

文章编号: 1000-0887(2004)11-1203-08

弹性接触问题的一种新的力学模型^{*}

陆志华^{1,2}, 叶庆泰²

(1. 上海三菱电梯有限公司 技术中心, 上海 200245;
2. 上海交通大学 机械和动力工程学院, 上海 200030)

(叶庆泰推荐)

摘要: 从机械系统的角度出发, 描述了系统中构件间局部接触与构件弹性变形间的耦合关系; 用多组坐标系描述机械系统中物体的位形; 用分离接触边界法描述物体接触边界间的约束; 通过接触虚功原理建立了更加广泛意义上的接触系统静力学模型。作为算例, 将该力学模型应用于内啮合少齿差行星齿轮多齿啮合问题的研究, 揭示了行星齿轮传动中有多对轮齿相互接触, 获得了其接触应力分布状态。通过实验验证了力学模型、计算方法和计算结果的正确性。

关键词: 机械系统; 接触问题; 行星齿轮传动

中图分类号: TH114; O343.3 **文献标识码:** A

引 言

本世纪五十年代以来接触问题的研究得到了极大发展, 并在工程中得到了广泛应用^[1~9]。然而以往人们都是在单一的坐标系下描述物体局部区域之间或简单系统的接触问题。这种描述方法圆满地描述了仅作平动物体间的接触问题, 但在描述力矩驱动下作转动的物体间的接触问题时遇到了困难。此时, 一般需另作特殊处理, 如用等效力替代力矩的方法^[10]等。这种处理方法往往取决于经验和技巧, 处理不当将不能获得满意解。为此本文从机械系统的角度出发, 建立多组坐标系描述物体之间的接触问题。用接触虚功原理建立一类描述机械系统中多区域接触问题的力学平衡方程; 用一组代数方程组描述接触物体之间的约束关系, 获得一组包含力学平衡方程和约束方程的非线性代数方程组, 构成求解接触问题的新的力学模型。本文最后以少齿差行星齿轮传动为例, 求解其边界接触状态和应力分布状态, 以验证本文提出方法的正确性。

1 建立坐标系·空间任意一点的位置矢量

机械系统中的构件包括刚体和可变形体。图 1 中 XYZ 为整体坐标系。物体 i 为一刚体, $X^i Y^i Z^i$ 为机械系统中任一物体 i 的物体坐标系, 其原点 O^i 固连于物体 i 上, 并随物体 i 一起运动。此时, 机械系统中刚体 i 上任一点的位置 P 可表示成^[11]:

* 收稿日期: 2002_12_11; 修订日期: 2004_06_20

作者简介: 陆志华(1969—), 男, 江苏人, 高级工程师(联系人, Tel: + 86_21_64303030(o); + 86_21_62804662(h); E_mail: lzh2001@yahoo.com);
叶庆泰(1941—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师

$$r_p^i = R^i + A^i u^i, \quad (1)$$

其中 R^i 表示物体坐标系原点 O^i 在整体坐标系中的坐标, u^i 表示 P 点在物体坐标系中的局部位置矢量, A^i 表示从物体坐标系到整体坐标系的转换矩阵, 它是旋转广义坐标 θ^i 的函数。因此刚体上任一点的位置矢量可由一组广义坐标 $q_r^i = [R^i \ \theta^i]^T$ 确定。

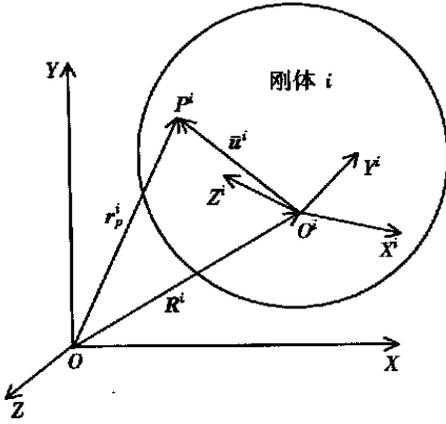
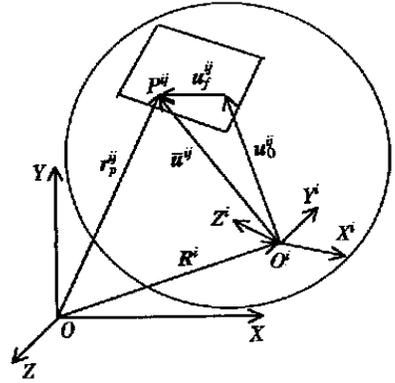
图1 描述刚体 i 的坐标系图2 描述可变形体 i 的坐标系

图2表示机械系统中第 i 个可变形体上第 j 个单元内任意点 P 在物体 i 变形后的位形。当用等参单元网格划分可变形体时, P 点在整体坐标系中的位置矢量^[12]为

$$r_p^{ij} = R^i + A^i N^{ij} (q_0^{ij} + q^j), \quad (2)$$

式中 R^i 表示第 i 个物体坐标系原点 O^i 在整体坐标系中的位置矢量, A^i 表示转换矩阵^[11], N^{ij} 为单元形函数; q_0^{ij} 表示当物体未变形时单元节点在物体坐标系 $X^i Y^i Z^i$ 中的位置坐标矢量, q^j 表示单元节点在物体坐标系 $X^i Y^i Z^i$ 中的弹性位移矢量, 则空间可变形体上的任意一点的位置可由一组广义坐标 $q^j = [R^i \ \theta^i \ q^j]^T$ 确定。

2 机械系统中物体间的接触边界条件

机械系统中物体间的接触边界条件主要包括物体之间互不嵌入条件和摩擦条件。文献[2~5]等将之归结为互补模型, Chen^[6]和何^[7]则将上述条件融入问题的求解过程。其实质是一致的。与以往形式不同, 本文提出用一组代数约束方程描述接触边界上接触点之间的约束关系(互不嵌入条件); 并用摩擦条件判别物体间的接触状态^[6]。

2.1 互不嵌入条件

本文采用点面接触物理模型^[7]来描述构件在接触区域的接触情况。如图3所示为划分网格后主动接触体 A 上可能接触节点 E 与被动接触体 B 上可能接触边界 IJ 的接触情况, 本文将分三种情况讨论之。

2.1.1 开式接触

图3所示为开式接触, 是指在可能接触区域内节点 E 并未发生接触, 即在该点处无约束存在, 因此在该处既无约束也无约束反力(接触力)。

2.1.2 粘式接触

当图3中主动接触 A 上的点 E 与被动接触体 B 的边界 IJ 上的点 H 接触, 但不发生滑动时, 点 E 与 B 体上的 H 点相粘结。此时, 可假设用以下约束方程表示点 H 与 E 之间的限制约束关

系:

$$r_E - r_H = 0, \tag{3}$$

式中 H 点表示 E 到边界 IJ 的垂点, r_E 表示 E 点的位移矢量, r_H 表示 H 点的位置矢量。

2.1.3 滑式接触

当 E 点在 IJ 上滑动时, 约束方程为:

$$n_H^T \cdot (r_E - r_H) = 0, \tag{4}$$

该式表示在 H 点的法线方向没有相对位移, 切线方向自由。

式中 n_H^T 表示 H 点法向矢量, 表示两物体在该处仅在法线方向有限制关系。如图 4 所示。

将式(1)和(2)代入(3)和(4), 可将式(3)和(4)统一写成以下约束方程组

$$C(q) = 0, \tag{5}$$

式中 q 表示系统总体广义坐标, 它由前文中广义坐标 q^j 组集而成。

由以上三种接触模式可知: 接触点间仅传递力, 而不传递力矩。

2.2 摩擦条件

前文从几何关系上讨论了接触点间的约束关系, 本节则从接触力的角度讨论物体接触边界间的接触条件, 它们互为补充构成了接触问题的接触边界条件。

在接触边界上, 假设摩擦是按库仑定律, 即所谓干摩擦。

图 4 为某一状态下主动接触体 A 上的 E 点与被动接触体 B 边界 IJ 上 H 点的接触示意图。图中 P_n 、 P_τ 分别表示 E 点在法向和切向受到的约束反力, 设 μ_s 为物体间的静摩擦系数。

当 $P_n \leq 0$ 时, E 点受到拉力作用, 这种情况是不可能出现的, 因此在下一次计算中, 可认为 E 点与 IJ 为分离状态, 即开放式接触状态。

当 $P_n \geq 0$ 时, E 点受压力作用, 认为 E 点与 H 点的间隙为零, 此时, 若 $|P_\tau| \leq \mu_s |P_n|$, 则认为 E 点与 H 点在该时刻处于粘结状态, E 点与 H 点之间的约束满足代数方程(3); 若 $|P_\tau| > \mu_s |P_n|$, 则认为 E 点在该时刻正在边界 IJ 上滑动。在计算时还须判别滑动方向。

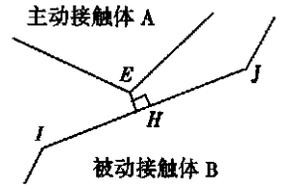


图 3 主动接触体上点 E 与被动接触体上边界 IJ 可能发生接触

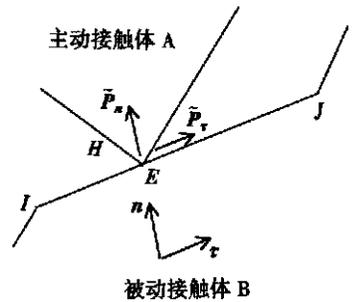


图 4 局部坐标系和作用力示意图

3 建立力学模型

3.1 分离接触边界法

分离接触边界法即将两互相接触的物体分离, 用等效载荷替代接触体间相互作用力的分布, 等效地使系统满足平衡状态。

对系统中的可变形体划分网格后, 获得系统离散后的物理模型, 如图 5 或图 6 所示。图 5 和图 6 为物体 i, j 在局部接触区域的示意图。图中用接触作用点处集中力 $P_1^i, P_2^i, P_1^j, P_2^j$ 或 $P_n^i, P_\tau^i, P_n^j, P_\tau^j$ 替代物体在划分网格前互相作用的分布力 p^i 和 p^j , 其中 P_1^i, P_2^i 分别为相应整体坐标轴 X 和 Y 轴方向的作用力与反作用力; P_n^i, P_τ^i 分别为相应接触边界法线 n 和切线 τ 方向的作用力与反作用力。满足:

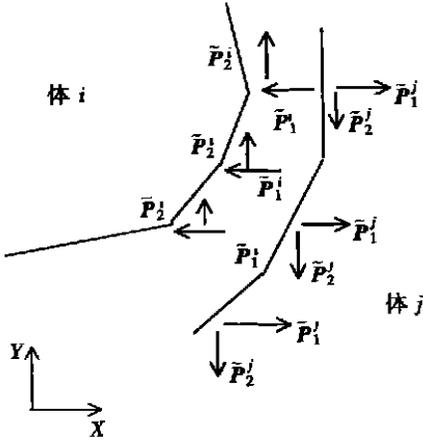


图 5 接触点作用力在整体坐标系中的分量

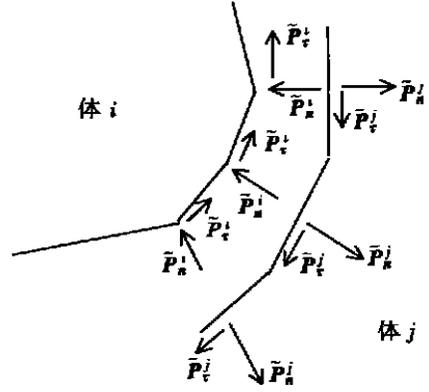


图 6 接触点作用力在接触边界切向和法向的分量

$$P = \begin{pmatrix} P_1' \\ P_2' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} P_1'' \\ P_2'' \end{pmatrix} \text{ 或 } P = \begin{pmatrix} P_n^i \\ P_t^i \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} P_n^j \\ P_t^j \end{pmatrix} \quad (6)$$

3.2 含有接触问题的机械系统虚功方程

当机械系统中既含有刚体又含有可变形体时,假设刚体上的主动力和力矩已简化到刚体质心上,并对系统中的变形体划分网格。由第 1 节对多体机械系统中第 i 个体上第 j 单元的描述,引入分离接触边界法,并假设系统中有 L_c 对接触点,此时含有接触问题的机械系统虚功方程可写成

$$\sum_{\alpha=1}^{n_b} \sum_{\beta=1}^{n_E} \left[\int_{\Omega^{\alpha\beta}} (\sigma^{\alpha\beta T} \delta \varepsilon^{\alpha\beta} - f^{\alpha\beta T} \delta r^{\alpha\beta}) d\Omega - \int_{S_0^{\alpha\beta}} p^{\alpha\beta T} \delta r^{\alpha\beta} ds \right] - \sum_{l=1}^{L_c} [P_l^T \delta(r^{il} - r^{jl})] - \sum_{\alpha=1}^{n_{sb}} (F^{\alpha T} \delta r^{\alpha} + M_0^{\alpha} \delta \theta^{\alpha}) = 0, \quad (7)$$

式中 n_b 表示机械系统中可变形体的个数, n_E 表示第 α 体上的单元数; n_{sb} 表示系统中的刚体数; $\sigma^{\alpha\beta}$ 、 $\varepsilon^{\alpha\beta}$ 和 $\delta r^{\alpha\beta}$ 分别为第 α 体上第 β 单元中任一点的应力、应变和虚位移; $f^{\alpha\beta}$ 表示作用于第 α 体上第 β 单元中任意一点的体力; $p^{\alpha\beta}$ 表示作用于第 α 体上第 β 单元中任意一点的边界分布力; P^l 表示第 l 对接触点的互作用力; r^{il} 表示第 l 对接触点中属于第 i 个物体上的那个点的位置矢量; F^{α} 表示作用于第 α 个刚体上的总体外载荷合力, M_0^{α} 表示作用于第 α 个刚体上的总体力矩; r^{α} 为刚体上力作用点的位置矢量。

假设第 l 对接触点为系统中第 i 物体第 m 单元上的某点和物体 j 单元 k 上某点相接触。由式(1)、式(2)和弹性有限元法对刚度矩阵的推导方法,上式(7)又可写成

$$q^T K \delta q - Q_e^T \delta q - \sum_{l=1}^{L_c} [P_l^T \delta(r^{im} - r^{jk})] = 0, \quad (8)$$

式中 $q = \begin{pmatrix} R & \theta & q_f \end{pmatrix}^T$ 为系统总体广义坐标,其中 R 和 θ 为对应于物体刚体位移的总体广义坐标, q_f 为系统中总体节点弹性位移矢量, K 表示系统总体刚度矩阵, Q_e 表示作用于系统的总体广义外力, P_l 表示第 l 对接触点处的互作用力, δr^{im} 表示单元 im 上接触节点虚位移, δr^{jk} 表示单元 jk 上接触节点虚位移。由第 2 节,根据物体间三种接触状态可获得式(8)的显示表达式。

1) 开式接触• 开式接触即物体间没有接触, $P_l = 0$ •

2) 粘式接触• 将式(2)代入式(8)可得

$$P_l^T \cdot \delta(r^{im} - r^{jk}) = P_l^T C_{q(\text{stick})} \delta q = Q_{\text{estick}} \delta q \quad (9)$$

由于接触点间满足约束方程(3), $\delta(r^{im} - r^{jk})$ 恰好为约束方程的雅可比矩阵, 因此式中 $C_{q(\text{stick})}$ 为粘式接触方程组(3)的雅可比矩阵; Q_{estick} 为广义约束力•

3) 滑式接触• 当边界上接触点间发生相对滑移时, 须分两种情况讨论:

i) 当摩擦系数 $\mu = 0$ 时, 即切向力等于零时

$$P_l^T \cdot \delta(r^{im} - r^{jk}) = P_n^T C_{q(\text{slid})} \delta q = Q_{\text{eslid}} \delta q, \quad (10)$$

其中 $C_{q(\text{slid})}$ 为滑式接触方程(4)的雅可比矩阵•

ii) 当摩擦系数 $\mu \neq 0$ 时, 即切向力不等于零时

$$P_l^T \cdot \delta(r^{im} - r^{jk}) = P_n^T n^T \delta(r^{im} - r^{jk}) + P_\tau^T \tau^T \delta(r^{im} - r^{jk}) = P_n^T n^T (I + \mu_d I)^T \delta(r^{im} - r^{jk}) = P_n^T C_{q(\text{slid})} \delta q = Q_{(\text{slid})} \delta q, \quad (11)$$

式中 μ_d 为动摩擦系数; n 和 τ 分别为接触边界法向和切向矢量, 如图 4•

当 $P_\tau > 0$ 时, $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; 当 $P_\tau < 0$ 时, $I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ •

将式(9)、(10)和(11)代入(8), 经过适当处理可得

$$q^T K - Q_e^T + \lambda^T C_q = 0, \quad (12)$$

式中 λ 由边界约束力 P_1^i 、 P_2^j 和 P_n^i 、 P_τ^i 按约束方程的次序组集后取负数获得, C_q 的意义参见式(9)、(10)和(11)• 方程组(12)与约束方程(5)构成了弹性接触系统更广泛意义上的静力学模型• 可合写为

$$\begin{cases} Kq - Q_e + C_q^T \lambda = 0, \\ C(q) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

式(13)实际上为一组以广义坐标 q 和 Lagrange 乘子 λ 为基本未知量的非线性代数方程组•

4 实验与算例

4.1 实验与算例概述

现将从实验获得的某些结果与本文计算结果相对照, 说明本文提出模型的正确性和实用性•

图 7(a)为一少齿差行星齿轮传动示意图, 图中 Z_1 、 Z_2 分别为对称布置的两外圆柱齿轮, 它们分别与内齿轮 Z_3 对称啮合• 其中 O_1 、 O_2 和 O_3 分别为三个齿轮中心• 本文选用八节点四边形等参元网格对系统划分网格, 图 7(b)为图 7(a)中 Γ 处接触区域局部网格放大图• 在实际传动过程中齿轮 Z_1 、 Z_2 将分别与内齿轮 Z_3 对称啮合并绕 O_3 作偏心转动^[12]• 其中材料弹性模量: $E = 2.1 \times 10^5$ Mpa, 泊松比 $\nu = 0.3$, 摩擦系数 $\mu_s = \mu_d = 0.1$, 其中 μ_s 和 μ_d 分别为静、动摩擦系数; 内外齿轮共同的参数: 模数 $m = 4$ mm, 齿顶高系数 $h = 0.8$, 齿顶高降低系数 $\sigma = 0.04$, 顶隙系数 $c = 0.3$, 压力角 $\alpha = 30^\circ 45'$, 中心 $a = 6.56$ mm, 外齿轮的基本参数: 齿轮 $z_1 = z_2 = 57$, 变位系数 $x_1 = x_2 = 1.21$; 内齿轮的基本参数: 齿数 $z_3 = 60$, 变位系数 $x_3 = 1.39$ •

4.2 实验与算例结果分析

本文主要提供以下两方面的结果:

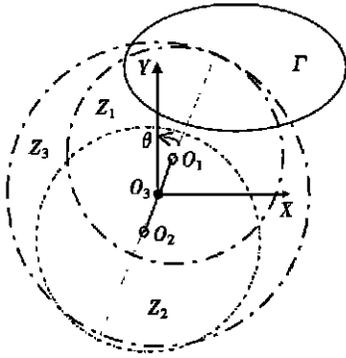


图 7(a) 行星齿轮传动示意图

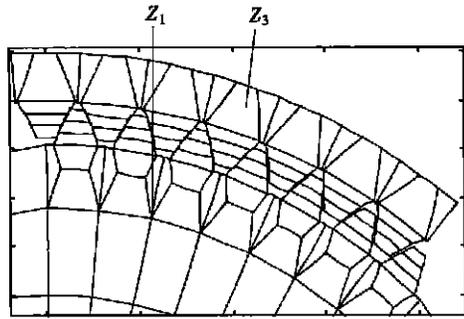


图 7(b) Gamma 处局部轮齿啮合接触区域网格图

1) 计算结果显示图 8 为当输出力矩为 $784 \text{ N}\cdot\text{m}$, 齿轮在某一位置啮合时轮齿的接触应力分布状态。

根据计算获得的接触力可判别此时有三对齿在 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 处进入了啮合。图 8 主要分两部分, 上部分为主应力图; 下部分为应力值标识条。条的左端趋于负应力(黑色), 右端趋于拉应力(淡灰)。从图中可大致判别应力分布情况。

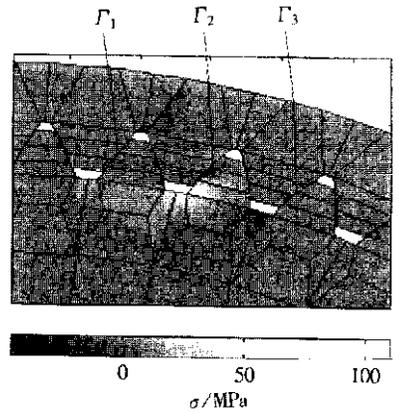


图 8 位置 1 的主应力图 σ_1

2) 通过实验和计算结果可分析啮合轮齿对数。

我们曾对该少齿差行星齿轮转动系统进行了大量实验, 经处理数据获得直方图 9(a) 和 9(b), 图 9(a) 和 9(b) 分别在输出力矩 $784 \text{ N}\cdot\text{m}$ 和 $1176 \text{ N}\cdot\text{m}$ 作用下获得。图 9(a) 和 9(b) 表示齿轮在 10 个啮合位置上的啮合齿对数 \ln 的情况。图中横坐标表示齿轮啮合的 10 个位置, 纵坐标表示相应某啮合位置的轮齿啮合对数 \ln 。从实验可知在载荷 $784 \text{ N}\cdot\text{m}$ 作用下该范围内有 3~4 对齿加入了啮合; 当载荷为 $1176 \text{ N}\cdot\text{m}$ 时则都有 4 对齿啮合。

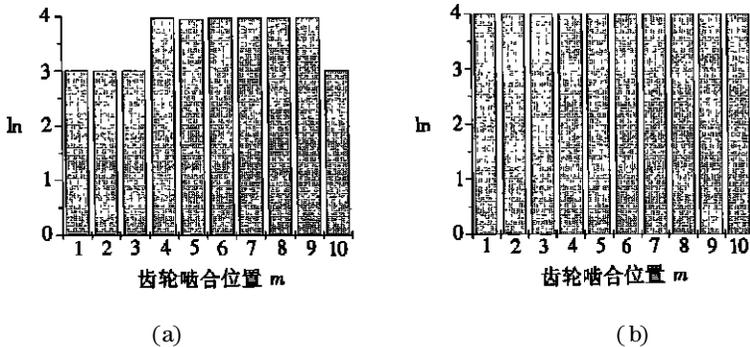


图 9 轮齿啮合对数直方图(实验结果)

图 10(a) 和 10(b) 的基本意义与图 9(a) 和图 9(b) 相同, 只是该结果是根据本文提供的力学模型而编制的计算程序 STATION 计算获得。

由图 10(a) 和图 10(b) 可知在载荷 $784 \text{ N}\cdot\text{m}$ 作用下该范围内有 2~3 对齿加入了啮合; 当载荷为 $1176 \text{ N}\cdot\text{m}$ 时则也有 2~3 对齿啮合, 只是 3 对齿啮合的情况增加。

实验结果大致验证了计算结果的正确性。两者结果有一定差异, 但这些差异完全在工程

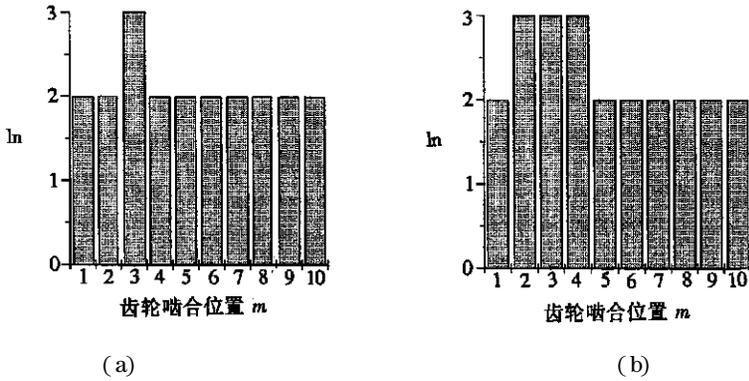


图 10 轮齿啮合对数直方图(计算结果)

允许的误差范围内,因为计算表明:即将啮合的第 4 对齿间的间隙仅为 $7 \sim 8 \times 10^{-3}$ mm,它是由齿轮制造误差、齿间油膜以及计算模型的网格划分等多方面的因素造成的。

根据常规机械设计原理获得的以上齿轮传动的重合度 $\varepsilon = 1.031$,说明该少齿差行星传动系统仅有 1~2 对齿进入啮合^[12~13]。事实上,实验和计算结果都表明齿轮在实际运行中的啮合齿对数大于常规设计的啮合齿对数,为此,每个齿分配到的载荷必然减小,说明现行的齿轮设计趋于保守。实验和计算结果还表明随着载荷增加,齿轮系统中的啮合齿对数也有所增加。

5 结 论

1) 当用传统的接触问题力学模型求解该算例时,须作特殊处理。而本文提出的力学模型则不必作任何假设。因此本文的力学模型适用于求解工程中更为广泛的接触问题。

2) 关于内啮合行星齿轮多齿啮合问题早已被工程技术人员所发现,但未能从理论上加以论证。本文所提出的新的接触问题建模方法及其解法,填补了该类问题理论解的空白,经与实验验证,与实际情况较为吻合。

[参 考 文 献]

- [1] 李润方,龚剑霞. 接触问题数值计算方法及其在机械设计中的应用[M]. 重庆:重庆大学出版社, 1989.
- [2] Klarbring A. A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1986, **58**(3): 175—200.
- [3] Holmberg G. A solution scheme for three-dimensional multi-body contact problems with friction using mathematical programming[J]. Computers & Structures, 1990, **37**(4): 503—514.
- [4] 陈国庆,陈万吉,冯恩民. 三维接触问题的非线性互补原理及算法[J]. 中国科学 A 辑, 1995, **25**(11): 1181—1190.
- [5] 吕和祥,马莉颖. 三维接触问题的拟二维序列解法[J]. 固体力学学报, 1996, **17**(1): 31—37.
- [6] CHEN Wen_hwa, YEH Jyi_tyan. Finite element analysis of finite deformation contact problems with friction[J]. Computers & Structures, 1988, **29**(3): 423—436.
- [7] 何君毅,林祥都. 工程结构非线性问题的数值解法[M]. 北京:国防工业出版社, 1994.
- [8] ZHAO Hua. The virtual contact loading method for contact problems considering material and geometric nonlinearities[J]. Computers & Structures, 1996, **58**(3): 631—632.
- [9] 李光耀,钟志华. 显示有限元方法求解二维壳体塑性大变形问题[J]. 工程力学, 1997, **14**(3): 78—

87.

- [10] 丁玉成, 王建军, 李润方. 直齿轮接触有限元分析及轮齿热弹性变形[J]. 重庆大学学报, 1987, 4(2): 1—9.
- [11] Shabana A A. Dynamics of Multibody Systems [M]. John Weley & Sions Inc, 1989.
- [12] 陆志华. 柔性多体机械系统中多区域接触问题理论建模及试验研究[D]. 博士学位论文. 上海: 上海交通大学, 1999.
- [13] 孙桓, 傅则绍. 机械原理[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990.

A New Satic Mechanics Model to Solve Contact Problems in Mechanical Systems

LU Zhi_hua^{1,2}, YE Qing_tai²

(1. R & D Centre, Shanghai Mitsubishi Elevator Co, Ltd, Shanghai 200245, P. R. China;

2. School of Mechanical Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P. R. China)

Abstract: The coupling of the local contact problems between the components and the deformation of the components in the mechanical system were discovered. A series of coordinate systems have been founded to describe the mechanical system with the contact problems. The method of isolating the boundary of contact body from others has been used to describe the constraint between the contacting points. A more generalized static mechanics model of the mechanical system with the contact problems has been founded through the principle of virtual work. As an application, the model was used to study the multi_teeth engagement problems in the inner meshed planet gear systems. The stress distribution of contact gears was got. A test has verified that the static contact model and the computational method are right.

Key words: mechanical system; contact problem; planet gear drive