

无限大板包含任意排列多个椭圆孔洞的应力集中和多裂纹的应力强度因子计算*

周承芳 关长文

(大连工学院工程力学研究所, 1983年3月28日收到)

摘 要

对于无限平面上任意排列的多个椭圆孔的应力集中, 采用复变函数方法, 直接构造能够反映各孔相互影响的应力函数, 通过依次映射方法来满足各孔的边界条件, 再利用围线积分方法化为线性代数方程求解。对于裂纹情况, 将裂纹化为相应的椭圆, 通过应力集中系数近似求得应力强度因子值。文中给出若干计算结果。

一、前 言

被多个孔洞削弱的无限大板的强度分析是有实际工程意义的。多年来, 许多学者作了许多工作。最先是用双极坐标来计算两个等圆孔的应力集中^[1], 和用应力函数的一般表达式通过交替迭加的概念来计算相邻孔的彼此影响^[2]。当复变函数理论引入弹性理论中后, 给孔洞问题的强度研究带来了强有力的手段, 给出了许多研究成果^{[3], [4]}。我国学者曾用复变函数方法直接构造应力函数, 成功地解决了任意排列多个不等圆孔的应力集中问题^[5]。在近些年的研究中, 除有限单元法和实验研究外, 在理论方面还多是采用复变函数方法。对于任意排列的多裂纹的强度分析, 一种有效的方法是直接在物理平面上将应力函数展开为级数而后再用摄动法求解的数值方法^[11], 这种方法给出了许多有用的结果, 但公式和计算都十分繁杂。另一种方法是用复变函数方法导出一组积分方程组求解之^[12], 这种方法在理论上是完整的, 但具体求解却很困难。

本文是在论文[5]~[10]的基础上, 研究了多个任意排列椭圆孔洞的应力集中问题, 圆孔洞仅是它的特殊情况。采用复变函数方法, 直接构造能够反映孔洞相互影响的应力函数, 采用依次映射方法满足各个孔边的边界条件, 并通过围线积分将求解方程组化为线性代数方程组。对于孔洞中的单裂纹和多裂纹的应力强度因子计算是通过计算依次变扁的椭圆孔的应力集中来逼近, 从而给出近似值。

本文的处理方法可用于任意形状孔洞的情况, 编排了计算程序进行计算, 文中给出了几个计算例子, 并与已有结果进行了比较。对多个圆孔进行了光弹性实验分析, 同时用本文公

* 唐立民推荐。

式计算, 结果与实验值吻合较好。

二、理论公式

1. 应力函数

在无限大平板上任意排列 n 个椭圆孔(如图1所示), 在无穷远处作用均匀拉应力。

取应力函数(在映射后的数学平面上)为:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j a_k}{\zeta_j^k} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s a_k}{\zeta_s^k} + \Gamma \cdot z \\ \psi(\zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j b_k}{\zeta_j^k} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s b_k}{\zeta_s^k} + \Gamma' \cdot z \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

第一项是对 j 号孔的罗朗级数, 第二项是除 j 号孔外各孔对 j 号孔的影响项。它们都是对各自的局部坐标写的, 所以上面的写法仅是形式上的。第三项是无穷远处外力作用项, 其中 $\Gamma = \frac{N}{2}$, $\Gamma' = -\frac{N}{2} e^{-i2\alpha}$ 。为了满足各孔边的边界条件, 例如先满足 j 号孔的边界条件, 需要将(2.1)式中所有的变量都转换到 j 号孔的局部坐标中去。采用映射函数: $z = w(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right)$, 其中 $R = \frac{a+b}{2}$, $m = \frac{a-b}{a+b}$, a, b 分别为椭圆孔长、短半轴。由此得逆函数:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2R} (z + \sqrt{z^2 - 4mR^2}) \\ \zeta^{-1} &= \frac{1}{2mR} (z - \sqrt{z^2 - 4mR^2}) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

将(2.2)式代入(2.1)式得: (注: 本文推导均以椭圆孔为准, 对于圆孔情况, 为避免分母出现零, 可由(2.2)式第一式得到 $\zeta^{-1} = \frac{R}{z}$, 再重复下述推导。)

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j a_k}{\zeta_j^k} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s a_k}{(2m_s R_s)^k} (z_s - \sqrt{z_s^2 - 4m_s R_s^2})^k + \Gamma \cdot z \\ \psi(\zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j b_k}{\zeta_j^k} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s b_k}{(2m_s R_s)^k} (z_s - \sqrt{z_s^2 - 4m_s R_s^2})^k + \Gamma' \cdot z \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

坐标变换关系式为:

$$\left. \begin{aligned} z_s &= z_j \exp[i(\alpha_j - \alpha_s)] - r_{js} \exp[i(\beta_{js} - \alpha_s)] \\ z &= z_j \exp[i\alpha_j] + r_j \exp[i\beta_j] \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

将(2.4)式代入(2.3)式, 并利用 j 号孔的映射函数: $z_j = R_j \left(\zeta_j + \frac{m_j}{\zeta_j} \right)$ 得到在数学平面 (ζ_j)

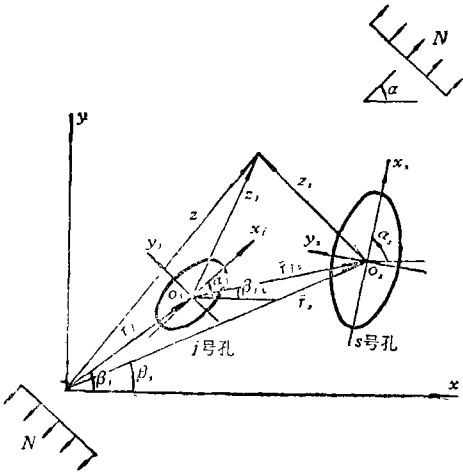


图 1

上相对于 j 号孔局部坐标系的应力函数表达式:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi_j) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^j a_k}{\xi_j^k} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^s a_k}{(2m_s R_s)^k} \left\{ \left[R_j \left(\xi_j + \frac{m_j}{\xi_j} \right) \exp[i(\alpha_j - \alpha_s)] - r_{js} \exp[i(\beta_{js} - \alpha_s)] \right] \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\left[R_j \left(\xi_j + \frac{m_j}{\xi_j} \right) \exp[i(\alpha_j - \alpha_s)] - r_{js} \exp[i(\beta_{js} - \alpha_s)] \right]^2 - 4m_s R_s^2} \right\}^k \\ &\quad + \Gamma \left[R_j \left(\xi_j + \frac{m_j}{\xi_j} \right) \exp[i\alpha_j] + r_j \exp[i\beta_j] \right] \\ \psi(\xi_j) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^j b_k}{\xi_j^k} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^s b_k}{(2m_s R_s)^k} \left\{ \left[R_j \left(\xi_j + \frac{m_j}{\xi_j} \right) \exp[i(\alpha_j - \alpha_s)] - r_{js} \exp[i(\beta_{js} - \alpha_s)] \right] \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\left[R_j \left(\xi_j + \frac{m_j}{\xi_j} \right) \exp[i(\alpha_j - \alpha_s)] - r_{js} \exp[i(\beta_{js} - \alpha_s)] \right]^2 - 4m_s R_s^2} \right\}^k \\ &\quad + \Gamma' \left[R_j \left(\xi_j + \frac{m_j}{\xi_j} \right) \exp[i\alpha_j] + r_j \exp[i\beta_j] \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

2. 边界方程

第 j 号孔的边界方程为:

$$\varphi(\sigma_j) + \omega(\sigma_j) \frac{\overline{\varphi'(\sigma_j)}}{\omega'(\sigma_j)} + \overline{\psi(\sigma_j)} = F(\sigma_j) + c_j \quad (2.6)$$

其共轭式为:

$$\overline{\varphi(\sigma_j)} + \overline{\omega(\sigma_j)} \cdot \frac{\varphi'(\sigma_j)}{\omega'(\sigma_j)} + \psi(\sigma_j) = \overline{F(\sigma_j)} + \overline{c_j} \quad (2.7)$$

在 j 号孔 $\sigma_j = \exp[i\theta_j]$, 对于自由孔边 $F(\sigma_j) = \overline{F(\sigma_j)} = 0$, 有 n 个孔时, 存在 $n-1$ 个常数 c_j , 但可将它们去掉, 同时把(2.6)式左端外力项(含有 Γ, Γ' 的项)中, 由于坐标平移(不包括转动)所产生的附加项去掉, 因为由左右两边常数项相等恰可解得 c_j , 而 c_j 不影响应力值。

将应力函数关系式代入(2.6)式得:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} {}^j a_k \cdot \rho_3 \cdot \exp[i(\eta_3 - k\theta_j)] + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^s a_k}{(2m_s R_s)^k} \cdot \rho_2^k \cdot \rho_3 \cdot \exp[i(k\eta_2 + \eta_3)] \\ & + \Gamma \cdot \rho_3 \cdot \rho_{14} \cdot \exp[i(\eta_3 + \eta_{14})] + \sum_{k=1}^{\infty} (-k) \overline{{}^j a_k} \cdot \rho_4 \cdot \exp[i((k+1)\theta_j + \eta_4)] \\ & + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^s a_k}{(2m_s R_s)^k} \cdot \rho_2^{k-1} \cdot \rho_4 \cdot \rho_{11} \cdot \exp[i((1-k)\eta_2 + \eta_4 + \eta_{11})] \\ & + \overline{\Gamma} \cdot \rho_4 \cdot \rho_6 \cdot \exp[i(-\alpha_j + \eta_4 + \eta_6)] + \sum_{k=1}^{\infty} {}^j b_k \cdot \rho_3 \cdot \exp[i(k\theta_j + \eta_3)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{s b_k}}{(2m_s R_s)^k} \cdot \rho_2^k \cdot \rho_3 \cdot \exp[i(-k\eta_2 + \eta_3)] \\
& + \overline{F'} \cdot \rho_3 \cdot \rho_{14} \exp[i(-\eta_{14} + \eta_3)] = 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中, θ_j 为相对于 $o_j x_j y_j$ 的坐标幅角.

$${}^{js}D_1 = R_j \cos(\alpha_j - \alpha_s + \theta_j) + m_j R_j \cos(\alpha_j - \alpha_s - \theta_j) - r_{js} \cos(\beta_{js} - \alpha_s)$$

$${}^{js}D_2 = R_j \sin(\alpha_j - \alpha_s + \theta_j) + m_j R_j \sin(\alpha_j - \alpha_s - \theta_j) - r_{js} \sin(\beta_{js} - \alpha_s)$$

$$\rho_1 = \sqrt{({}^{js}D_1^2 - {}^{js}D_2^2 - 4m_s R_s^2)^2 + (2{}^{js}D_1 \cdot {}^{js}D_2)^2}$$

$$\eta_1 = \arctg \frac{2 \cdot {}^{js}D_1 \cdot {}^{js}D_2}{{}^{js}D_1^2 - {}^{js}D_2^2 - 4m_s R_s^2}$$

$$\rho_2 = \sqrt{[{}^{js}D_1 - \sqrt{\rho_1} \cos(\eta_1/2)]^2 + [{}^{js}D_2 - \sqrt{\rho_1} \sin(\eta_1/2)]^2}$$

$$\eta_2 = \arctg \frac{{}^{js}D_2 - \sqrt{\rho_1} \sin(\eta_1/2)}{{}^{js}D_1 - \sqrt{\rho_1} \cos(\eta_1/2)}, \quad \rho_3 = \sqrt{(1 - m_j \cos 2\theta_j)^2 + (-m_j \sin 2\theta_j)^2}$$

$$\eta_3 = \arctg \frac{-m_j \sin 2\theta_j}{1 - m_j \cos 2\theta_j}, \quad \rho_4 = \sqrt{((1 + m_j) \cos \theta_j)^2 + ((1 - m_j) \sin \theta_j)^2}$$

$$\eta_4 = \arctg \frac{(1 - m_j) \sin \theta_j}{(1 + m_j) \cos \theta_j}, \quad \rho_5 = \rho_4, \quad \eta_5 = (k + p + 2)\theta_j + \eta_4, \quad \rho_6 = R_j \rho_3, \quad \eta_6 = \eta_3$$

$$\rho_7 = \sqrt{({}^{js}D_1)^2 + ({}^{js}D_2)^2}, \quad \eta_7 = \arctg \frac{-{}^{js}D_2}{{}^{js}D_1}, \quad \rho_8 = \rho_1, \quad \eta_8 = -\eta_1$$

$$\rho_9 = \rho_6 \cdot \rho_7 / \sqrt{\rho_1}, \quad \eta_9 = \eta_6 + \eta_7 + \eta_1/2 + \alpha_s - \alpha_j, \quad \rho_{10} = \rho_2, \quad \eta_{10} = -\eta_2$$

$$\rho_{11} = \sqrt{[\rho_6 \cos(\eta_6 - \alpha_j + \alpha_s) - \rho_9 \cos \eta_9]^2 + [\rho_6 \sin(\eta_6 - \alpha_j + \alpha_s) - \rho_9 \sin \eta_9]^2}$$

$$\eta_{11} = \arctg \frac{\rho_6 \sin(\eta_6 - \alpha_j + \alpha_s) - \rho_9 \sin \eta_9}{\rho_6 \cos(\eta_6 - \alpha_j + \alpha_s) - \rho_9 \cos \eta_9}$$

$$\rho_{14} = R_j \sqrt{[\cos(\theta_j + \alpha_j) + m_j \cos(\alpha_j - \theta_j)]^2 + [\sin(\theta_j + \alpha_j) + m_j \sin(\alpha_j - \theta_j)]^2}$$

$$\eta_{14} = \arctg \frac{\sin(\theta_j + \alpha_j) + m_j \sin(\alpha_j - \theta_j)}{\cos(\theta_j + \alpha_j) + m_j \cos(\alpha_j - \theta_j)}$$

(2.8)式左端用 $f(\sigma_j)$ 表示, 边界方程简写为 $f(\sigma_j) = 0$, 由 Harnack 定理可知 $f(\sigma_j) = 0$ 与柯

西型积分式
$$\oint_{\sigma_j} \frac{f(\sigma_j)}{\sigma_j - \xi_j} d\sigma_j = 0$$

等价^[3]. 将
$$\frac{1}{\sigma_j - \xi_j} = \frac{-1}{\xi_j \left(1 - \frac{\sigma_j}{\xi_j}\right)} = \left(-\frac{1}{\xi_j}\right) \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma_j}{\xi_j}\right)^p = -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sigma_j^p}{\xi_j^{p+1}}$$

代入柯西型积分得:

$$-\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\xi_j^{p+1}} \oint_{\sigma_j} \sigma_j^p f(\sigma_j) d\sigma_j = 0$$

由于 ξ 在 σ_j 之域外, $\xi_j^{p+1} \neq 0$, 因而

$$\oint_{\sigma_j} \sigma_j^p f(\sigma_j) d\sigma_j = 0 \quad (p=0, 1, 2, \dots, \infty)$$

这样就将边界方程化为线性代数方程组, 以利于求解. 具体作法是^{[6], [6]}: 将(2.8)式中不含有 a_k , b_k 的项移到右端, 方程两边同时乘以 $\sigma_j^p d\sigma_j = i \exp[i(p+1)\theta_j] d\theta_j$, 且积分, 积分区间为 $0 \sim 2\pi$, ($p=0, 1, 2, \dots, \infty$), 将方程按实部、虚部分成两个方程, 其中复系数

$$\begin{cases} a_k = a_k^* + ia_k' \\ b_k = b_k^* + ib_k' \end{cases}$$

a_k^* , b_k^* 为实部, a_k' , b_k' 为虚部. 以其中的一组实部方程为例整理后得:

$$\begin{aligned} ({}^j C_1 {}^j A_k^* - {}^j C_2 {}^j A_k') + \sum_{j=1}^{\infty} ({}^j F_1 {}^s A_k^* - {}^j F_2 {}^s A_k') + ({}^j G_1 {}^j A_k^* + {}^j G_2 {}^j A_k') \\ + \sum_{j=1}^n ({}^j H_1 {}^s A_k^* + {}^j H_2 {}^s A_k') + ({}^j E_1 {}^j B_k^* + {}^j E_2 {}^j B_k') \\ + \sum_{j=1}^n ({}^j L_1 {}^s B_k^* + {}^j L_2 {}^s B_k') = -(m_1 + n_1 + T_1) \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} {}^j A_k^* &= \{ {}^j a_1^*, {}^j a_2^*, \dots, {}^j a_k^* \}^T, & {}^j A_k' &= \{ {}^j a_1', {}^j a_2', \dots, {}^j a_k' \}^T \\ {}^j B_k^* &= \{ {}^j b_1^*, {}^j b_2^*, \dots, {}^j b_k^* \}^T, & {}^j B_k' &= \{ {}^j b_1', {}^j b_2', \dots, {}^j b_k' \}^T \\ {}^s A_k^* &= \{ {}^s a_1^*, {}^s a_2^*, \dots, {}^s a_k^* \}^T, & {}^s A_k' &= \{ {}^s a_1', {}^s a_2', \dots, {}^s a_k' \}^T \\ {}^s B_k^* &= \{ {}^s b_1^*, {}^s b_2^*, \dots, {}^s b_k^* \}^T, & {}^s B_k' &= \{ {}^s b_1', {}^s b_2', \dots, {}^s b_k' \}^T \\ {}^j C_1 &= \left| \int_0^{2\pi} \rho_3 \cos[(p-k+1)\theta_j + \eta_3] d\theta_j \right|_{\substack{k=1, 2, \dots, \infty \\ p=0, 1, 2, \dots, \infty}} \end{aligned}$$

${}^j C_1$ 为 $(k \times k)$ 矩阵, 下面各矩阵阶次相同, 为简便起见不再写出角标.

$$\begin{aligned} {}^j C_2 &= \left| \int_0^{2\pi} \rho_3 \sin[(p-k+1)\theta_j + \eta_3] d\theta_j \right| \\ {}^j F_1 &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{\rho_2^k \cdot \rho_3}{(2m_s R_s)^k} \cos[k\eta_2 + \eta_3 + (p+1)\theta_j] d\theta_j \right| \\ {}^j F_2 &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{\rho_2^k \cdot \rho_3}{(2m_s R_s)^k} \sin[k\eta_2 + \eta_3 + (p+1)\theta_j] d\theta_j \right| \\ {}^j G_1 &= \left| \int_0^{2\pi} (-k) \rho_6 \cdot \cos \eta_6 d\theta_j \right|, & {}^j G_2 &= \left| \int_0^{2\pi} (-k) \rho_6 \cdot \sin \eta_6 d\theta_j \right| \\ {}^j H_1 &= \left| \int_0^{2\pi} \rho_{12} \cos \eta_{12} d\theta_j \right|, & {}^j H_2 &= \left| \int_0^{2\pi} \rho_{12} \sin \eta_{12} d\theta_j \right| \\ {}^j E_1 &= \left| \int_0^{2\pi} \rho_3 \cos[(p+k+1)\theta_j + \eta_3] d\theta_j \right| \\ {}^j E_2 &= \left| \int_0^{2\pi} \rho_3 \sin[(p+k+1)\theta_j + \eta_3] d\theta_j \right| \\ {}^j L_1 &= \left| \int_0^{2\pi} \rho_{13} \cos \eta_{13} d\theta_j \right|, & {}^j L_2 &= \left| \int_0^{2\pi} \rho_{13} \sin \eta_{13} d\theta_j \right| \end{aligned}$$

右端项各个矩阵阶次皆为 $p=0, 1, \dots, \infty$ 为方便不再写出.

$$\begin{aligned}
 {}^j m_1 &= \left\{ \int_0^{2\pi} \rho_{15} \cos \eta_{15} d\theta_j \right\}, & {}^j n_1 &= \left\{ \int_0^{2\pi} \rho_{16} \cos \eta_{16} d\theta_j \right\} \\
 {}^j T_1 &= \left\{ \int_0^{2\pi} \left\{ -\rho_3 \cdot \rho_{14} \cdot \frac{N}{2} \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos[(p+1)\theta_j + \eta_3 - \eta_{14}] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \rho_3 \cdot \rho_{14} \cdot \frac{N}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin[(p+1)\theta_j + \eta_3 - \eta_{14}] \right\} d\theta_j \right\} \\
 \rho_{12} &= \frac{k\rho_2^{(k-1)} \cdot \rho_4 \cdot \rho_{11}}{(2m_s R_s)^k}, & \eta_{12} &= (1-k)\eta_2 + \eta_4 + \eta_{11} + (p+1)\theta_j \\
 \rho_{13} &= \frac{\rho_2^k \cdot \rho_3}{(2m_s R_s)^k}, & \eta_{13} &= -k\eta_2 + \eta_3 + (p+1)\theta_j \\
 \rho_{15} &= \frac{N}{4} \cdot \rho_3 \cdot \rho_{14}, & \eta_{15} &= (p+1)\theta_j + \eta_3 + \eta_{14} \\
 \rho_{16} &= \frac{N}{4} \cdot \rho_4 \cdot \rho_8, & \eta_{16} &= (p+1)\theta_j + \eta_4 + \eta_8 - \alpha_j
 \end{aligned}$$

对 (2.7) 式作如上同样的处理, 就得到另外两组方程, 这样就得到了满足 j 号孔边界条件的 $(4 \times k)$ 个线性方程组. 当有 n 个孔时, 将各个孔依次取作 j 号孔, 可以得到 $4nk$ 个线性方程, 未知系数共 $4nk$ 个:

$$\begin{aligned}
 &{}^1 a_1^*, {}^1 a_2^*, \dots, {}^1 a_k^*, {}^1 a_1', {}^1 a_2', \dots, {}^1 a_k', {}^1 b_1^*, {}^1 b_2^*, \dots, {}^1 b_k^*, {}^1 b_1', {}^1 b_2', \dots, {}^1 b_k', \\
 &{}^2 a_1^*, {}^2 a_2^*, \dots, {}^2 a_k^*, {}^2 a_1', {}^2 a_2', \dots, {}^2 a_k', {}^2 b_1^*, {}^2 b_2^*, \dots, {}^2 b_k^*, {}^2 b_1', {}^2 b_2', \dots, {}^2 b_k', \dots, \\
 &{}^n a_1^*, {}^n a_2^*, \dots, {}^n a_k^*, {}^n a_1', {}^n a_2', \dots, {}^n a_k', {}^n b_1^*, {}^n b_2^*, \dots, {}^n b_k^*, {}^n b_1', {}^n b_2', \dots, {}^n b_k'
 \end{aligned}$$

3. 应力计算:

根据已求出的应力函数 $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$, $\psi'(\xi)$ 及 $\omega(\xi)$ 代入下面公式中:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_\theta + \sigma_\rho &= 4\operatorname{Re}\varphi'(\xi) \\
 \sigma_\theta - \sigma_\rho + i2\tau_{\rho\theta} &= \frac{2\xi^2}{\rho^2 \omega'(\xi)} [\overline{\omega(\xi)} \Phi'(\xi) + \psi'(\xi)]
 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

就可求出应力 σ_θ , σ_ρ , $\tau_{\rho\theta}$ 值. 可以编制程序, 计算各孔边或其它点的应力值.

4. 裂纹的强度因子计算:

对于裂纹的强度因子计算, 可以借助于椭圆孔根部应力集中系数的结果按下式求出^[9]:

$$K_I = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} \cdot \sigma_{\max}$$

其中 $\rho = \frac{b^2}{a}$, 是切口根部的曲率半径, a , b 是椭圆长、短半轴. 对单椭圆孔的计算考

察表明, 对于 ρ 大的情况, 按 $K_I = \frac{1}{2} \sqrt{\pi\rho} \cdot \sigma_{\max}$ 计算, 而后插值得 K_I , 能得到很好的精度. 插值曲线对 $(b+2a)/\sqrt{a}$ 有很好的线性性质, 如下表 1 和图 2 所示.

表 1

$a=1 \quad N=1$

$\frac{b+2a}{\sqrt{a}}$	3.0 ($b=1$)	2.9 ($b=0.9$)	2.8 ($b=0.8$)	2.7 ($b=0.7$)	2.6 ($b=0.6$)	2.5 ($b=0.5$)	2.4 ($b=0.4$)	2.3 ($b=0.3$)
$(\sigma_\theta)_{\max}$	3.000	3.222	3.500	3.857	4.333	5.000	6.000	7.666
K_I'	2.658	2.570	2.481	2.393	2.304	2.215	2.127	2.038

K_I' 值可由线性外插公式给出:

$$K_I' = \frac{c_2(K_I')_1 - c_1(K_I')_2 + 2\sqrt{a}[(K_I')_2 - (K_I')_1]}{c_2 - c_1} \quad (2.10)$$

其中 $c_2 > c_1$, $(K_I')_2 > (K_I')_1$.

c_1 , $(K_I')_1$ 为第 1 点的 $(b+2a)/\sqrt{a}$ 和 K_I' 值,

c_2 , $(K_I')_2$ 为第 2 点的 $(b+2a)/\sqrt{a}$ 和 K_I' 值.

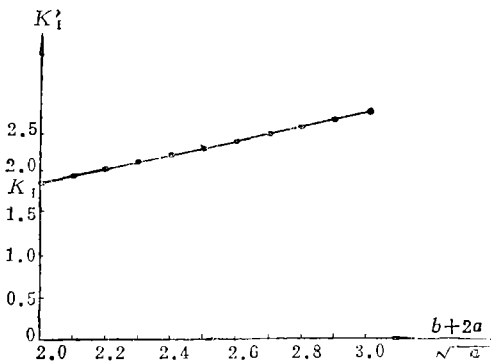


图 2

对上表的数值, 按插值公式(2.10)计算得 $K_I' = 1.77$, 理论值为 $K_I' = \sqrt{\pi a} \cdot N = 1.77$.

当裂纹周围有多个孔洞时, 可把此裂纹换成相应的椭圆, 并改变 b 值求出相应的 K_I' 值, 而后插值得到该裂纹的 K_I' 值. 也就是说, 将孔之间的相互影响反映在应力集中系数上, 间接地求 K_I' 值. 计算表明, b 值不必取得很小, 只要作出二、三个点就可得到较好的精度. 对于多个裂纹情况, 欲求某裂纹的 K_I' 值, 可将其余裂纹换成较扁的椭圆孔, 再用上面方法以求得近似 K_I' 值.

三、计算实例

例 1. 如图 3, 4, 5, 6 所示

(a)

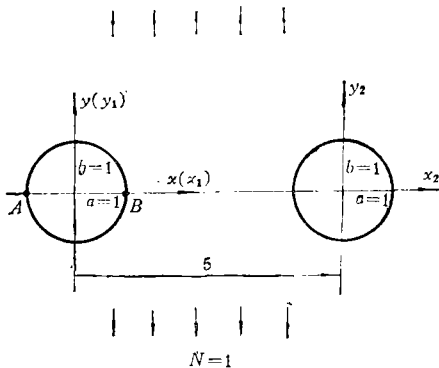


图 3

孔边: $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$

表 2

θ	0°	22.5°	45°
σ_θ	3.312	2.629	1.052
θ	67.5°	90°	112.5°
σ_θ	-0.441	-1.017	-0.382
θ	135°	157.5°	180°
σ_θ	1.083	2.532	3.131

$$(K'_I)_A = 2.774, (K'_I)_B = 2.935$$

(b)

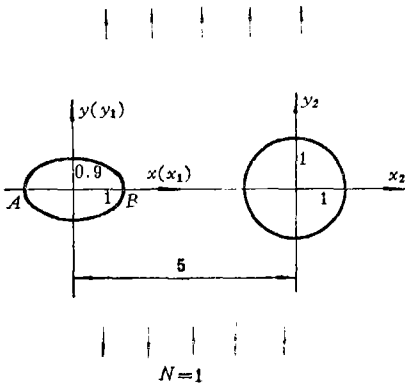


图 4

孔边: $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$

$$(K'_I)_A = 2.684, (K'_I)_B = 2.834.$$

(c)

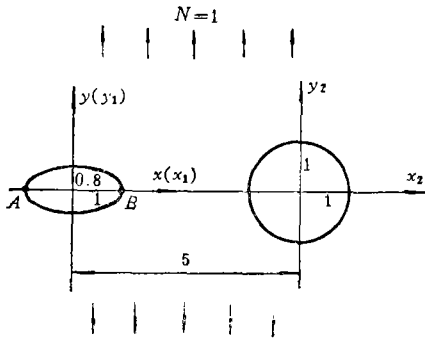


图 5

孔边: $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$

$$(K'_I)_A = 2.592, (K'_I)_B = 2.733.$$

(d)

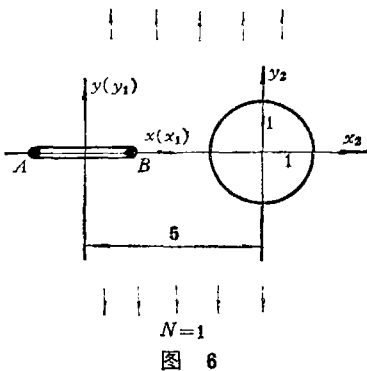


图 6

表 3

θ	0°	22.5°	45°
σ_θ	3.554	2.704	0.935
θ	67.5°	90°	112.5°
σ_θ	-0.514	-1.019	-0.408
θ	135°	157.5°	180°
σ_θ	0.969	2.608	3.365

表 4

θ	0°	22.5°	45°
σ_θ	3.855	2.772	0.793
θ	67.5°	90°	112.5°
σ_θ	-0.587	-1.021	-0.534
θ	135°	157.5°	180°
σ_θ	0.831	2.679	3.657

由插值公式 (2.10) 得: $(K_I)_A = 1.86, (K_I)_B = 1.92$. 与 [14] 中给出的结果比较: 取 $R/c = 0.2, a/d = 0.25, K_0 = N \cdot \sqrt{\pi a}$, 若 $N = 1, a = 1, K_0 = 1.772$, 由图表查出: $\frac{K_I}{K_0} = 1.02$ (A 点), $\frac{K_I}{K_0} = 1.03$ (B 点), 得 $(K_I)_A = 1.81, (K_I)_B = 1.83$.

例2. 如图7, 8, 9, 10所示:

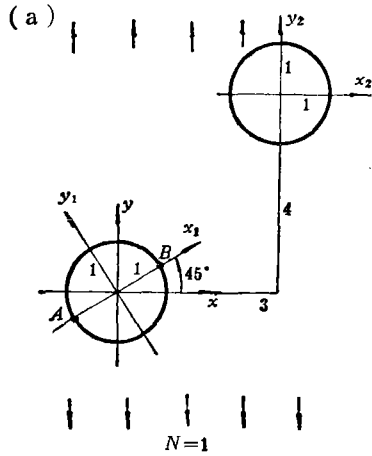


图 7

孔边: $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$

$$(K_I)_A = 1.93, (K_I)_B = 1.957.$$

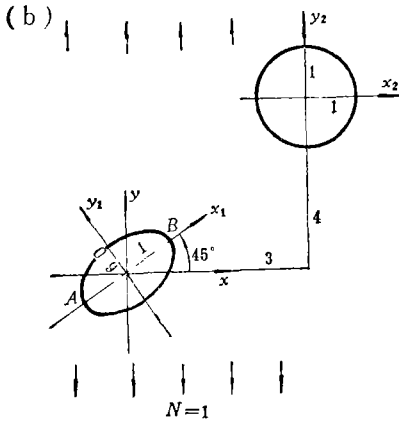


图 8

孔边: $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$

$$(K_I)_A = 1.866, (K_I)_B = 1.893.$$

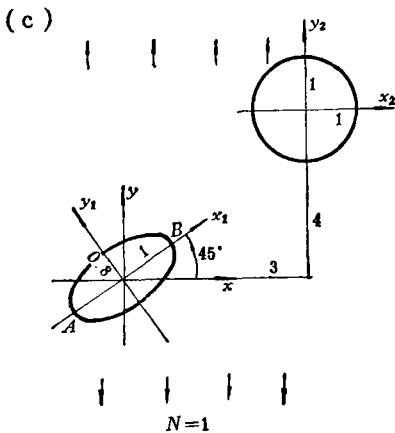


图 9

孔边: $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$

表 5

θ	σ_θ
0°	2.208
30°	0.403
60°	-1.108
90°	-0.706
120°	1.204
150°	2.653
180°	2.178

表 6

θ	σ_θ
0°	2.373
30°	0.336
60°	-1.126
90°	-0.709
120°	1.066
150°	2.709
180°	2.340

表 7

θ	σ_θ
0°	2.579
30°	0.246
60°	-1.145
90°	-0.712
120°	-0.919
150°	2.754
180°	2.543

$$(K_I)_A = 1.803, (K_I)_B = 1.828.$$

(d)

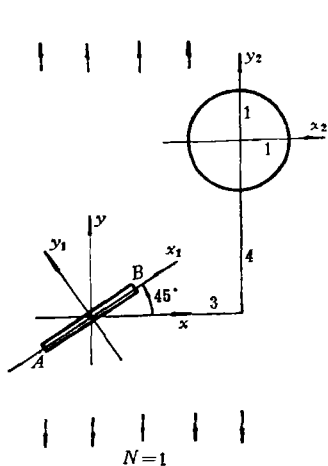


图 10

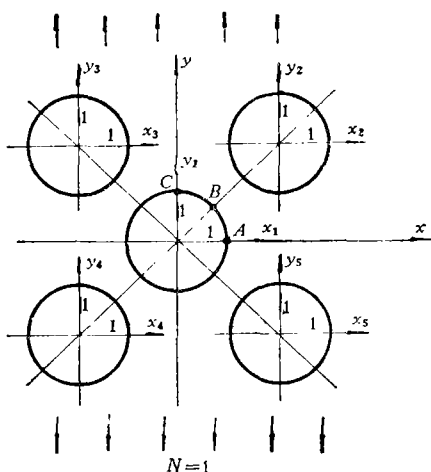


图 11

由公式(2.10)得:

$$(K_I)_A = 1.29,$$

$$(K_I)_B = 1.31.$$

例3. 5个等圆孔的情况: 如图 11 所示.

用本文方法计算, 同时进行光弹实验^[15], 并进行比较. 各孔均布, 与中心孔距离为 $4.73/R$, ($R=1$). 比较中央孔边 A, B, C 三点的 σ_θ 值, 由表 8 可见符合较好.

表 8

孔边	A 点	B 点	C 点
计算值	2.866	1.052	-0.909
实验值	2.82	1.013	-0.94

本文得到孙焕纯副教授, 周承侗、唐立民教授等同志的帮助指导, 表示衷心感谢.

参 考 文 献

- [1] Ling, C. B., On the stress in a plate containing two holes, *J. App. Phy.*, 19, Jan. (1948), 77—81.
- [2] Schulz, K. J., *Proc. Nederl. Akad. von wetenschappen*, 45 (1942), 233, 341, 457, 524; 48 (1945), 282, 292.
- [3] Мухелишвили, Н. И., 《数学弹性力学中的几个基本问题》, 赵惠元译, 科学出版社 (1958)
- [4] Савин, Г. Н., 《孔附近的应力集中》, 卢鼎霍译, 科学出版社, (1958).
- [5] 唐立民, 弹性平面上相邻几个圆孔的应力集中分析, 科学记录, (1959, 10).
- [6] Chen Lin-si, On the problem of stress concentrations in the presence of many holes, *Problems of Continuum Mechanics* (1961).
- [7] 唐立民、周承侗, 靠近边缘的洞孔的应力集中问题, 大连工学院学报, 6 (1959).
- [8] 孙焕纯, 无限长狭条被任意形状孔洞所削弱的应力集中问题, (1961), (未发表).
- [9] 孙焕纯等, 半无限平面被不等直径的两圆孔所削弱的应力集中问题, 大连工学院学报, 1(1960).
- [10] 唐立民、周承侗, 非圆孔洞的应力集中问题, 大连工学院学报, 6 (1959).
- [11] 周承侗、胡义祥, 宏观与微观相结合的球墨铸铁的断裂力学分析, 大连工学院工程力学研究所科研报告, 79—3056, (1979).
- [12] Panasyuk, V. V., A general method of solution of two-dimensional problems in the theory of crack, *J. of Engineering Fracture Mechanics*, 9, 2 (1977).
- [13] 北京钢铁研究院, 《工程断裂力学》, 国防工业出版社, (1977), 53.
- [14] Rooke, D. P. and D. J. Cartwright, *Compendium of Stress Intensity Factors*, (1976), 167.
- [15] 关长文, 多孔介质的应力场分析与计算, 大连工学院工程力学研究所研究生论文, (1980).
- [16] Isida, M., *Mechanics of Fracture*, 1, 1 (1973).

Stress Concentration and Stress Intensity Factors for an Infinite Plane with Several Rows of Elliptic Holes and Cracks

Zhou Cheng-fan Guan Chang-wen

(Dalian Institute of Technology, Dalian)

Abstract

This paper deals with the stress concentration on the plane with several arbitrarily distributed elliptic holes. By using the functions of complex variables, the stress functions, in which the interactions of neighbouring holes have been taken into consideration, can be constructed. By applying the conformal mapping method to satisfy the boundary conditions of each hole, the governing equations can then be transformed into a set of simultaneous equations through boundary integrals. Moreover, the problems with crack can be derived by changing the elliptical rates of the ellipses thereby an approximate solution of cracking problem may be obtained. Some computing examples are given in the paper.