应用数学和力学，第4卷第5期（1983年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

偏心圆环多值位移问题的一般解

汤任基　　甄继庆

（兰州大学，1982年10月18日收到）

摘　要

本文利用 Н. И. Мусхелишвили 的复函数方法，研究了平面偏心圆环多值位移问题，得到了以双极坐标表示的应力函数的一般表达式，文中对表达式的应用作了说明.

一、引　言

G. B. Jeffery[1] 直接从双调和方程出发，经过复杂的推导，给出了偏心完整圆环的应力函数一般表达式，但对多值位移未作分析，因而此结果对于研究带缺口偏心圆环（实际中的偏心圆环夹具）的多值位移问题，尚有一定的困难．本文采用与 G. B. Jeffery 完全不同的方法，通过保角映射，对偏心圆环的多值位移问题作了系统讨论，获得了以双极坐标表示的应力函数的一般解，其中多值位移部分已被分离出来，它们由一定的待定系数表示，因而使用方便.

二、偏心圆环应力函数的一般表达式

图1为带有一缺口的偏心平面圆环，其中 r_1 为内圆周 Γ_1 的半径，r_2 为外圆周 Γ_2 的半径，e 为圆心 O_1 和 O_2 间的偏心距，a 为偏心圆族共轭点 K（K' 与 K 对称）的纵坐标，d_1 为 O_1 圆心的纵坐标，ε 为偏心圆环缺口的开口角，ε_0 为内圆缺口对圆心 O_1 的张角．本节的目的是要找出偏心圆环在多值位移下的应力函数的一般表达式.

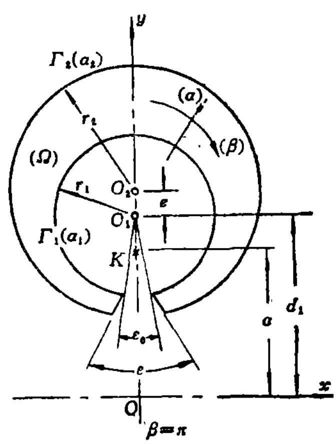

图　1

根据文献[2]，上述问题的应力函数 $U(x,y)$ 可用以下公式表示：

$$U(x,y)=\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z)+\psi(z)] \tag{2.1}$$

式中 $z=x+iy$ 为环域 Ω 中任一点的复坐标，$\varphi(z)$，$\psi(z)$ 为定义在 Ω 中的二个复应力函数，由于考虑多值位移，因而具有以下形式：

$$\varphi(z)=Az\ln(z-ai)+B\ln(z-ai)+\varphi^*(z) \tag{2.2}$$

$$\psi(z)=Cz\ln(z-ai)+D\ln(z-ai)+\psi^*(z) \tag{2.3}$$

式中 $\varphi^*(z)$，$\psi^*(z)$为在偏心圆环域Ω中的全纯函数，A为实常数，B，C，D为复常数.

为了简化上述函数，作以下保角映射

$$z=\omega_1(\zeta)=ia\frac{\zeta+1}{\zeta-1} \tag{2.4}$$

此映射函数，使 z 平面上的偏心环域Ω变为ζ平面上的同心环域，于是原复应力函数成为：

$$\varphi(z)=\varphi[\omega_1(\zeta)]=\varphi_1(\zeta)=A\omega_1(\zeta)\ln\zeta+B\ln\zeta+\varphi_1^*(\zeta) \tag{2.5}$$

$$\psi(z)=\psi[\omega_1(\zeta)]=\psi_1(\zeta)=C\omega_1(\zeta)\ln\zeta+D\ln\zeta+\psi_1^*(\zeta) \tag{2.6}$$

式中 $\varphi_1^*(\zeta)$，$\psi_1^*(\zeta)$ 为定义在ζ复平面上同心环域中的全纯函数，因而可用 Laurent 级数表示为：

$$\varphi_1^*(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\zeta^n \tag{2.7}$$

$$\psi_1^*(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\zeta^n \tag{2.8}$$

再作保角映射：

$$\zeta=e^\eta=e^{\alpha+i\beta} \tag{2.9}$$

则 (2.4) 变为：

$$z=\omega_1[e^\eta]=ia\operatorname{cth}\frac{\alpha+i\beta}{2} \tag{2.10}$$

其中α,β为η复平面上任一点的纵横坐标，亦即z平面上的二个曲线坐标，这是G. B. Jeffery在文献 [1] 中用的双极坐标，它们与 z 平面上的直角坐标存在以下关系：

$$x=\frac{a\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}\beta},\quad y=\frac{a\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}\beta} \tag{2.11}$$

利用以上关系，可获得二族曲线坐标线，若令 $\alpha=\text{const}$，则得以 $K(ia)$ 和 $K'(-ia)$ 为共轭点的第一族曲线坐标线，令 $\beta=\text{const}$，则得同时通过K 和 K'点的第二族曲线坐标线，它们都是一些圆，偏心圆环的内外周界Γ_1 和 Γ_2与第一族 α 线重合，因此这里记 Γ_1 和 Γ_2的曲线坐标为 $\alpha=\alpha_1$ 和 $\alpha=\alpha_2$，偏心圆环缺口的左右二个剖面，可近似地看作与第二族 β 线重合，因此分别记它们的曲线坐标为 $\beta=-\pi$ 和 $\beta=\pi$，以上说明见图 1.

(2.9) 的映射，使原来的复应力函数进一步变为：

$$\varphi(z)=\varphi_1[e^\eta]=\varphi_2(\eta)=iAa\eta\operatorname{cth}\frac{\eta}{2}+B\eta+\sum_{n=0}^{\infty}(A_n^*\operatorname{sh}n\eta+B_n^*\operatorname{ch}n\eta) \tag{2.12}$$

$$\psi(z)=\psi_1[e^\eta]=\psi_2(\eta)=iCa\eta\operatorname{cth}\frac{\eta}{2}+D\eta+\sum_{n=0}^{\infty}(C_n^*\operatorname{sh}n\eta+D_n^*\operatorname{ch}n\eta) \tag{2.13}$$

式中复常数 $A_n^*\sim D_n^*$ 由 Laurent 级数的系数求得：

$$A_n^*=a_n+a_{-n},\qquad B_n^*=a_n-a_{-n} \tag{2.14}$$

$$C_n^*=b_n+b_{-n},\qquad D_n^*=b_n-b_{-n} \tag{2.15}$$

将(2.12)、(2.13)代入实应力函数(2.1)，并令 $\eta=\alpha+i\beta$，则经过很长的运算整理，最后求得以双极坐标 α,β表示的偏心圆环在多值位移下的应力函数的一般表达式为：

$$U(\alpha,\beta)=\frac{1}{h}\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}[T_n(\alpha)\cos n\beta+K_n(\alpha)\sin n\beta]+\beta(E\cos\beta+F\sin\beta$$

$$+G\,\mathrm{ch}\,\alpha+H\,\mathrm{sh}\,\alpha)+\alpha(E'\cos\beta+F'\sin\beta+G'\mathrm{ch}\,\alpha+H'\mathrm{sh}\,\alpha)\Big\}\tag{2.16}$$

式中

$$h=\frac{\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta}{a}\tag{2.17}$$

$$T_n(\alpha)=A_n\,\mathrm{ch}(n+1)\alpha+B_n\,\mathrm{ch}(n-1)\alpha+C_n\,\mathrm{sh}(n+1)\alpha+D_n\mathrm{sh}(n-1)\alpha\tag{2.18}$$

$$K_n(\alpha)=A'_n\,\mathrm{ch}(n+1)\alpha+B'_n\,\mathrm{ch}(n-1)\alpha+C'_n\,\mathrm{sh}(n+1)\alpha+D'_n\mathrm{sh}(n-1)\alpha\tag{2.19}$$

$$A_n+iC'_n=\frac{B^*_n-A^*_{n+1}}{2i}+\frac{D^*_n-C^*_{n+1}}{2}\tag{2.20}$$

$$B_n+iD'_n=\frac{-B^*_n+A^*_{n-1}}{2i}+\frac{D^*_n-C^*_{n-1}}{2}\tag{2.21}$$

$$C_n+iA'_n=\frac{A^*_n-A^*_{n+1}}{2i}+\frac{D^*_n-D^*_{n+1}}{2}\tag{2.22}$$

$$D_n+iB'_n=\frac{-A^*_n+A^*_{n-1}}{2i}+\frac{D^*_n-D^*_{n-1}}{2}\tag{2.23}$$

$$E'-iE=\frac{-D+a^2A}{a},\quad F'-iF=B+C\tag{2.24}$$

$$G'-iG=\frac{D+a^2A}{a},\quad H'-iH=i(C-B)\tag{2.25}$$

由于常数A,B,C,D均与多值位移有关，因而应力函数中的系数$E\sim H$及$E'\sim H'$代表了偏心圆环的多值位移部分，其它待定常数$A_n\sim D_n$及$A'_n\sim D'_n$均与多值位移无关，它们由问题的边界条件决定，所以(2.16)是本文获得的一个一般解，它与 G. B. Jeffery 给出的结果不同，偏心环的多值位移部分已被分离出来。

三、算例——一般解的应用

作为上节结果的具体应用，这里讨论图 2 偏心圆环夹具（采矿工业中用的卡环）的闭合问题，假定夹具内部受均匀压力p_1。此问题可简化为图 1 带缺口的偏心圆环的闭合问题，为了简单起见，简化后的偏心圆环其几何尺寸和符号仍用图 1 表示，此外，Γ_1圆周受内压p_1作用，Γ_2表面自由，缺口左右剖面作用一对称水平闭合力Q，其位置距x轴为h^*.

由于闭合是对称的，因而应力函数取其级数的一项即可解决问题：

$$hU(\alpha,\beta)=T_1(\alpha)\cos\beta+\beta(E\cos\beta+F\sin\beta+G\,\mathrm{ch}\,\alpha+H\,\mathrm{sh}\,\alpha)+\alpha(E'\cos\beta+F'\sin\beta+G'\,\mathrm{ch}\,\alpha+H'\,\mathrm{sh}\,\alpha)\tag{3.1}$$

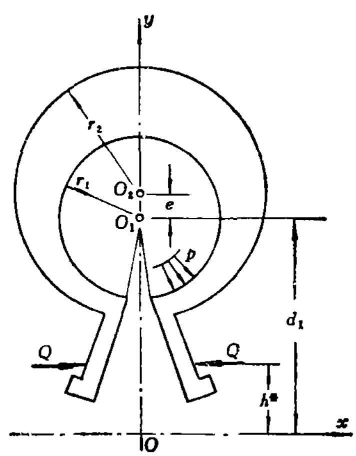

图 2

式中含有11个待定常数，它们由偏心环缺口的闭合条件，整体静力平衡条件以及圆周Γ_1和Γ_2给定的外力边界条件决定。

闭合条件与多值位移有关，因此需要利用位移表达式.根据文献[2]，域Ω中任一点的位移分量u，v由以下公式决定：

$$2\mu(u+iv)=\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi'(z)} \tag{3.2}$$

式中$\varkappa=3-4\nu$为平面应变，$\varkappa=(3-\nu)/(1+\nu)$为平面应力，$\nu$为泊松比，$\mu$为剪切弹性模量.

利用以上关系，同时考虑偏心圆环的闭合位移及其域中引起的多值位移，使二者相等，即得闭合条件，它可决定应力函数(3.1)中的某些常数.容易看出，偏心环对称闭合时的闭合位移分量为：

$$[u+iv]_{闭}=r_1\varepsilon_0+(d_1-r_1-y)\varepsilon \tag{3.3}$$

闭合后域中引起的多值位移分量为：

$$[u+iv]_L=\frac{\pi i}{\mu}\left[(\varkappa+1)Az+\varkappa B+\bar{C}\right] \tag{3.4}$$

式中$z=x+iy$，因为讨论的是缺口处的多值位移，因而可近似取$x=0$.

令二者相等，得到常数

$$A=\frac{\mu\varepsilon}{\pi(\varkappa+1)} \tag{3.5}$$

$$\varkappa B+\bar{C}=-\frac{\mu[r_1\varepsilon_0+(d_1-r_1)\varepsilon]i}{\pi} \tag{3.6}$$

偏心圆环的整体静力平衡条件，要求作用在Γ_1上内压p_1的主矢P_x+iP_y及其对原点的主矩M_0为零，由文献[2]：

$$P_x+iP_y=-i\left[\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi'(z)}\right]_{\Gamma_1}=0 \tag{3.7}$$

$$M_0=\mathrm{Re}\left[\psi(z)-z\psi'(z)-z\bar{z}\overline{\varphi'(z)}\right]_{\Gamma_1}=0 \tag{3.8}$$

把复应力函数(2.2)，(2.3)代入上式，得到以下两个关系式：

$$B=\bar{C},\qquad \mathrm{Im}\,D=0 \tag{3.9}$$

于是由(3.6)得到：

$$B=-C=-\frac{\mu[r_1\varepsilon_0+(d_1-r_1)\varepsilon]i}{\pi(\varkappa+1)} \tag{3.10}$$

以上结果表明，常数A，D为实数，而B，C为纯虚数，从而由(2.24)、(2.25)知道

$$E=F=G=H=F'=0 \tag{3.11}$$

$$H'=-\frac{2\mu[r_1\varepsilon_0+(d_1-r_1)\varepsilon]}{\pi(\varkappa+1)} \tag{3.12}$$

$$E'+G'=2aA \tag{3.13}$$

于是，应力函数(3.1)简化为：

$$\begin{aligned}hU(\alpha,\beta)=&(A_1\,\mathrm{ch}\,2\alpha+B_1+C_1\,\mathrm{sh}\,2\alpha)\cos\beta+G'(\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta)\alpha\\&+H'\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha+2Aa\,\alpha\cos\beta\end{aligned} \tag{3.14}$$

式中只留下四个实常数A_1,B_1,C_1及G'为未知，它们由最后一个条件，即Γ_1和Γ_2上给定的外力边界条件决定，在双极曲线坐标系中，这些边界条件可写为：

$$\Gamma_1:\ \sigma_\alpha|_{\alpha=\alpha_1}=-p_1,\qquad \tau_{\alpha\beta}|_{\alpha=\alpha_1}=0 \tag{3.15}$$

$$\Gamma_2:\ \sigma_\alpha|_{\alpha=\alpha_2}=0,\qquad \tau_{\alpha\beta}|_{\alpha=\alpha_2}=0 \tag{3.16}$$

式中σ_α和$\tau_{\alpha\beta}$为双极曲线坐标系(α,β)中的法向和切向应力分量，根据熟知的公式，双极曲线坐标系中的三个应力分量与应力函数$U(\alpha,\beta)$间的关系为：

$$\sigma_\alpha=\frac{1}{a}\left[(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\operatorname{ch}\alpha\right]hU \tag{3.17}$$

$$\sigma_\beta=\frac{1}{a}\left[(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\cos\beta\right]hU \tag{3.18}$$

$$\tau_{\alpha\beta}=-\frac{1}{a}(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}hU \tag{3.19}$$

将此结果代入边界条件(3.15)、(3.16)，最后得到用于决定上述四个未定常数的线代数方程组为：

$$A_1\operatorname{sh}2\alpha_1+C_1\operatorname{ch}2\alpha_1-\frac{1}{2}G'=-Aa$$

$$A_1\operatorname{ch}2\alpha_1+B_1+C_1\operatorname{sh}2\alpha_1-\frac{1}{2}G'\operatorname{sh}2\alpha_1=-2Aa\alpha_1-ap_1+H'\operatorname{sh}^2\alpha_1$$

$$A_1\operatorname{sh}2\alpha_2+C_1\operatorname{sh}2\alpha_2-\frac{1}{2}G'=-Aa$$

$$A_1\operatorname{ch}2\alpha_2+B_1+C_1\operatorname{sh}2\alpha_2-\frac{1}{2}G'\operatorname{sh}2\alpha_2=-2Aa\alpha_2+H'\operatorname{sh}^2\alpha_2$$

解此组方程，最后得常数：

$$\begin{aligned}A_1=&-ap_1M\operatorname{sh}(\alpha_1+\alpha_2)-2aAM\operatorname{sh}(\alpha_1+\alpha_2)[(\alpha_1-\alpha_2)-\operatorname{ch}(\alpha_1+\alpha_2)\\&\cdot\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha_2)]+H'M\operatorname{sh}(\alpha_1+\alpha_2)(\operatorname{sh}^2\alpha_1-\operatorname{sh}^2\alpha_2)\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}B_1=&ap_1M[\operatorname{sh}2\alpha_2\operatorname{ch}(\alpha_1-\alpha_2)+\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha_2)]-aAM[\operatorname{sh}2(\alpha_1-\alpha_2)\operatorname{sh}(\alpha_1+\alpha_2)\\&-2(\alpha_1-\alpha_2)\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha_2)-2\operatorname{ch}(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1\operatorname{sh}2\alpha_2-\alpha_2\operatorname{sh}2\alpha_1)]\\&-H'M\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha_2)(\operatorname{sh}^2\alpha_1+\operatorname{sh}^2\alpha_2)-H'M\operatorname{ch}(\alpha_1-\alpha_2)\\&\cdot(\operatorname{sh}^2\alpha_1\operatorname{sh}2\alpha_2-\operatorname{sh}^2\alpha_2\operatorname{sh}2\alpha_1)\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}C_1=&ap_1M\operatorname{ch}(\alpha_1+\alpha_2)+2aAM\operatorname{ch}(\alpha_1+\alpha_2)[(\alpha_1-\alpha_2)-\operatorname{ch}(\alpha_1+\alpha_2)\\&\cdot\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha_2)]-H'M\operatorname{ch}(\alpha_1+\alpha_2)(\operatorname{sh}^2\alpha_1-\operatorname{sh}^2\alpha_2)\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}G'=&2ap_1M\operatorname{ch}(\alpha_1-\alpha_2)-4aAM[\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha_2)-(\alpha_1-\alpha_2)\operatorname{ch}(\alpha_1-\alpha_2)]\\&-2H'M\operatorname{ch}(\alpha_1-\alpha_2)(\operatorname{sh}^2\alpha_1-\operatorname{sh}^2\alpha_2)\end{aligned} \tag{3.23}$$

式中

$$M=\frac{1}{2\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha_2)(\operatorname{sh}^2\alpha_1-\operatorname{sh}^2\alpha_2)} \tag{3.24}$$

最后求得偏心圆环夹具闭合时域中的应力为：

$$\begin{aligned}a\sigma_\alpha=&A_1(\operatorname{ch}2\alpha-2\operatorname{sh}2\alpha\operatorname{sh}\alpha\cos\beta)+B_1+C_1(\operatorname{sh}2\alpha-2\operatorname{ch}2\alpha\operatorname{sh}\alpha\cos\beta)\\&-G'\operatorname{sh}\alpha(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)-H'\operatorname{sh}^2\alpha+2aA(\alpha-\operatorname{sh}\alpha\cos\beta)\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}a\sigma_\beta=&A_1[\operatorname{ch}2\alpha+4\operatorname{ch}2\alpha\cos\beta(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)-2\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}2\alpha\cos\beta]\\&+B_1+2C_1\operatorname{sh}\alpha[\cos2\beta(2\operatorname{ch}^2\alpha+1)-\operatorname{ch}\alpha(1+2\cos2\beta)]\\&+G'\operatorname{sh}\alpha(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)+H'[\sin^2\beta+(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^2]\\&+2aA(\alpha-\operatorname{sh}\alpha\cos\beta)]\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$a\tau_{\alpha\beta}=(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)\sin\beta(2A_1\operatorname{sh}2\alpha-2C_1\operatorname{ch}2\alpha-G'+2aA) \tag{3.27}$$

四、夹具闭合力的计算

图 2 夹具对称闭合时，作用在夹具伸臂两侧的水平闭合力Q应用以下公式决定：

$$Q=\delta\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left[\sigma_\beta\frac{\partial y(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right]_{\beta=\pi}d\alpha \tag{4.1}$$

它的作用位置由下式决定：

$$h^*=\frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left[\sigma_\beta\cdot y\cdot\frac{\partial y(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right]_{\beta=\pi}d\alpha}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left[\sigma_\beta\cdot\frac{\partial y(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right]_{\beta=\pi}d\alpha} \tag{4.2}$$

式中δ为夹具厚度，其它被积函数为：

$$\begin{aligned}a\sigma_\beta\Big|_{\beta=\pi}=&A_1(2\mathrm{sh}\alpha\ \mathrm{sh}2\alpha-3\mathrm{ch}2\alpha-4\mathrm{ch}\alpha\,\mathrm{ch}2\alpha)+B\\&-2C_1\mathrm{sh}\alpha(2\mathrm{ch}^2\alpha+3\mathrm{ch}\alpha+1)+G'\mathrm{sh}\alpha(\mathrm{ch}\alpha+1)\\&+H'(\mathrm{ch}^2\alpha+2\mathrm{ch}\alpha+2)+2aA(\alpha+\mathrm{sh}\alpha)\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$y(\alpha,\pi)=\frac{a\,\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha+1},\quad\frac{\partial y(\alpha,\pi)}{\partial\alpha}=\frac{a}{\mathrm{ch}\alpha+1} \tag{4.4}$$

把以上结果代入积分表达式，即可算出闭合力的大小及其作用位置，但由于篇幅，这里不再具体计算。

五、结　　语

以上得到的带有多值位移的应力函数一般表达式，是在使用 Мусхелишвили 的对数型多值复应力函数下求得的，因而这种应力函数对应的多值位移必具有线性的刚体位移形式，然而实际中的多值位移常常是非线性函数形式的，对于这种情形，可使用文[3]引进的位移间断变化率函数（即位错连续分布函数），对上面得到的一般表达式进行改造使用，可以指出，要获得带有非线性多值位移的应力函数也是不难的。

参 考 文 献

[1] Jeffery, G. B., D. Sc, M. A., Plane stress and plane strain in bipolar co-ordinates, *Phil. Trans. Roy. Soc*., London, A, 221 (1921), 265-293.

[2] Мусхелишвили, Н. И.,《数学弹性力学的几个基本问题》，科学出版社（1958）.

[3] 汤任基、王凯，非对称载荷作用的 Griffith 裂纹问题，力学学报，3(1980)，269-278.

General Solution of Multi-Valued Displacement Problem of an Eccentric Circular Ring

Tang Ren-Ji　　Zhen Ji-qing
(Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract

In this paper, by using Мусхелишвили's method, a multi-valued displacement problem is considered for an encentric circular ring. The general expression of stress function is derived in the bi-polar co-ordinate system. Here its application is explained.