

实验应力分析的光电-计算机自动 数据处理(PCP)程序研究

安里千 陈至达

(中国矿院北京研究生部, 1983年3月7日收到)

摘 要

本文提出的光弹性数据自动分析处理 PCP 程序, 使输入计算机的数据数量达到最小限度. 文中采用陈至达^[1] (1962 年) 的光测应力分析基本方程, 并导出适合于光弹性数据处理的三次样条函数. 初步实践证明 PCP 程序较目前其他研究者提出的自动应力分析方法更为准确和节省计算时间.

一、引 言

光弹性数据的自动测取与分析是当前实验应力分析的重要研究方向之一, 大多数力学家都倾向于认为: 计算机处理方法和实验方法的联合是解决工程力学问题的可靠途径, 而实验应力分析的数据处理也正沿着计算机化的方向发展. 在最近十多年中, 如 Redner (1974)^[2], Carter (1968)^[3], Rowlands (1978)^[4], Allison (1978)^[5], Kuske (1979)^[6] 等及许多其他研究者纷纷提出一些用光、电及电子计算机自动测取和分析光弹性数据, 但均未达到工业实用的目标. 本文研究的光弹性力学数据自动测取和分析程序系统 (称之为 PCP 程序, P—Photoelectric, C—Computer, P—Photoelasticity) 直接对应力光图扫描, 可准确地确定主应力差的整数级和半级, 然后通过样条函数逼近和陈至达的光测应力分析公式建立计算程序, 自动进行光弹性应力分析. 由于输入的数据仅有准确度高的等差线条纹值, 避开误差较大的等倾线数值, 因此本程序较之当前其他研究者的方法为有效准确.

二、基本方程和计算程序安排

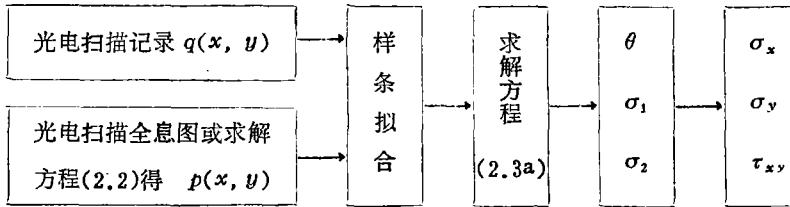
设在所研究的平面应力或平面应变区域 (x, y) 内, 主应力 $\sigma_1 > \sigma_2$, 令主应力差 $q \equiv \sigma_1 - \sigma_2$, 主应力和 $p \equiv \sigma_1 + \sigma_2$. 无论最大主应力的代数值为正或负, 总有 $q \geq 0$, 而 p 的值可有正负. 又令 θ 为 σ_1 方向与 x 轴的夹角, 由 x 轴逆时针量起为正. 欲求的未知量为

$$[\sigma_1, \sigma_2, \theta] \text{ 或 } [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$$

根据陈至达 (1962) 的光测应力基本方程, 在所研究的平面内有

$$\begin{cases} q=q(x, y) & (2.1) \\ \nabla^2 p=0 & (2.2) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{2q} \left[\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \sin 2\theta - \frac{\partial p}{\partial y} \cos 2\theta \right] & (2.3a) \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{1}{2q} \left[\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \sin 2\theta - \frac{\partial p}{\partial x} \cos 2\theta \right] & (2.3b) \end{cases}$$

方程(2.2)和(2.3)是偏微分方程,其解析解对任意边界形状与载荷情况是困难的.有限元法虽然是十分有效的数值方法,但其缺点是在应力集中区的分析往往较光弹性方法的直观可靠与准确性相形逊色.故当前工程设计偏重采用实验-数值相结合的解法,在这种场合,PCP程序是有效的.PCP计算程序安排如下:



偏微分方程的数值解采用差分法,参照改进Euler方法,可将(2.3a)式化为下列差分方程:

$$\begin{aligned} \theta_{i+1}^p &= \theta_i^c + \frac{h}{2q_i} \left[\frac{\Delta q_i}{\Delta y_i} + \frac{\Delta p_i}{\Delta x_i} \sin(2\theta_i^c) - \frac{\Delta p_i}{\Delta y_i} \cos(2\theta_i^c) \right] \\ \theta_{i+1}^c &= \theta_i^c + \frac{h}{2} \left\{ \frac{1}{2q_i} \left[\frac{\Delta q_i}{\Delta y_i} + \frac{\Delta p_i}{\Delta x_i} \sin(2\theta_i^c) - \frac{\Delta p_i}{\Delta y_i} \cos(2\theta_i^c) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2q_{i+1}} \left[\frac{\Delta q_{i+1}}{\Delta y_{i+1}} + \frac{\Delta p_{i+1}}{\Delta x_{i+1}} \sin(2\theta_{i+1}^p) - \frac{\Delta p_{i+1}}{\Delta y_{i+1}} \cos(2\theta_{i+1}^p) \right] \right\} \\ (\theta_{i+1}^c)_{\text{new}} &= \theta_i^c + \frac{h}{2} \left\{ \frac{1}{2q_i} \left[\frac{\Delta q_i}{\Delta y_i} + \frac{\Delta p_i}{\Delta x_i} \sin(2\theta_i^c) - \frac{\Delta p_i}{\Delta y_i} \cos(2\theta_i^c) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2q_{i+1}} \left[\frac{\Delta q_{i+1}}{\Delta y_{i+1}} + \frac{\Delta p_{i+1}}{\Delta x_{i+1}} \sin(2\theta_{i+1}^c)_{\text{old}} - \frac{\Delta p_{i+1}}{\Delta y_{i+1}} \cos(2\theta_{i+1}^c)_{\text{old}} \right] \right\} \end{aligned}$$

其中 θ_i^c —— 第 i 点的修正值;

θ_{i+1}^p —— 第 $i+1$ 点的估算值;

θ_{i+1}^c —— 第 $i+1$ 点的修正值;

$h = x_{i+1} - x_i$

用差分 and 迭代相结合的方法,求解偏微分方程的结果是令人满意的。

三、三次样条函数拟合实验数据及插值

如图1所示,设沿某一截面 x 的明暗条纹光电扫描记录曲线为 A , 条纹级数 $n-x$ 曲线如 B . 用三次样条函数拟合实验数据及插值必须注意符合光弹性的实际情况.当给出任意不等

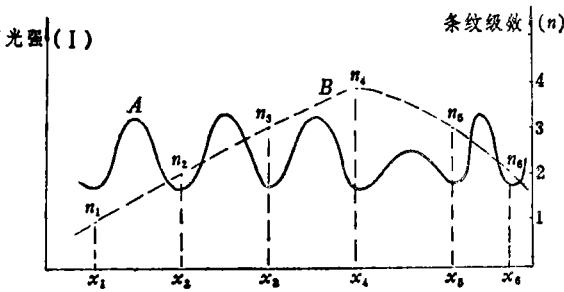


图 1 利用光电记录数据拟合曲线

距的一些光弹性数据时, 可能产生下列情况 (图2), 当 (x_i, n_i) 点是应力光图中的条纹极值点, 拟合的函数值可能出现低于或高于实际极值点的情况。特别是当 $n_i=0$ 时, 拟合函数值可能出现负值, 其不合理性是更为明显的。

为消除上述不合理现象, 本文提出对三次样条函数^[7]的修正方法, 使其适合于拟合光弹性数据: 设 n_i 为区间 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$

内的极值, 令 n 在 i 点的一阶导数 $n'=0$, 对原三次样条函数重新推导如下:

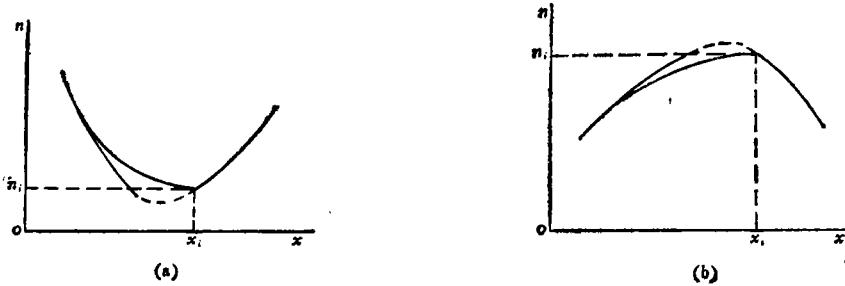


图 2 拟合曲线的不合理部分 (虚线段)

设在点 (x_i, n_i) 和 (x_{i+1}, n_{i+1}) 之间的逼近三次样条函数为

$$n = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \quad (3.1)$$

在此区间的两端值

$$n_i = d_i \quad (3.2)$$

$$n_{i+1} = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i \quad (3.3)$$

其中 a_i, b_i, c_i, d_i 为待定系数, $h_i = x_{i+1} - x_i$.

微分式 (3.1), 令 $s_i (i=1, 2, \dots, N)$ 为 x_i 处的二阶导数, (N 为已知点数) 得

$$s_i = 6a_i(x_i - x_i) + 2b_i = 2b_i$$

$$s_{i+1} = 6a_i(x_{i+1} - x_i) + 2b_i = 6a_i h_i + 2b_i$$

$$a_i = (s_{i+1} - s_i) / 6h_i$$

$$b_i = s_i / 2$$

将 a_i, b_i, d_i 代入 (3.3) 得

$$c_i = (n_{i+1} - n_i) / h_i - (2h_i s_i + h_i s_{i+1}) / 6$$

令任一点 (x_i, n_i) 两侧的一阶导数相等即 $n'_{i+} = n'_{i-}$ 得

$$(n_{i+1} - n_i) / h_i - (2h_i s_i + h_i s_{i+1}) / 6 = 3[(s_i - s_{i-1}) / 6h_{i-1}] h_{i-1}^2 + 2(s_{i-1} / 2) h_{i-1} + (n_i - n_{i-1}) / h_{i-1} - (2s_{i-1} h_{i-1} + s_i h_{i-1}) / 6$$

化简得

$$h_{i-1} s_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) s_i + h_i s_{i+1} = 6[(n_{i+1} - n_i) / h_i - (n_i - n_{i-1}) / h_{i-1}] \quad (3.4)$$

方程 (3.4) 加上适当的边界件可解出 s_i , 则 a_i, b_i, c_i, d_i 可确定。但是如果存在图 2 中所示情况, 拟合曲线将会产生不合理现象, 故将其保凸条件修改如下:

令 $n'_{i+} = (n_{i+1} - n_i) / h_i - (2h_i s_i + h_i s_{i+1}) / 6 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & \vdots & \vdots & \\ & & & h_{N-2} & 2(h_{N-2}+h_{N-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_{N-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} (p_3-p_2)/h_2 - (p_2-p_1)/h_1 - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)_1 h_1 \\ (p_4-p_3)/h_3 - (p_3-p_2)/h_2 \\ \vdots \\ (p_N-p_{N-1})/h_{N-1} - (p_{N-1}-p_{N-2})/h_{N-2} - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)_N h_{N-1} \end{bmatrix}$$

在自由边界上, 设主应力, $\sigma_1 > \sigma_2$, 当 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0$ 时, 则主应力差 $q = \sigma_1 - \sigma_2$ 等于主应力和 $p = \sigma_1 + \sigma_2$; 当 $\sigma_1 = 0, \sigma_2 < 0$ 时, 则 $q = -p$; 所以用三次样条函数拟合等差线数据时, 亦可用上述拟合主应力和的方法确定边界条件。

如果计算截面的端点在应力光图的对称轴上, 则拟合曲线在此点的一阶导数应为零, 即

$$(n')_1 = (n_2 - n_1)/h_1 - (2h_1s_1 + h_1s_2)/6 = 0$$

$$2h_1s_1 + h_1s_2 = 6(n_2 - n_1)/h_1 \tag{3.7}$$

或

$$(n')_N = (n_N - n_{N-1})/h_{N-1} + (h_{N-1}s_{N-1} + 2h_{N-1}s_N)/6 = 0$$

$$h_{N-1}s_{N-1} + 2h_{N-1}s_N = -6(n_N - n_{N-1})/h_{N-1} \tag{3.8}$$

方程 (3.7) 或 (3.8) 及上述的边界条件代入方程组 (3.4), 则方程组 (3.4) 亦可解。

根据实际情况, 适当地选取边界条件, s_i 可由方程组 (3.4) 求出, 三次样条函数的各系数 a_i, b_i, c_i, d_i 可确定, 利用此函数可以进行插值。

本文提出的对样条函数的修正以及边界条件, 使此类三次样条函数更适合于拟合光弹性实验数据。通过实例计算表明修正后的三次样条函数, 不仅消除了用光滑样条函数拟合光弹性数据的局部不合理现象而且插值精度也较高。

四、计算实例

对径受压圆盘 (直径 40mm), 计算距圆心 10mm 的水平截面 (截面长度为 17.32mm) 的各应力分量。

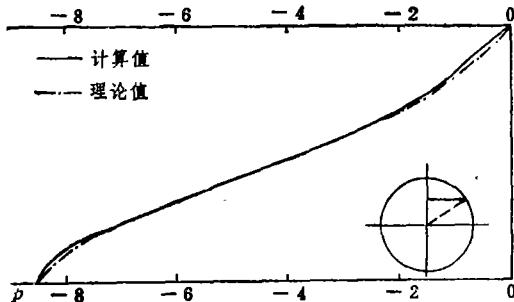


图 4 样条插值 (等和线 p) 与理论值比较 (最大相对偏差为 3.5%)

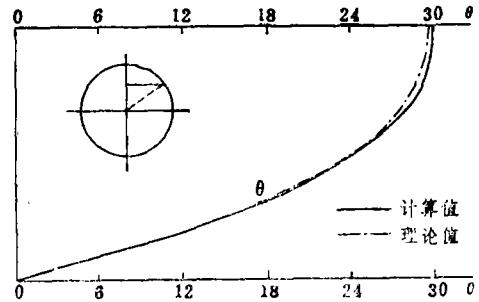


图 5 程序计算的主应力方向角 θ 与理论值比较 (最大偏差为 1.02度)

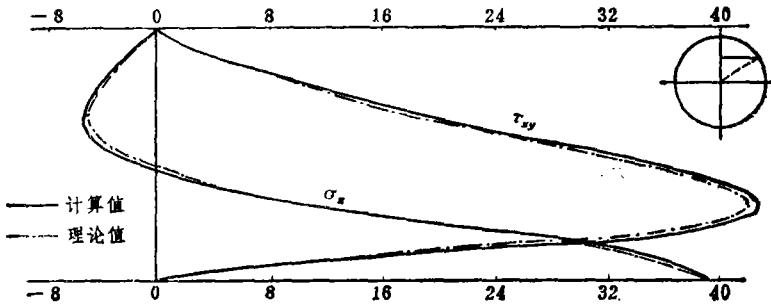


图6 程序计算的 σ_x 和 τ_{xy} 与理论值比较
(最大偏差为 0.8kg/cm^2)

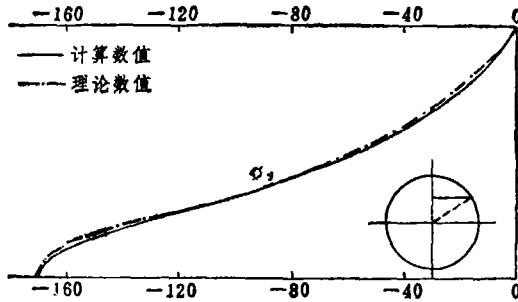


图7 程序计算的 σ_y 与理论值比较
(最大偏差 0.8kg/cm^2)

关于条纹级数的光电扫描取值方法，见参考文献[8]，在这里不再赘述。实验装置在该文中也有详细叙述。

五、结 论

本文提出的PCP程序系统是提高光弹性实验的测量精度，简化实验程序，缩短应力分析时间的有效方法。

- (1) PCP程序系统由光电扫描直接取值方法简单，准确度高。
- (2) 应用陈至达(1962)的基本公式，减少了数据误差对结果的影响。
- (3) 本文导出三次样条函数的修正方法，使其适合于光弹性实验数据的实际情况，输入数据量达到最低限度。
- (4) 本文方法可进一步推广到三维应力分析，这方面工作有待进行。

感谢：中国矿院北京研究生部材料力学实验室詹明宇、王雅舟等给予很大帮助，谨致谢意。

参 考 文 献

- [1] 陈至达, 根据应力光图直接解答弹性力学平面问题的方法, *力学学报*, 5, 3(1962).
- [2] Redner, S., New automatic polariscope system, *Experimental Mechanics*, Dec. (1974), 486-491.
- [3] Carter, Alan L., Obtaining stress maps from photoelastic data using a digital computer, *Experimental Mechanics*, March (1968), 122-127.
- [4] Rowlands, R. E., Acquisition and processing of photomechanical information, *VDI-Berichte*, 313 (1978), 83-87.
- [5] Allison, I. M. and P. Nurse, Optimisation of photoelastic stress separation processings, *VDI-Berichte*, 313 (1978), 41-44.
- [6] Kuske, Albrecht., Separation of principal stress in photoelasticity by means of a computer, *Strain*, April (1979), 43-49.
- [7] Gerald, Curtis F., *Applied Numerical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, (1978).
- [8] 安里干, 实验应力分析的光电-计算机自动数据处理 (PCP) 程序研究, 中国矿院学位论文, (1982).

Photoelectric-Computer Data Processing (PCP) Program in Experimental Photo-Stress Analysis

An Li-chan Chen Zhi-da

(Graduate School, China Institute of Mining, Beijing)

Abstract

In this paper, a photoelectric-computer data processing (PCP) program in experimental photo-stress analysis is presented. Basic equation of photoelastic stress analysis by Chen (1962) is adopted; and a cubic spline function suitable for processing of photoelastic data is derived. This program requires least data input to computer comparing with any other programs. It has been proved that the PCP program is more accurate and requires least computing time than other methods so far as we know.