F. and O. Aksogan, Bonded half planes containing an arbitrarily oriented crack, *Int.J.Solid Structures*, 10 (1974), 569-585.

[3] Ioakimidis, N. I. and P. S. Theocaris, A system of curvilinear cracks in an elastic half-plane, *Int. J. of Fracture*, 15 (1979), 299-309.

[4] 路见可，不同材料拼接平面裂纹中的数学问题，武汉大学学报(自然科学版)，2(1982)，1-10.

[5] 路见可，关于不同弹性材料的平面焊接问题，武汉大学学报(自然科学版)，2(1963)，50-66.

[6] Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Groningen, P. Noordhoff Ltd., (1963).

[7] Muskhelishvili, N. I., *Singular Integral Equations*, Groningen, P. Noordhoff Ltd.,

(1953).

[8] Theocaris, P. S. and N. I. Ioakimidis, Numerical integration methods for the solution of singular integral equations, *Quart. of Appl. Math.*, 35 (1977), 173-183.

[9] Lu Chien-ke (路见可), A class of quadrature formulas of Chebyshev type for singular integrals, (to be published in *J. of Math. Anal. and Appl.*).

Circular Welding Problems with a Crack

Lu Jian-ke

(Wuhan University, Wuhan)

Abstract

In this paper, the problem of an infinite plane with a circular hole welded by a nearly circular plate with a crack of different material is considered. The problem is transformed to solve certain boundary value problem of analytic functions and then reduced to solve a singular integral equation along the crack. The formulas and some numerical results of the factors of stress intensity for the cases Mode I and Mode II are obtained at the end of the paper.