应用数学和力学，第4卷第5期（1983年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

旋转充液腔体的有限扰动稳定问题

李　骊

（天津大学，1982年10月12日收到）

摘　要

本文中，我们在不作任何近似的情况下，用严格的数学方法研究了旋转充液腔体在有限扰动下的稳定问题．在已知旋转充液腔体定常解分布的情况下，利用本文方法有可能给出确切的稳定区域，并且有可能对腔体的运动性状作出全面的定性分析．

关于旋转充液腔体的稳定问题，无论在理论上或在应用上都有重要意义，因此有不少人对此加以研究．由于这是一个包括常微分、偏微分和积分方程组的混合系统，问题十分复杂，所以一般研究时都作了某种简化．或者对液体粘度加以限制，仅考虑大的或小的粘度的情况[1]，或者利用 Жуковский 的等效原则或部分变元稳定理论将无限多自由度近似化为有限多自由度，然后再用 Ляпунов 方法加以处理[2]，或者，只保留原方程的线性部分，然后利用变分原理或其他方法进行研究[3,4]．显然，所有这些方法都是近似的，因而所得的稳定判据就不能不带有局限性，特别是它们都无法推广应用到研究有限扰动的情况，而这正是人们所期望加以解决的．在本文中，我们在对原方程不作任何近似的情况下，用严格的数学方法研究了关于旋转充液腔体在有限扰动下的稳定问题．在已知旋转充液腔体定常解分布的情况下，利用本文的方法有可能给出确切的稳定区域，并且有可能对腔体的运动性状作出全面的定性分析．

一、各坐标系的选取及其相互关系

我们选取各坐标系如下：定坐标系 $O\xi_1\xi_2\xi_3$．牽连转动坐标系 $Ox_1x_2x_3$．其中 Ox_3 轴与 $O\xi_3$ 轴相重合，并绕后者以匀角速度 Ω 转动，它表示旋转充液腔体的某一定常解．扰动坐标系 $Ox_1'x_2'x_3'$，它与充液腔体相固结，其中三个轴分别指向腔体与液体的三个惯性主轴，它表示旋转充液腔体受扰动后的位置（图1）．

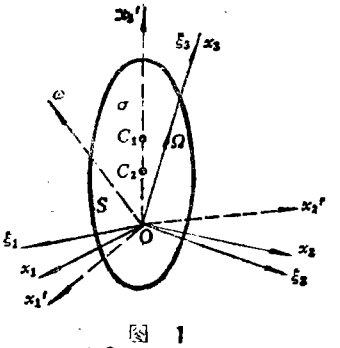

图　1

如以 $\bar{i}_1$，$\bar{i}_2$，$\bar{i}_3$ 与 $\bar{i}_1'$，$\bar{i}_2'$，$\bar{i}_3'$ 分别表示定坐标系 $O\xi_1\xi_2\xi_3$ 与扰动坐标系 $Ox_1'x_2'x_3'$ 各轴的单位矢量，则有

$$\bar{I}'=G\bar{I} \tag{1.1}$$

其中

$$\bar{I}'=\begin{pmatrix}\bar{i}_1'\\ \bar{i}_2'\\ \bar{i}_3'\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{pmatrix},\quad \bar{I}=\begin{pmatrix}\bar{i}_1\\ \bar{i}_2\\ \bar{i}_3\end{pmatrix},\qquad g_{mn}=\cos(\widehat{\bar{i}_m',\bar{i}_n}) \tag{1.2}$$

因为G表示的乃一正交变换，故其中诸元素满足

$$\sum_{m=1}^{3} g_{mn}^2=1 \qquad (n=1,2,3) \tag{1.3}$$

$$\sum_{s=1}^{3} g_{ms}g_{ns}=0 \qquad (m,n=1,2,3,\ m\neq n) \tag{1.4}$$

由于扰动坐标系$Ox_1'x_2'x_3'$在单位时间内位置的变化相当于绕某一瞬时角速度$\bar{\omega}$的转动，因而，按照Poisson公式，有

$$\frac{d\bar{I}'}{dt}=\bar{\omega}\times\bar{I}' \tag{1.5}$$

将(1.1)两端对时间求导数，注意$\bar{I}$为常矢量并利用(1.5)，得

$$\frac{dG}{dt}\bar{I}=\bar{\omega}\times G\bar{I} \tag{1.6}$$

详细写出，就是

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \omega_2 g_{13}-\omega_3 g_{12} & \omega_3 g_{11}-\omega_1 g_{13} & \omega_1 g_{12}-\omega_2 g_{11} \\ \omega_2 g_{23}-\omega_3 g_{22} & \omega_3 g_{21}-\omega_1 g_{23} & \omega_1 g_{22}-\omega_2 g_{21} \\ \omega_2 g_{33}-\omega_3 g_{32} & \omega_3 g_{31}-\omega_1 g_{33} & \omega_1 g_{32}-\omega_2 g_{31} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

二、腔内液体的运动方程

腔内液体为不可压缩粘性液体，因此，它服从以下两个方程：

1. Navier-Stokes 方程

$$\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{1}{\rho}\nabla(-p\hat{I}+\mu\hat{\tau}) \tag{2.1}$$

其中

$\bar{v}$——绝对速度，∇——Hamilton 算子，

ρ——液体密度，μ——液体粘性系数，

p——液体压力，$\hat{I}$——单位张量，

$\hat{\tau}$——变形速度张量，其形式为

$$\hat{\tau}=\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$\tau_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

2. 连续方程

$$\nabla\bar{v}=0 \tag{2.3}$$

当液体在图示位置以匀角速度Ω绕Ox_3轴作整体转动时，如果此时液体速度为$\bar{v}_e$，压力为p_0，并注意到此时$\hat{\tau}=0$，则(2.1)，(2.3)具有下述形式

$$\frac{d\bar{v}_e}{dt}=\frac{1}{\rho}\nabla(-p_0\hat{I}) \tag{2.4}$$

$$\nabla\bar{v}_e=0 \tag{2.5}$$

当扰动运动时，如液体相对 $Ox_1x_2x_3$ 的速度为 $\bar{v}_r$，压力为 p，则此时(2.1)具有下述形式：

$$\frac{d\bar{v}_r}{dt}+2\bar{\Omega}\times\bar{v}_r+\frac{d\bar{v}_e}{dt}=\frac{1}{\rho}\nabla(-p\hat{I}+\mu\hat{\tau}) \tag{2.6}$$

此外，由于 $\bar{v}=\bar{v}_e+\bar{v}_r$，则由(2.3)，(2.5)可得

$$\nabla\bar{v}_r=0 \tag{2.7}$$

(2.6)减去(2.4)并令

$$p_1=p-p_0 \tag{2.8}$$

于是得

$$\frac{d\bar{v}_r}{dt}+2\bar{\Omega}\times\bar{v}_r=\frac{1}{\rho}\nabla(-p_1\hat{I}+\mu\hat{\tau}) \tag{2.9}$$

将上式标乘以 $\bar{v}_r$，并注意到 $\bar{v}_r\cdot(\bar{\Omega}\times\bar{v}_r)=0$，同时，对整个液体体积 σ 求积分，得

$$\rho\iiint_{(\sigma)}\bar{v}_r\cdot\frac{d\bar{v}_r}{dt}\,d\sigma=\iiint_{(\sigma)}\bar{v}_r\cdot\nabla(-p_1\hat{I}+\mu\tau)\,d\sigma \tag{2.10}$$

现分别计算上式各项积分结果：

(1) $$\rho\iiint_{(\sigma)}\bar{v}_r\cdot\frac{d\bar{v}_r}{dt}\,d\sigma=\frac{d}{dt}\iiint_{(\sigma)}\frac{1}{2}\rho\bar{v}_r^2\,d\sigma \tag{2.11}$$

(2) 利用分部积分以及(2.7)，得

$$\iiint_{(\sigma)}\bar{v}_r\cdot\nabla(-p_1\hat{I})\,d\sigma=\iint_{(S)}\bar{v}_r\cdot(-p_1\hat{I})\bar{n}\,dS \tag{2.12}$$

其中 S 乃液体与腔体内壁的接触面，$\bar{n}$ 表示 dS 处的外法线。

(3) 利用分部积分以及(2.2)，得

$$\iiint_{(\sigma)}\bar{v}_r\cdot\nabla(\mu\hat{\tau})\,d\sigma=\iint_{(S)}\bar{v}_r\cdot(\mu\hat{\tau})\bar{n}\,dS-\frac{\mu}{2}\iiint_{(\sigma)}\sum_{i,j=1}^{3}\tau_{ij}^2\,d\sigma \tag{2.13}$$

将(2.11)，(2.12)，(2.13)代入(2.10)，得

$$\frac{d}{dt}\iiint_{(\sigma)}\frac{1}{2}\rho\bar{v}_r^2\,d\sigma=\iint_{(S)}\bar{v}_r\cdot(-p_1\hat{I}+\mu\hat{\tau})\bar{n}\,dS-\frac{\mu}{2}\iiint_{(\sigma)}\sum_{i,j=1}^{3}\tau_{ij}^2\,d\sigma \tag{2.14}$$

三、腔体的转动方程

设腔体沿 $Ox_1'\,x_2'\,x_3'$ 各轴的惯性主矩分别为 A_1，B_1，C_1，则其受扰后的动量矩为

$$\bar{L}_1=(\bar{\Omega}+\bar{\omega})\hat{J}_1 \tag{3.1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\hat{J}_1&=G^T\hat{J}_1'G\\ \hat{J}_1'&=\begin{pmatrix}A_1&0&0\\0&B_1&0\\0&0&C_1\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

详细写出，就是

$$
\hat{J}_1=\begin{pmatrix}
A_1+\frac{g_{12}^2+g_{13}^2}{2}A-\frac{g_{21}^2}{2}B-\frac{g_{31}^2}{2}C & -\frac{g_{11}g_{12}}{2}A-\frac{g_{21}g_{22}}{2}B-\frac{g_{31}g_{32}}{2}C & -\frac{g_{11}g_{13}}{2}A-\frac{g_{21}g_{23}}{2}B-\frac{g_{31}g_{33}}{2}C \\
\text{对} & B_1-\frac{g_{12}^2}{2}A+\frac{g_{21}^2+g_{23}^2}{2}B-\frac{g_{32}^2}{2}C & -\frac{g_{12}g_{13}}{2}A-\frac{g_{22}g_{23}}{2}B-\frac{g_{32}g_{33}}{2}C \\
 & \text{称} & C_1-\frac{g_{13}^2}{2}A-\frac{g_{23}^2}{2}B+\frac{g_{31}^2+g_{32}^2}{2}C
\end{pmatrix} \tag{3.3}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
A&=B_1+C_1-A_1\\
B&=C_1+A_1-B_1\\
C&=A_1+B_1-C_1
\end{aligned}\right\} \tag{3.4}
$$

腔体的动量矩方程则为

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}[(\bar{\Omega}+\bar{\omega})\hat{J}_1]+\bar{\Omega}\times[(\bar{\Omega}+\bar{\omega})\hat{J}_1]\\
&=-\iint_{(\bar{S})}\bar{r}\times(-p\hat{I}+\mu\hat{\tau})\bar{n}dS+h_1(g_{31}\bar{i}_1+g_{32}\bar{i}_2+g_{33}\bar{i}_3)\times(-M_1g\bar{i}_3)
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

其中

$\bar{r}$——腔体内壁S上一点到O之矢径

M_1——腔体质量

h_1——腔体重心C_1沿Ox_3'轴到O之距离

g——重力加速度

上式等号右端第一项所以取负号，是由于腔体在S处所受之力与液体在S处所受之力方向相反之故。

此外，当液体在图示位置以匀角速度Ω绕Ox_3轴作整体转动时，其动量矩为

$$\bar{L}_2=\bar{\Omega}\hat{J}_2 \tag{3.6}$$

其中

$$\hat{J}_2=G^T\hat{J}_2'G,\quad \hat{J}_2'=\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

其动量矩方程为

$$\bar{\Omega}\times(\bar{\Omega}\hat{J}_2)=\iint_{(S)}\bar{r}\times(-p_0\hat{I})\,\bar{n}dS+h_2(g_{31}\bar{i}_1+g_{32}\bar{i}_2+g_{33}\bar{i}_3)\times(-M_2g\bar{i}_3) \tag{3.8}$$

其中

M_2——液体质量

h_2——液体重心C_2沿Ox_3'轴到O之距离

A_2,B_2,C_2——液体沿$Ox_1'x_2'x_3'$各轴的惯性主矩

p_0——即(2.4)中的p_0

将(3.5)与(3.8)相加并注意到(2.8)，于是得

$$\frac{d}{dt}[(\bar{\Omega}+\bar{\omega})\hat{J}_1]+\bar{\Omega}\times[\bar{\omega}\hat{J}_1+\bar{\Omega}(\hat{J}_1+\hat{J}_2)]$$

$$=-\iint_{(S)}\bar{r}\times(-p_1\hat{I}+\mu\hat{\tau})\bar{n}dS-(M_1gh_1+M_2gh_2)(g_{31}\bar{i}_1+g_{32}\bar{i}_2+g_{33}\bar{i}_3)\times\bar{i}_3 \tag{3.9}$$

将上式标乘以$\bar{\omega}$，并对各项适当加以归并，得

$$\bar{\omega}\cdot\frac{d}{dt}[\bar{\omega}\hat{J}_1]+\bar{\omega}\cdot\left\{\frac{d}{dt}[\bar{\Omega}\hat{J}_1]+\bar{\Omega}\times(\bar{\omega}\hat{J}_1)\right\}+\bar{\omega}\cdot[\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}(\hat{J}_1+\hat{J}_2)]$$

$$=-\bar{\omega}\cdot\iint_{(S)}\bar{r}\times(-p_1\hat{I}+\mu\hat{\tau})\bar{n}dS-(M_1gh_1+M_2gh_2)\bar{\omega}$$

$$\cdot[(g_{31}\bar{i}_1+g_{32}\bar{i}_2+g_{33}\bar{i}_3)\times\bar{i}_3] \tag{3.10}$$

现分别计算上式各项：

(1) $$\bar{\omega}\cdot\frac{d}{dt}[\bar{\omega}\hat{J}_1]=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\hat{J}_1\cdot\bar{\omega}\right) \tag{3.11}$$

(2) 由(1.7)，(3.3)，(3.4)得

$$\frac{d}{dt}[\bar{\Omega}\hat{J}_1]+\bar{\Omega}\times(\bar{\omega}\hat{J}_1)=\Omega\bar{\omega}\times\bar{a}$$

其中 $\bar{a}=a_1\bar{i}_1+a_2\bar{i}_2+a_3\bar{i}_3$

$a_i=g_{1i}g_{13}A+g_{2i}g_{23}B+g_{3i}g_{33}C \qquad (i=1,2,3)$

A,B,C由(3,4)所定义

从而

$$\bar{\omega}\cdot\left\{\frac{d}{dt}[\bar{\Omega}\hat{J}_1]+\bar{\Omega}\times(\bar{\omega}\hat{J}_1)\right\}=0 \tag{3.12}$$

(3) 由于 $\hat{J}_1+\hat{J}_2=G^T(\hat{J}_1'+\hat{J}_2')G$，因而如将其展开，其形式与(3.3)完全相同，不过其中 A_1，B_1，C_1 此时相应为 A_1+A_2，B_1+B_2，C_1+C_2；A,B,C 此时相应为

$$A=B_1+B_2+C_1+C_2-A_1-A_2$$
$$B=C_1+C_2+A_1+A_2-B_1-B_2$$
$$C=A_1+A_2+B_1+B_2-C_1-C_2$$

然后，再利用(1.3)，(1.7)可得

$$\bar{\omega}\cdot[\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}(\hat{J}_1+\hat{I}_2)]=\frac{d}{dt}\left[\frac{\Omega^2}{2}(C_1+C_2-A_1-A_2)g_{13}^2\right.$$
$$\left.+\frac{\Omega^2}{2}(C_1+C_2-B_1-B_2)g_{23}^2\right] \tag{3.13}$$

(4) 注意到 $\bar{\omega}\times\bar{r}=\bar{v}_r$，于是得

$$\bar{\omega}\cdot\iint_{(S)}\bar{r}\times(-p_1\hat{I}+\mu\hat{\tau})\bar{n}\,dS=\iint_{(S)}\bar{v}_r\cdot(-p_1\hat{I}+\mu\hat{\tau})\bar{n}\,dS \tag{3.14}$$

(5) 由(1.7)得

$$(M_1gh_1+M_2gh_2)\bar{\omega}\cdot[(g_{31}\bar{i}_1+g_{32}\bar{i}_2+g_{33}\bar{i}_3)\times\bar{i}_3]$$
$$=\frac{d}{dt}[(M_1gh_1+M_2gh_2)g_{33}] \tag{3.15}$$

将(3.11)～(3.15)各式代入(3.10)，得

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\hat{J}_1\cdot\bar{\omega}+\frac{\Omega^2}{2}(C_1+C_2-A_1-A_2)g_{13}^2\right.$$
$$\left.+\frac{\Omega^2}{2}(C_1+C_2-B_1-B_2)g_{23}^2+(M_1gh_1+M_2gh_2)g_{33}\right\}$$
$$=-\iint_{(S)}\bar{v}_r\cdot(-p_1\hat{I}+\mu\hat{\tau})\bar{n}\,dS \tag{3.16}$$

将(2.14)与(3.16)相加，并令

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{\Omega^2}{2}(C_1+C_2-A_1-A_2)\\ b&=\frac{\Omega^2}{2}(C_1+C_2-B_1-B_2)\\ c&=\frac{1}{2}(M_1gh_1+M_2gh_2)\end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

于是得

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\hat{J}_1\cdot\bar{\omega}+\iiint_{(\sigma)}\frac{1}{2}\rho\bar{v}_r^2\,d\sigma+ag_{13}^2+bg_{23}^2+2cg_{33}\right\}$$
$$=-\frac{\mu}{2}\iiint_{(\sigma)}\sum_{i,j=1}^{3}\tau_{ij}^2\,d\sigma \tag{3.18}$$

如令

$$T=\frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\overset{*}{J}_1\cdot\bar{\omega}+\iiint_{(\sigma)}\frac{1}{2}\rho\bar{v}_r^2 d\sigma \tag{3.19}$$

$$U=ag_{13}^2+bg_{23}^2+2c(g_{33}-1) \tag{3.20}$$

$$R=\frac{\mu}{2}\iiint_{(\sigma)}\sum_{i,j=1}^{3}\tau_{ij}^2 d\sigma \tag{3.21}$$

并取

$$V=T+U \tag{3.22}$$

则由(3.18)可得

$$\frac{dV}{dt}=-R \tag{3.23}$$

上式中T,U,R均有明确的物理意义：T为扰动动能函数，U为扰动势能函数，R为扰动耗散函数。

四、函数U与R的性质

为了便于对稳定性进行讨论，需要首先研究函数U与R的性质。

先研究U的性质。为此，将(3.20)重写如下：

$$U=ag_{13}^2+bg_{23}^2+2c(g_{33}-1) \tag{3.20}$$

其中g_{13},g_{23},g_{33}按照(1.3)满足条件

$$g_{13}^2+g_{23}^2+g_{33}^2=1 \tag{4.1}$$

上式的几何意义为一半径等于1的球面，而U即为定义在此球面上的函数。为了下面讨论方便起见，我们称此球面为K，并称$g_{33}\geqslant 0$部分为K的上半球面。令

$$\left.\begin{aligned}g_{13}&=\sqrt{1-g_{33}^2}\cos\theta\\ g_{23}&=\sqrt{1-g_{33}^2}\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

则(4.1)恒被满足。将上式代入(3.20)，得

$$U=(1-g_{33}^2)[(a-b)\cos^2\theta+b]-2c(1-g_{33}) \tag{4.3}$$

在以下的讨论中，我们假定

$$a>b>c>0 \tag{4.4}$$

现研究在上述条件下U之值在K的上半球面的变化情况。为此，我们可对(4.3)分别求对g_{33}与θ的偏导数。例如，对g_{33}的偏导数是

$$\frac{\partial U}{\partial g_{33}}=-2g_{33}[(a-b)\cos^2\theta+b]+2c \tag{4.5}$$

令$\frac{\partial U}{\partial g_{33}}=0$，得

$$g_{33}^{(m)}=\frac{c}{(a-b)\cos^2\theta+b} \tag{4.6}$$

上式在(g_{33},θ)极坐标中表示一封闭曲线$U^{(m)}$，由于U沿着g_{33}方向将在此曲线上各点到达极值，故我们称$U^{(m)}$为U的极值曲线。此外，在条件(4.4)之下有

$$0<g_{33}^{(m)}<1 \tag{4.7}$$

因而，此曲线位于K的上半球面内。如果，我们称此曲线所包围的区域为Γ，则$g_{33}=1$（它对应着某一定常解）必为Γ的一个内点，正如图2所示那样。

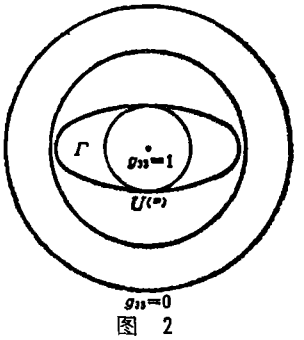

图 2

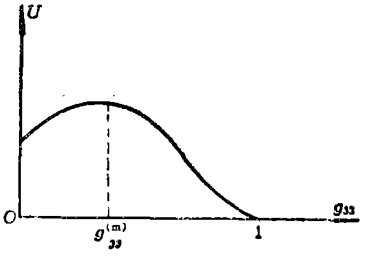

图 3

当$g_{33}<g_{33}^{(m)}$时，$\frac{\partial U}{\partial g_{33}}>0$，$g_{33}>g_{33}^{(m)}$时，$\frac{\partial U}{\partial g_{33}}<0$，此外由(4.3)知

$$U=\begin{cases}0 & \text{当 } g_{33}=1\\ U_{\max} & \text{当 } g_{33}=g_{33}^{(m)}\\ [(a-b)\cos^2\theta+b]-2c & \text{当 } g_{33}=0\end{cases}$$

据此可得U随g_{33}的变化曲线如图3。特别是，在$g_{33}^{(m)}\leqslant g_{33}\leqslant 1$亦即在$\Gamma$域内，$U$为一定正函数，并在$g_{33}=1$处达到极小值（其值为零）。

至于U对θ的偏导数，则为

$$\frac{\partial U}{\partial\theta}=-(1-g_{33}^2)(a-b)\sin 2\theta \tag{4.8}$$

令$\frac{\partial U}{\partial\theta}=0$，得$\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$，并且$\theta=0,\pi$时$U$为极大，$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$时$U$为极小。据此可得$U$随$\theta$的变化曲线如图4（图中所示为$g_{33}\geqslant g_{33}^{(m)}$的情况）。

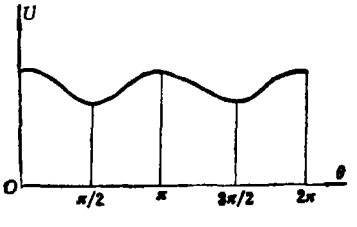

图 4

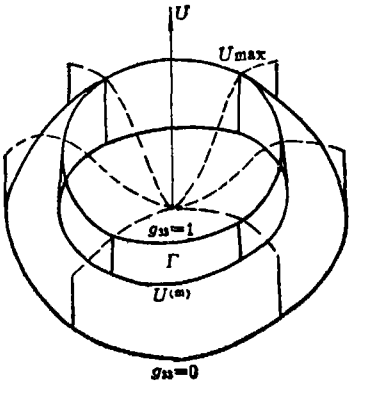

图 5

综上所述，可得在球面K的上半球面内U之值的变化情况如图5所示。利用Lagrange乘子法可以求得U在$U^{(m)}$上的极值如下：

当$\theta=0,\pi$，$g_{33}^{(m)}=\frac{c}{a}$时

$$(U_{max})_{max}=\left(1-\frac{c}{a}\right)(a-c) \tag{4.9}$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $g_{33}^{(m)}=\frac{c}{b}$时

$$(U_{max})_{min}=\left(1-\frac{c}{b}\right)(b-c) \tag{4.10}$$

现转入研究函数 R 的性质。为此，将(3.21)重写如下：

$$R=\frac{\mu}{2}\iiint_{(\sigma)}\sum_{i,j=1}^{3}\tau_{ij}^2\,d\sigma \tag{3.21}$$

现证明，只有对于腔体的某一定常解，亦即只有对于液体随同腔体一起以某一匀角速度绕定轴作整体转动这一情况，才有 $R\equiv0$。事实上，设 $R\equiv0$，这意味着此时液体将以某一角速度 $\bar{\omega}$ 随腔体一起作整体转动，因而有 $\bar{v}_r=\bar{\omega}\times\bar{r}$ 与 $\tau_{ij}=0$。将这一关系代入(2.9)，得

$$\frac{d}{dt}(\bar{\omega}\times\bar{r})+2\bar{\Omega}\times\bar{v}_r=\frac{1}{\rho}\nabla(-p_1)$$

然后，两端矢乘以 ∇，并注意$\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{v}_r$以及(2.7)，于是得

$$-\left(\nabla\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)\bar{r}+(\nabla\bar{r})\frac{d\bar{\omega}}{dt}-[\nabla(\bar{\omega}+2\bar{\Omega})]\bar{\omega}\times\bar{r}=0 \tag{4.11}$$

将前述关系代入(3.18)并注意

$$\iiint_{(\sigma)}\frac{1}{2}\rho\bar{v}_r^2\,d\sigma=\iiint_{(\sigma)}\frac{1}{2}\rho(\bar{\omega}\times\bar{r})^2d\sigma=\frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\mathring{J}_2\cdot\bar{\omega}$$

于是得

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot(\mathring{J}_1+\mathring{J}_2)\cdot\bar{\omega}+ag_{13}^2+bg_{23}^2+2cg_{33}\right\}\equiv0 \tag{4.12}$$

在(4.11)中的 $\bar{r}$，乃液体内每一点到 O 点的矢径，这些矢径在大小与方向上都是各不相同的。因此，(4.11)所表示的实质上不是一个方程，而是一组无数多个方程。要想使得 $\bar{\omega}$对这无数多个方程都同时满足，则只有$\bar{\omega}$等于常矢量才有可能。事实上，对任一确定的 $\bar{\omega}$，我们总可选取这样的 $\bar{r}$，使(4.11)中包含的三个矢量$\left(\nabla\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)\bar{r}$, $(\nabla\bar{r})\frac{d\bar{\omega}}{dt}$与 $[\nabla(\bar{\omega}+2\bar{\Omega})]\bar{\omega}\times\bar{r}$ 不在同一平面内，亦即它们是线性无关的，而且满足这样条件的$\bar{r}$可以选取无数多个。显然，要想使这无数多组的线性无关三矢量之和同时为零，只有每一矢量都为零才有可能。据此，即可得出必有 $\bar{\omega}$ 等于常矢量这一结论。这表明此时液体将随同腔体一起以某一不变角速度 $\bar{\Omega}+\bar{\omega}$作整体转动，亦即充液腔体此时必处于某一定常解。如是，即证明了上面的论断。

此外，$\bar{\omega}$ 还需同时满足(4.12)，而在$\bar{\omega}$ 等于常矢量情况下，(4.12)中的$\frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot(\mathring{J}_1+\mathring{J}_2)\cdot\bar{\omega}$ 所表示的乃是腔体与液体一起绕某定轴以匀角速度 ω 转动的动能，因而它是一个常数，从而它对时间的导数等于零。在此情况下，(4.12)就化为

$$\frac{d}{dt}(ag_{13}^2+bg_{23}^2+2cg_{33})\equiv0 \tag{4.13}$$

上式也可写为

$$\frac{d}{dt}\left[ag_{13}^2+bg_{23}^2+2c(g_{33}-1)\right]\equiv 0 \tag{4.14}$$

由(3.20)知，这实际上就是

$$\frac{dU}{dt}\equiv 0 \tag{4.15}$$

由此，并注意到(4.3)，于是得

$$U=(1-g_{33}^2)\left[(a-b)\cos^2\theta+b\right]+2c(g_{33}-1)=\text{常数} \tag{4.16}$$

上述常数，由定常解$\bar{\Omega}+\bar{\omega}$的转轴在球面$K$上的坐标$(g_{33},\theta)$而确定.

反之，如充液腔体不处于某一定常解，亦即液体并不随同腔体一起作整体转动，在此情况下将有$\tau_{ij}\not\equiv 0$，从而有$R\not\equiv 0$.

综上所述，可得结论如下：

$R\equiv 0$的必要与充分条件是充液腔体处于某一定常解.

五、旋转充液腔体的有限扰动稳定问题

前面已提到，对图1所示的充液腔体，它有这样的定常解，即以匀角速度Ω绕$O\xi_3$的正半轴而转动. 给Ω以不同的值，则得到绕$O\xi_3$正半轴转动的不同的定常解. 显然，所有这些定常解组成以$O\xi_3$正半轴为转轴的定常解集合，这一集合我们以Ω^+表示之. 至于以某一特定角速度绕$O\xi_3$正半轴转动的定常解，则称为Ω^+集合中的一个元素.

定义 如果充液腔体的受扰运动当$t\to\infty$时渐近趋于Ω^+集合的某一元素，则称Ω^+为渐近稳定的.

如果，Ω^+集合中的某一元素Ω_1是我们所研究的未扰运动，那么，Ω^+的渐近稳定性只是表明，当我们给充液腔体以扰动后，其受扰运动将渐近趋于Ω^+集合的某一元素Ω_2，而Ω_2与Ω_1一般并不相同. 因此，对未扰运动Ω_1来讲，Ω^+的渐近稳定性只是保证其转轴位置是渐近稳定的，至于角速度则并不一定稳定，而是相差一个常数.

定理1. 对于定常解集Ω^+，如果有

(1) $a>b>c>0$;

(2) 初始扰动能量$V_0=T_0+U_0<(U_{\max})_{\min}=\left(1-\frac{c}{b}\right)(b-c)$;

(3) 在Γ域内无其他定常解，

则当$(g_{33}^{(0)},\ \theta^{(0)})\in\Gamma$时，定常解集$\Omega^+$为渐近稳定，而当$(g_{33}^{(0)},\ \theta^{(0)})\bar{\in}\Gamma$时，$\Omega^+$为不稳定.

证：先证渐近稳定性. 由(3.23)知，对任何$t\geqslant t_0$，有

$$V(V_0,\ t)=T(t)+U(t)<V_0<(U_{\max})_{\min}$$

由于$T(t)\geqslant 0$，故知

$$U(t)<(U_{\max})_{\min}$$

因而，如果$(g_{33}^{(0)},\ \theta^{(0)})\in\Gamma$，那么，对任何$t\geqslant t_0$，$(g_{33}(t),\ \theta(t))$将不会越过$\Gamma$的边界$U^{(m)}$而始终停留在此域内. 又在$\Gamma$内有$V(V_0,\ t)\geqslant 0$与$\frac{dV(V_0,t)}{dt}\leqslant 0$，故$V(V_0,t)$必有极限$V^*$存在，亦即必有

$$\lim_{t\to\infty} V(V_0,t)=V^*$$

现证，V^*所表示的状态必为某一定常解．如其不然，对于V^*而言，必有$R\neq 0$．所以，如果我们选取V^*为初始扰动，则对$V(V^*,t)$而言，将有$\frac{dV(V^*,t)}{dt}\leqslant 0$，故同理可知，必有$V^{**}$存在，使得

$$\lim_{t\to\infty} V(V^*,t)=V^{**}$$

其中V^{**}是与V^*相异的两点．前面已假定，V^*是$V(V_0,t)$的极限点，故必存在充分大的t_1，使得$t\geqslant t_1$时$V(V_0,t)$位于V^*充分小的邻域内；又由于V^{**}是$V(V^*,t)$的极限点以及V对初值的连续依赖性（这可由(3.23)看出），故知必存在充分大的t_2 $(t_2>t_1)$，使得$t\geqslant t_2$时$V(V_0,t)$又位于V^{**}充分小的邻域内，于是得出矛盾．可见，V^*所表示的状态必为某一定常解．又由于假定在Γ域内无其他定常解，故V^*所表示的定常解必为Ω^+内的某一元素．于是，定理第一部分即被证明．

现证定理的第二部分，即当$(g_{33}^{(0)},\theta^{(0)})\in\Gamma$时$\Omega^+$为不稳定．前面已证明，在满足定理条件(2)的情况下，由(3.23)可知，对任何$t\geqslant t_0$，有

$$U(t)<(U_{\max})_{\min}$$

因而，当$(g_{33}^{(0)},\theta^{(0)})\in\Gamma$时，$(g_{33}(t),\theta(t))$将不会越过$\Gamma$的边界$U^{(m)}$而始终停留在$\Gamma$之外．这就表明，$\Omega^+$是不稳定的．

在小扰动情况下，Руменцев[2]曾得出：在满足$a>b>c>0$这一条件下，Ω^+内的任一元素作为未扰运动，它的转轴位置与角速度大小都是渐近稳定的．而本定理则指出，在满足$a>b>c>0$这一条件下：

(1) 就未扰运动转轴位置而言，在有限扰动情况下，它可以是渐近稳定的，但也可以是不稳定的，问题取决于初始扰动能量的大小和初始扰动位置；

(2) 就未扰运动的角速度大小而言，在有限扰动情况下它可以是不稳定的，在小扰动情况下它也只是稳定而决不可能渐近稳定．为了说明这一点，可以举出如下的例子．设图1所示的充液腔体的未扰运动为绕$O\xi_3$正半轴的匀角速Ω的转动，现在让转轴不动，而只是对角速度Ω大小予以扰动，使之减速，由于腔内液体与腔体之间的粘性摩阻只能起能量耗散作用，所以充液腔体最后所达到的角速度值只可能比Ω小而决不会再次等于Ω的．

下面讨论Γ的边界$U^{(m)}$与重心位置的关系．为此，令

$$h=\frac{M_1h_1+M_2h_2}{M_1+M_2} \tag{4.17}$$

显然，h乃整个腔体与液体总的重心沿Ox_3'轴到O之距离，并且h与前述之c具有相同的符号．

(1) $h>0$，这就是前面第四节中所讨论的情况，此时$U^{(m)}$位于K的上半球面内．

(2) $h<0$，这一情况与上一情况刚好相反，此时$U^{(m)}$位于K的下半球面内．

(3) $h=0$，由(3.17)知这时有$c=0$，因而由(4.6)得$g_{33}^{(m)}=0$，这表示此时$U^{(m)}$位于K的赤道上．而定理1中的条件(1)也相应变为$a>b>0$．顺便指出，在小扰动、小粘性及特殊形状腔体等条件下，Черноусько[1]也曾得到了这一稳定条件，但在我们这里，却没有上述这些附加条件的限制．

本文得到我校应用力学教研室有关同志的指导和帮助，谨致谢意！
蒙秦元勋老师对本文给予指正，敬致深切谢意。

参 考 文 献

[1] Черноусько, Ф. Л., *Движение Твердого Тела с Полостями Содержощими Вязкую Жидкость*, М. В. Ц. АН СССР, (1968).
[2] Моисеев, Н. Н. и В. В. Руменцев, *Динамика Тела с Полостями Содержощими Жидкость*, М. изд-во Наука, (1965).
[3] 徐硕昌，关于充液腔体旋转运动稳定的变分原理及其应用，中国科学，9(1979).
[4] 徐硕昌，Ляпунов 方法在充液腔体旋转运动稳定问题中的应用，科学通报 1(1981).

On the Stability of the Rotational Motion of a Rigid Body Having a Liquid Filled Cavity under Finite Initial Disturbance

Li Li
(Tianjin University, Tianjin)

Abstract

In this paper, the problem of the stability of rotational motion of a rigid body which has a liquid filled cavity and a fixed point is investigated. Criteria of stability and instability under finite initial disturbance are obtained, the region of stability is found explicitly and the behaviour of the disturbed motion is discussed.