

部分埋入水中悬臂圆柱体的地震响应*

张 悉 德

(山东化工学院, 1982年9月11日收到)

摘 要

在本文中作者研究了部分埋入水中悬臂圆柱体的地震响应. 得到了柱水偶联体系的位移响应, 各截面的弯矩以及沿柱高的地震力分布.

作者在文献[1]中, 对部分埋入水中悬臂圆柱体的弯曲自由振动进行了分析, 给出了柱水偶联体系振型函数的精确解. 本文在上述工作的基础上, 进一步研究了水中柱体的地震响应, 亦即强迫振动. 给出了柱水偶联体系的位移响应, 进而给出了各截面的弯矩以及沿柱高地震力的分布.

一、速度场势函数 $\phi(r, \theta, z, t)$ 的确定

假定地面运动的规律为 $\delta(t)$, 而柱体相对地面的位移为 $y(z, t)$, 于是柱体的绝对位移为 $Y(z, t) = y(z, t) + \delta(t)$.

不计液面波动, 假定水是理想的不可压缩的无粘流体, 采用柱坐标进行讨论(图1). 据[1]速度势函数 $\phi(r, \theta, z, t)$ 满足拉普拉斯(Laplace)方程

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (1.1)$$

其边界条件为:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \\ 2) \quad \phi|_{z=h} = 0 \\ 3) \quad \phi|_{r \rightarrow \infty} = 0 \\ 4) \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{\partial Y(z, t)}{\partial t} \cos \theta \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

$$\text{其中 } \frac{\partial Y(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [y(z, t) + \delta(t)] = [y(z) + \delta] \dot{T}(t) = Y(z) \dot{T}(t) \quad (1.3)$$

* 钱伟长推荐.

方程(1.1)满足边界条件(1.2)的解为

$$\phi(r, \theta, z, t) = \dot{T}(t) \frac{4\cos\theta}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{K_1\left(\frac{(2s-1)\pi r}{2h}\right)}{(2s-1)K_1\left(\frac{(2s-1)\pi a}{2h}\right)} \cdot \cos\frac{(2s-1)\pi z}{2h} \cdot \int_0^h [y(z) + \delta] \cos\frac{(2s-1)\pi z}{2h} dz \quad (1.4)$$

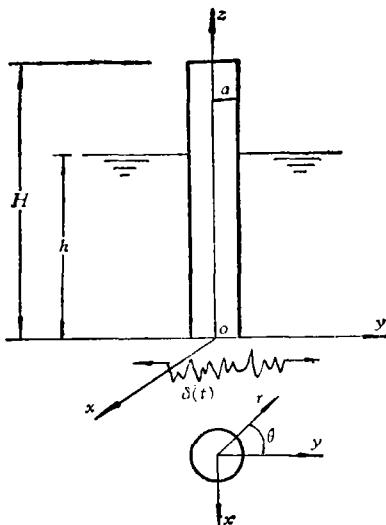


图 1

二、强迫振动方程的建立

据[1]可得沿柱高附加水质量为:

$$m(z) = - \frac{4\rho a}{Y(z)} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{K_1\left(\frac{(2s-1)\pi a}{2h}\right)}{(2s-1)K_1\left(\frac{(2s-1)\pi a}{2h}\right)} \cos\frac{(2s-1)\pi z}{2h} \cdot \int_0^h Y(z) \cos\frac{(2s-1)\pi z}{2h} dz \quad (2.1)$$

于是, 在地震作用下柱水偶联体系弯曲振动方程为:

$$EJ \frac{\partial^4 y(z, t)}{\partial z^4} + [\rho_1 F + m(z)] \frac{\partial^2 Y(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

考虑到 $Y(z, t) = y(z, t) + \delta(t)$, (2.2)式成为:

$$EJ \frac{\partial^4 y(z, t)}{\partial z^4} + [\rho_1 F + m(z)] \frac{\partial^2 y(z, t)}{\partial t^2} = -[\rho_1 F + m(z)] \ddot{\delta}(t) \quad (2.3)$$

其中 $\ddot{\delta}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \delta(t)$ 是地面运动加速度.

(2.3)式实际上是柱水偶联体系的强迫振动方程.

三、方程 (2.3) 的求解

无水柱体自由弯曲振动广义本征值方程为:

$$EJ \frac{d^4 \psi(z)}{dz^4} - \rho_1 F \omega^2 \psi(z) = 0 \quad (3.1)$$

方程(3.1)满足边界条件:

$$\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(H) = \psi'''(H) = 0$$

的解为

$$\psi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(z)$$

其中

$$\psi_i(z) = -\frac{\sin k_i H + \operatorname{sh} k_i H}{\cos k_i H + \operatorname{ch} k_i H} (\cos k_i z - \operatorname{ch} k_i z) + \sin k_i z - \operatorname{sh} k_i z$$

上式中的 $k_i H$ 是频率方程

$$\cos k_i H \operatorname{ch} k_i H = -1$$

的根。与第 i 振型 $\psi_i(z)$ 相应的自由振动频率 ω_{0i} 由下式确定

$$\omega_{0i}^2 = \frac{EJ}{\rho_1 F} k_i^4$$

因此, 有

$$\left. \begin{aligned} EJ \frac{d^4 \psi_i(z)}{dz^4} - \rho_1 F \omega_{0i}^2 \psi_i(z) &= 0 \\ \psi_i(0) = \psi_i'(0) = \psi_i''(H) = \psi_i'''(H) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$\psi_i(z)$ 是一组完备的正交函数系, 因此方程(2.3)的解 $y(z, t)$ 可以用 $\psi_i(z)$ 展开为广义富里叶 (Fourier) 级数:

$$y(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i(z) T_i(t) \quad (3.3)$$

把(3.3)式代入(2.3)式, 并利用 $\psi_i(z)$ 的正交性, 得

$$\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t) = -\gamma_i \ddot{\delta}(t) \quad (3.4)$$

若加入阻尼因素, 则(3.4)式成为:

$$\ddot{T}_i(t) + 2\mu_i \omega_i \dot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t) = -\gamma_i \ddot{\delta}(t) \quad (3.5)$$

其中

$$\omega_i^2 = \frac{\omega_{0i}^2 \int_0^H \rho_1 F \psi_i^2(z) dz}{\int_0^H \rho_1 F \psi_i^2(z) dz + \int_0^h m(z) \psi_i^2(z) dz}$$

ω_i 为柱水偶联体系第 i 振型相应的圆频率.

$$\gamma_i = \frac{\int_0^H \rho_1 F \psi_i(z) dz + \int_0^h m(z) \psi_i(z) dz}{\alpha_i \left[\int_0^H \rho_1 F \psi_i^2(z) dz + \int_0^h m(z) \psi_i^2(z) dz \right]}$$

μ_i 为相应于第*i*振型的阻尼比。

不难看出,方程(3.4)或(3.5)相当于单自由度系统强迫振动方程。因为阻尼的存在,自由振动很快消失。因此,方程(3.5)的瞬态解可这样求出:对(3.5)式两端施行拉普拉斯变换,得:

$$L[T_i(t)] = -\gamma_i \frac{1}{P^2 + 2\mu_i\omega_i P + \omega_i^2} L[\ddot{\delta}(t)]$$

由卷积定理,可得

$$\begin{aligned} T_i(t) &= -\frac{\gamma_i}{\omega_i\sqrt{1-\mu_i^2}} \int_0^t \ddot{\delta}(\tau) e^{-\mu_i\omega_i(t-\tau)} \cdot \sin\omega_i\sqrt{1-\mu_i^2}(t-\tau) d\tau \\ &= \gamma_i \mathcal{A}_i(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中

$$\mathcal{A}_i(t) = -\frac{1}{\omega_i\sqrt{1-\mu_i^2}} \int_0^t \ddot{\delta}(\tau) e^{-\mu_i\omega_i(t-\tau)} \cdot \sin\omega_i\sqrt{1-\mu_i^2}(t-\tau) d\tau \quad (3.7)$$

这是阻尼为 μ_i ,圆频率为 ω_i 的单质点在地震作用下的位移响应——称为位移谱。

将(3.6)式代入(3.3)式,得方程(2.3)的解为:

$$y(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \gamma_i \mathcal{A}_i(t) \psi_i(z) \quad (3.8)$$

注意到 γ_i 的表式,上式中的 α_i 实际上是不出现的。

柱体任一截面的弯矩为:

$$M(z, t) = EJ \frac{\partial^2 y(z, t)}{\partial z^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \gamma_i \mathcal{A}_i(t) EJ \frac{d^2 \psi_i(z)}{dz^2} \quad (3.9)$$

沿柱高地震力的分布规律为:

$$S(z, t) = \frac{\partial^2 M(z, t)}{\partial z^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \gamma_i \mathcal{A}_i(t) \frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{d^2 \psi_i(z)}{dz^2} \right)$$

考虑到(3.2)式,可得:

$$\begin{aligned} S(z, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \gamma_i \mathcal{A}_i(t) \omega_{0i}^2 \rho_1 F \psi_i(z) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \gamma_i \ddot{\mathcal{A}}_i(t) \left(\frac{\omega_{0i}}{\omega_i} \right)^2 \rho_1 F \psi_i(z) \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中

$$\ddot{\mathcal{A}}_i(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{A}_i(t)$$

为前述单质点在地震作用下的加速度响应——称为加速谱。

四、结 语

由式(3.10)看出: 地震力沿柱高的分布是时间 t 的函数, 从设计的观点考虑应找出地震力最大的时刻, 这就须要找到 $\ddot{A}_i(t)$ 的最大值. 地震学家已对具有不同阻尼和圆频率的单质点在地震作用下的响应, 绘出了加速度反应谱曲线. 对于本问题, 只要按[1]求出柱水偶联体系的固有频率 ω_i , 在一定的阻尼假定下, 就可以从加速度谱曲线上查出 $\max|\ddot{A}_i(t)|$, 再由(3.10)式计算出地震力, 从而作出科学的经济的设计.

参 考 文 献

- [1] 张悉德, 部分埋入水中悬臂圆柱体弯曲自由振动, 应用数学和力学, 3, 4(1982).
- [2] 郑哲敏、马宗魁, 一侧有水悬臂梁的自由振动, 力学学报, 3, 2(1959)
- [3] 项中权、由敬瞬、张悉德等, 圆形取水给水构筑物的自振特性和抗震计算, 地震工程研究报告集第4集, 科学出版社, (1982).
- [4] 刘恢先, 论地震力, 土木工程学报, 5, 2(1958).

Earthquake Response of Circular Column Submerged in Water Partially

Chang Hsi-teh

(Shandong Chemical Engineering Institute, Qingdao)

Abstract

In this paper, the author studied the earthquake response of circular column partially submerged in water, and obtained the displacement response of column-water couple system and the moment of any section as well as the distribution of earthquake force along the column height.