

# 一类Stefan问题的渐近解\*

刘 曾 荣

(安徽大学, 1982年10月7日收到)

## 摘 要

本文讨论了一类具有一般初值条件的 Stefan 问题, 把所讨论板分成三部份, 每一部份选用不同的时间尺度, 然后用 PLK 方法或类多重尺度法求得每一部份的渐近解. 最后, 就此解进行了讨论并得出相应的结论.

## 一、引 言

多年来, 许多学者对相变问题所引起的 Stefan 问题进行了研究. [1]、[2]、[3]等文讨论了一些 Stefan 问题解的存在性和唯一性; [4]总结了近年来关于 Stefan 问题的数值解法; [5]、[6]等文用积分法求解了某些 Stefan 问题. 近年来, 有些学者用摄动法来求 Stefan 问题的渐近解<sup>[7]-[11]</sup>, 他们采用的是正则摄动法和匹配渐近法, 作者在[12]中用 PLK 方法得到了一类 Stefan 问题的摄动解. 在上述所有有关摄动法处理的 Stefan 问题文章中, 初始条件都取为常数. 本文处理了具有一般初始条件情况下的 Stefan 问题的渐近解.

依据对物理模型的分析, 把所考虑的板分成三个部份, 然后用 PLK 方法或类多重尺度法分别找出它们的渐近解.

在第二节中, 叙述了问题的物理背景和数学模型; 在第三节中, 找出了问题的一阶解; 在最后一节中, 就所得结果与文[13]进行了比较.

## 二、数 学 模 型

本文讨论一块无限长、厚度为  $L$  的固态板状物的熔解问题. 它具有任意的初始温度分布. 板的一个表面处于绝热状态, 通过另一表面有恒定热量  $Q$  输入. 此问题的控制方程可分成三部份写出:

$$A: \text{液态区} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a_f \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{x}^2} \quad (\xi < \tilde{x} < L)$$

其中  $a_f = \frac{K_f}{c_f \rho_f}$ ,  $K_f$  是液体热传导系数,  $c_f$  为液体比热,  $\rho_f$  为液体密度.

\* 许政范推荐.

$$B: \text{ 固态区 } \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a_s \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{x}^2} \quad (0 < \tilde{x} < \xi)$$

其中  $a_s = \frac{K_s}{c_s \rho_s}$ ;  $K_s$ ,  $c_s$  和  $\rho_s$  分别代表固体的热传导系数、比热和密度。

$$C: \text{ 界面区 } \quad K_f \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=\xi+0} - K_s \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=\xi-0} = -\rho_f r \frac{d\xi}{dt}$$

其中  $r$  为物质的熔解热。

同时此问题还应当有下列定解条件:

$$\begin{cases} T(\tilde{x}, \bar{t}) = f(\tilde{x}), & \text{当 } \bar{t} = 0 \\ T(\tilde{x}, \bar{t}) = T_f, & \text{当 } \tilde{x} = \xi \\ K_f \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} = Q, & \text{当 } \tilde{x} = L \\ \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} = 0, & \text{当 } \tilde{x} = 0 \\ \xi = L, & \text{当 } \bar{t} = 0 \end{cases}$$

其中  $T_f$  为物质的熔点。

在具体处理此问题前, 先进行一下简单分析. 记  $\frac{QL}{K_f} = T_c$ , 当  $T_c$  不太大时, Stefan 数

$\varepsilon = \frac{c_f T_c}{r}$  可以认为是一个小参数, 所以考虑可用摄动法求解. 由于  $r$  比较大,  $Q$  主要用于缓慢熔解固体, 所以在  $A$  和  $C$  区域应当且仅仅存在一个缓变时间尺度. 另一方面, 区域  $B$  从根本上看是一个正常的热传导过程, 因而应当引入正常的时间尺度.

依据上述分析, 我们能把上述问题化为如下的无量纲的定解问题:

$$A \text{ 区: 定义 } u^{(1)} = \frac{T - T_f}{T_c}, \quad x = \frac{\tilde{x}}{L}, \quad s = \frac{\xi}{L}, \quad \tau = \varepsilon \frac{a_f \bar{t}}{L^2}, \text{ 得到该区的无量纲定解}$$

问题为:

$$\varepsilon \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} \quad (s < x < 1), \quad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=s} = 1, \quad u^{(1)} \Big|_{x=s} = 0 \quad (2.1)$$

$$B \text{ 区: 定义 } u^{(2)} = \frac{T - T_f}{T_c}, \quad x = \frac{\tilde{x}}{L}, \quad s = \frac{\xi}{L}, \quad t_1 = \frac{a_s}{L^2} \bar{t}, \text{ 其中 } t_1 \text{ 为正常时间尺}$$

度,  $t_1$  与  $\tau$  (缓变时间尺度) 之间的关系为:

$$\tau = m \varepsilon t_1$$

其中  $m = \frac{a_f}{a_s}$  是一个常数. 该区的无量纲定解问题为:

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t_1} = \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} \quad (0 < x < s), \quad u^{(2)} \Big|_{t_1=0} = f(x), \quad u^{(2)} \Big|_{x=s} = 0, \quad \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.2)$$

C区: 定义  $u^{(1)} = \frac{T-T_f}{T_c}$ ,  $u^{(2)} = \frac{T'-T'_f}{T'_c}$ ,  $x = \frac{\tilde{x}}{L}$ ,  $s = \frac{\xi}{L}$ ,  $\tau = \varepsilon \frac{a_f}{L^2}$ , 可得  
到该区的无量纲定解问题为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=s_0} - h \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \Big|_{x=s_0} &= -\frac{ds}{d\tau}, \quad s|_{\tau=0} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

其中  $h = \frac{K_s}{K_f}$  是一个常数.

### 三、渐 近 解

#### 1. A 区的解

用 PLK 方法求(2.1)解.

首先, 假设:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= t + \varepsilon \eta_1(t) + \varepsilon^2 \eta_2(t) + \dots \\ s &= s_0(t) + \varepsilon s_1(t) + \varepsilon^2 s_2(t) + \dots \\ u^{(1)} &= u_0^{(1)}(x, t) + \varepsilon u_1^{(1)}(x, t) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中  $\eta_i(0) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), 然后把(3.1)代入(2.1), 比较  $\varepsilon$  同次幂系数. 就  $\varepsilon^0$  而言结果是:

$$\frac{\partial^2 u_0^{(1)}}{\partial x^2} = 0 \quad (s_0 < x < 1), \quad \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=1} = 1, \quad u_0^{(1)}(x=s_0, t) = 0 \quad (3.2)$$

解(3.2), 结果为:

$$u_0^{(1)} = (x - s_0) \quad (3.3)$$

$\varepsilon^1$  的问题是:

$$\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x^2} = \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial t} = -\frac{ds_0}{dt}, \quad \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad u_1^{(1)} \Big|_{x=s_0} = -s_1 \quad (3.4)$$

(3.4)的解为:

$$u_1^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{ds_0}{dt} (x^2 - s_0^2) + \frac{ds_0}{dt} (x - s_0) - s_1 \quad (3.5)$$

由(3.3)与(3.5), 可得到  $u_1$  关于以  $s_0$  为参数的一阶渐近解为:

$$u^{(1)} = (x - s_0) + \varepsilon \left\{ -\frac{1}{2} \frac{ds_0}{dt} (x^2 - s_0^2) + \frac{ds_0}{dt} (x - s_0) - s_1 \right\} \quad (3.6)$$

很明显, 如果要得出  $u^{(1)}$  的显式, 还需求出  $s_1 = s_1(s_0)$ ,  $t = t(s_0)$ ,  $\eta_1 = \eta_1(s_0)$ . 这些函数留待在以后加以确定.

#### 2. B 区的解

现在用类多重尺度法求(2.2)解,  $u^{(2)}$  看成为  $x, t$  和  $t_1$  函数.

设(2.2)解形式为:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= t + \varepsilon \eta_1(t) + \varepsilon^2 \eta_2(t) + \dots \\ s &= s_0(t) + \varepsilon s_1(t) + \varepsilon^2 s_2(t) + \dots \\ u^{(2)} &= u_0^{(2)}(x, t, t_1) + \varepsilon u_1^{(2)}(x, t, t_1) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

其中  $\eta_i(0) = 0$  ( $i=1, 2, \dots$ ).

由于该区本质上是一个热传导问题, 所以在(2.2)的方程中只引入时间尺度 $t_1$ , 同时时间尺度 $\tau$ 由自由边界引入解中. 因此在最后考虑初始条件定解时必须注意到二种尺度同时存在.

把(3.7)代入(2.2), 令 $\varepsilon$ 同次幂系数相等. 得到 $u_0^{(2)}$ 问题为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial t_1} &= \frac{\partial^2 u_0^{(2)}}{\partial x^2} \quad (0 < x < s_0), \quad \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \\ u_0^{(2)}(x, t=0, t_1=0) &= f(x), \quad u_0^{(2)} \Big|_{x=s_0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

(3.8)的解为:

$$u_0^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{s_0^2} t_1\right) \cos \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{s_0} x \quad (3.9)$$

其中 
$$A_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x dx$$

$u_1^{(2)}$ 的定解问题为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t_1} &= \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^2}, \quad u_1^{(2)}(x, t=0, t_1=0) = 0 \\ u_1^{(2)} \Big|_{x=s_0} &= -\frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} \Big|_{x=s_0} \cdot s_1, \quad \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

(3.10)解是:

$$\begin{aligned} u_1^{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{s_0^2} \exp\left(-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{s_0^2} t_1\right) s_1 x \sin \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{s_0} x \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} 2A_n \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{s_0^3} \exp\left(-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{s_0^2} t_1\right) s_1 t_1 \cos \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{s_0} x \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中  $s_1(0) = 0$ .

最后得到一阶近似解为:

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{s_0^2} t_1\right) \cos \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{s_0} x \\ &+ \varepsilon \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n s_1 \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{s_0^2} \exp\left(-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{s_0^2} t_1\right) \left[ x \sin \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{s_0} x \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{s_0} t_1 \cos \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{s_0} x \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3. C 区的解

现在处理C区的解. 要强调指出, 在该区仅存在缓变时间尺度 $\tau$ , 因此正常时间尺度 $t_1$ 不

能认为是独立的变量. 在求解过程中出现  $t_1$  都应当用  $-\frac{\tau}{m\varepsilon}$  代替.

假设  $u^{(1)}$ ,  $u^{(2)}$ ,  $s$  和  $\tau$  有形式:

$$\left. \begin{aligned} u^{(1)} &= u_0^{(1)} + \varepsilon u_1^{(1)} + \dots \\ u^{(2)} &= u_0^{(2)} + \varepsilon u_1^{(2)} + \dots \\ s &= s_0 + \varepsilon s_1 + \dots \\ \tau &= t + \varepsilon \eta_1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

其中  $\eta_i(0) = 0$  ( $i=1, 2, \dots$ ).

把(3.13)代入(2.3), 比较  $\varepsilon$  同次幂系数, 可以得到:

$$\left. \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=s_0+0} - h \left. \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} \right|_{x=s_0-0} = -\frac{ds_0}{dt} \quad (3.14)$$

和

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=s_0+0} - h \left. \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x} \right|_{x=s_0-0} &= -\frac{ds_1}{dt} + \frac{d\eta_1}{dt} \frac{ds_0}{dt} \\ &\quad - \frac{\partial^2 u_0^{(1)}}{\partial x^2} s_1 \Big|_{x=s_0+0} + h \frac{\partial^2 u_0^{(2)}}{\partial x^2} s_1 \Big|_{x=s_0-0} \end{aligned} \quad (3.15)$$

把上述  $u_i$  ( $j=1, 2; i=0, 1$ ) 结果代入(3.14)和(3.15), 略去超级无穷小量, 可得到:

$$\frac{ds_0}{dt} = -1, \quad s_0(0) = 1 \quad (3.16)$$

和

$$\frac{ds_1}{ds_0} + \frac{d\eta_1}{ds_0} = s_0 - 1, \quad s_1(s_0=1) = 0 \quad (3.17)$$

(3.16)的解为:

$$t = (1 - s_0) \quad (3.18)$$

由(3.17)可建立如下方程:

$$\frac{ds_1}{ds_0} = 0, \quad s_1(s_0=1) = 0 \quad (3.19)$$

和

$$\frac{d\eta_1}{ds_0} = s_0 - 1, \quad \eta_1(s_0=1) = 0 \quad (3.20)$$

(3.19)和(3.20)的解为:

$$s_1 = 0 \quad (3.21)$$

和

$$\eta_1 = \frac{1}{2} (1 - s_0)^2 \quad (3.22)$$

这样, C 区的渐近解为:

$$s = s_0 + O(\varepsilon^2), \quad \tau = (1 - s_0) + \frac{\varepsilon}{2} (1 - s_0)^2 + O(\varepsilon^2) \quad (3.23)$$

#### 4. 公式

归纳 1、2 和 3 的结果, 所讨论问题的一阶渐近解为:

$$\left. \begin{aligned}
 s &= s_0 + O(\varepsilon^2) \\
 \tau &= (1-s_0) + \frac{\varepsilon}{2}(1-s_0)^2 + O(\varepsilon^2) \\
 u^{(1)} &= (x-s_0) + \varepsilon \left[ \frac{1}{2}(x^2-s_0^2) - (x-s_0) \right] + O(\varepsilon^2) \\
 u^{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp \left( -\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{s_0^2} - \frac{\tau}{m\varepsilon} \right) \cos \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{s_0} x + O(\varepsilon^2)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

#### 四、一些结果

从(3.24)我们能得出一些结论. 这些结论在文[13]中已经讨论过. 由于文[13]讨论的 Stefan 问题具有初值条件  $f(x) = T_f + \frac{QL}{2r} \left[ \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 1 \right]$ , 因而它不具有一般性. 这儿由于初值条件的任意性, 所以结论具有更为一般的意义.

##### 1. 相变结束时, 上下表面的温度差

为此取  $x=1$ ,  $s_0=0$ , 则  $u^{(1)}=1$ , 即  $T-T_f=T_c = \frac{QL}{K_f}$ , 与[13]结果一致. 相变结束时, 顶面温度与底面温度差基本上是建立液相准稳态时温度差的二倍. 实验也已经证实了这一点.

##### 2. 完成相变的时间

由(3.24)得:

$$\begin{cases} s = s_0 \\ \tau = (1-s_0) + \frac{\varepsilon}{2}(1-s_0)^2 \end{cases}$$

相变开始时,  $s_0=1$ ,  $\tau=0$ ; 相变结束时,  $s_0=0$ ,  $\tau=1 + \frac{\varepsilon}{2}$ , 因此完成相变时间是  $\tau=1 + \frac{\varepsilon}{2}$ . 如果  $\varepsilon$  增加,  $\tau$  也增加. 从  $\varepsilon$  表达式看  $\varepsilon \propto Q$ ,  $\varepsilon \propto \frac{1}{r}$ , 这样当  $Q$  大和  $r$  小时,  $\tau$  就大. 反之,  $\tau$  就小. 这个结果与[13]也是一致的.

##### 3. 相变面与时间的关系

由(3.24)很明显看出相变面与时间的关系为一抛物线. 图1给出  $\varepsilon=0.2$  和  $\varepsilon=0.4$  时的曲线.

##### 4. A 区的温度分布

A 区的零阶渐近解为:

$$\begin{cases} s = s_0 \\ u^{(1)} = (x-s_0) \end{cases}$$

可见  $x$  和  $u^{(1)}$  的关系是一族等倾度直线, 与[13]结果一致. 图 2 给出了一些等倾直线.

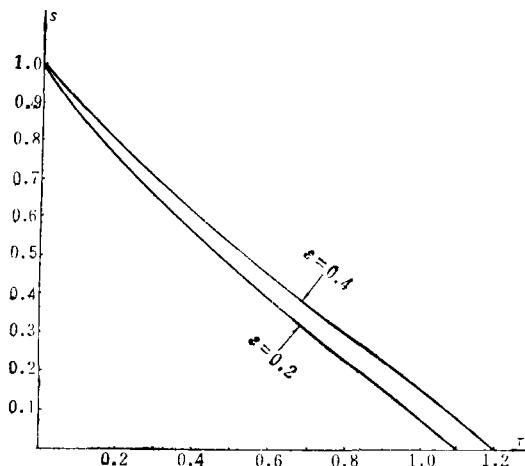


图 1 相变面与时间的曲线

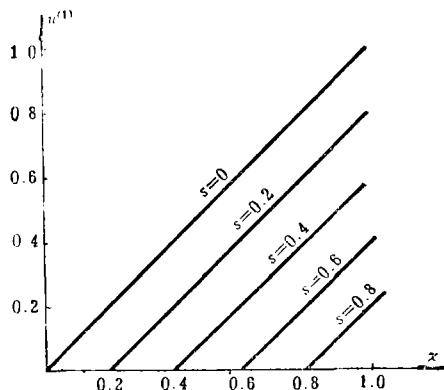


图 2  $x$  和  $u^{(1)}$  的关系

### 5. B 区的温度分布

B 区的一阶渐近解为:

$$\begin{cases} s = s_0 \\ u^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{s_0^2} \frac{\tau}{m\epsilon}\right) \cos \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{s_0} x \end{cases}$$

很明显 B 区的温度分布是以指数律很快趋近于零. 这一点与[13]完全一致, 与实验结果也相符合. 为了说明这种趋势, 讨论  $x=0$  这一点的温度变化. 为简单起见, 假设参数取为:

$$\begin{cases} A_n = 0 \quad (n \neq 0), \quad A_0 = -1 \\ \epsilon = 0.1 \\ m = 1 \end{cases}$$

图 3 给出  $\epsilon=0.1$  时  $u^{(2)}$  和  $s$  的曲线图. 当  $\epsilon$  是一个小量时, 温度很快趋于零. 由此, 对于具有任意初始分布的 Stefan 问题的解, 在经过一段较短时间后, 可考虑近似用具有初始常温的 Stefan 问题解来代替. 这样, 现有关于初始为常温的结果就能直接加以应用.

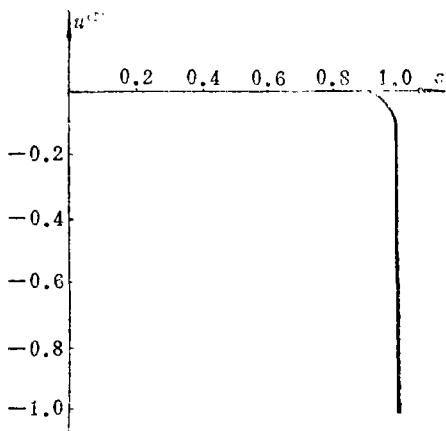


图 3  $u^{(2)}$  和  $s$  的曲线  $x=0, \epsilon=0.1$

作者对于安徽大学许政范教授的热情帮助表示衷心的感谢. 对于美国纽约大学柯朗数学所的丁汝教授以及中国科学院力学研究所戴世强、李家春两位老师的帮助表示感谢.

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Sherman, B., A general one-phase Stefan problem, *Quart. Appl. Math.*, **28**(1970), 377—382.
- [ 2 ] Kyner, Walter T., On a free boundary value problem for the heat equations, *Quart. Appl. Math.*, **17** (1959), 305—310.
- [ 3 ] Miranker, W. L., A free boundary value problem for the heat equation, *Quart. Appl. Math.*, **16** (1958), 121—130.
- [ 4 ] Meyer, G. H., One-dimensional parabolic free boundary problem, *SIAM Review*, **19** (1977), 17—34.
- [ 5 ] Evans, G. W., E. Isaacson and I. Macdonald, Stefan like problem, *Quart. Appl. Math.*, **8** (1950), 312—319.
- [ 6 ] Boley, Bruns A., A method of heat conduction analysis of melting and solidification problem, *J. Math. and Phys.*, **40** (1961), 300—313.
- [ 7 ] Pedroso, R. I. and G. A. Domoto, Perturbation solutions for spherical solidification of saturated liquid, *ASME. J. Heat Transfer*, **95** (1973), 42—46
- [ 8 ] Weinbaum, S. and L. M. Jiji, Singular perturbation theory for melting or freezing in finite domains initially not at the fusion temperature, *J. Appl. Mech.*, **44** (1977), 25—30.
- [ 9 ] Rubinsky, B. and E. G. Cravalho, The determination of the thermal history in a one-dimensional freezing system by perturbation method, *ASME. J. Heat. Transfer*, **101** (1979), 326—330.
- [10] Tiji, Latif M. and Sheldon Weinbaum, Perturbation solution for melting or freezing in annular regions initially not at the fusion temperature, *Inter. J. Heat Mass. Transfer*, **21** (1978), 581—590
- [11] Predroso, R. I. and G. A. Domoto, Exact solution by perturbation method for planar solidification of a saturated liquid with convection at the wall, *Inter. J. Heat Mass. Transfer*, **16** (1973), 1816—1819.
- [12] 刘曾荣. 一维熔解与凝固问题的摄动解, (尚未发表).
- [13] 陈则靓、葛新石, 相变热传导问题混合法近似解 (尚未发表).
- [14] Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods*, Wiley-Interscience, New Yourk, (1973), Chap. 3.

## The Asymptotic Solution of a Kind of Stefan Problem

Liu Zheng-rong

(Anhui University, Hefei, Anhui)

## Abstract

In this paper, a kind of Stefan problem subject to general initial condition is studied. The slab considered is divided into three regions. There is a different time scale in each one. By means of PLK method or like multiscales method, the asymptotic solution of each one is obtained. Finally we discuss the asymptotic solution and draw some conclusions.