

# 半无穷长圆管内的低雷诺数入口流

吴望一 R. 斯加拉克

(北京大学力学系) (美国哥伦比亚大学土木工程和工程力学系)

(钱伟长推荐, 1983年1月18日收到)

## 摘 要

1969年Lew及Fung<sup>[1]</sup>计算了圆管内的低雷诺数入口流, 1982年Dagan等人<sup>[2]</sup>得到了有限长圆柱形孔道内蠕动流的级数解. [1]中所得的数值解实质上代表有限长圆管内的低雷诺数入口流, 因为一般解中的富氏积分已用富氏级数代替. 本文直接计算富氏积分, 更精确地求出了真正的半无穷长圆管内Stokes入口流的速度分布, 压力分布以及流函数, 与此对应的入口段长度为圆管半径的1.2倍, 接近于Lew及Fung得到的结果1.3倍. 此外, 本文还研究了配置法的收敛性, 证明了此法在入口流问题中具有很好的收敛性, 因此可以在其他类似的问题中采用.

## 一、引 言

半无穷长圆管内的入口流是粘性流体运动中的一个经典问题. 在中等雷诺数的范围内早有许多学者对此作了许多研究(参看Goldstein<sup>[3]</sup>, Rosenhead<sup>[4]</sup>, Schlichting<sup>[5]</sup>), 并得到了入口段长度 $L$ 近似地等于 $0.16aRe$ 的结果, 这里 $Re$ 是雷诺数,  $a$ 是圆管半径. 1969年Lew和Fung<sup>[1]</sup>首次研究了半无穷长圆管内的低雷诺数Stokes入口流, 并得到级数形式的分析解. 为了避免数值地计算复杂的富氏积分的麻烦, 文[1]用富氏级数近似地代替富氏积分, 这在物理上等价于用有限长的管子逼近半无限长的管子. Lew及Fung认为, 在Stokes流动中, 某一给定点的扰动只影响这一点邻域内的流动(类似于圣维南原理), 而对远方的流动影响不大. 因此有限长管子中的入口流可以认为是半无穷长圆管中入口流的很好的近似. Dagan等人的工作<sup>[2]</sup>支持了这种观点, 他们证明, 有限长孔道入口流的速度剖面当 $b/2a > 1/2$ 时几乎不变, 这里 $b$ 是孔道的长度. 另一方面, Gluckman等人<sup>[6]</sup>举出以下实例: 两同样大小的圆球, 间隔为20倍圆球直径, 在平行于圆球中心联线的方向上有Stokes流流来. 根据Stimson和Jeffery<sup>[7]</sup>的准确解, 双球问题中每一个圆球的阻力仍然和单球问题中的阻力差5%. 这样的偏差显然是相当显著的, 因为对第一个圆球的圆心来说, 第二个圆球边界所张的立体角只有整个立体角的 $1/1600$ . 这个例子清楚地说明了在无界Stokes流动中, 扰动的衰减是非常缓慢的. 因为[1]和[2]中所得的解只代表有限长圆管中入口流的结果, 因此准确地研究半无穷长圆管内低雷诺数流动的入口流问题看来仍然是十分有价值的.

本文采用数值计算方法计算一般解中出现的富氏积分. 采用配置法匹配入口处的速度剖面, 得到了均匀入口流情形下半无穷长圆管内低雷诺数入口段中的速度分布, 压力分布和流函数. 和文[1]的结果比较发现我们的解在数值上和Lew及Fung的结果相似. 例如, 我们导出的入口段长度为 $L=1.2a$ , 和Lew及Fung的结果 $1.3a$ 相近, 但是我们所得的速度剖面和他

们的不同,相差百分之几,这是因为Lew及Fung在壁面附近没有能准确地满足入口处速度剖面所致。

当圆柱的入口处被另外的边界包围时,具有均匀速度的入口流实际上是不可能存在的,例如,圆管和无界平面通过圆孔联接,此时入口截面处的速度剖面将远比均匀剖面接近抛物型,正因为这个原因,本文又计算了进口处非均匀速度分布的入口流,得到了入口段长度  $L$  等于  $0.5a$  的结果(类似于[2]中的结果)。

为了检验配置法的收敛性,本文还进行了数值实验,数值实验的结果表明,配置法在入口流问题中收敛得相当快,从而使这类计算具有可以信赖的基础,并有可能在类似问题中采用。

## 二、数 学 提 法

考虑半无穷长圆管内的Stokes流动,取图1所示的柱坐标系,原点放在初始横截面的中点

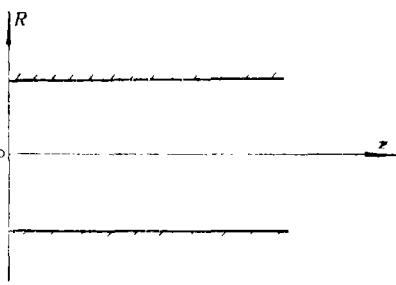


图1 半无穷圆柱的几何图形

上,取  $a, U, \frac{\mu U}{a}, Ua^2$  为长度,速度,压力和流函数的特征值,其中,  $a$  是圆管的半径,  $U = Q/\pi a^2$  是平均流速,  $Q$  是体积流量,  $\mu$  是流体的动粘性系数,以它们为参考值,Stokes流动的无量纲形式的方程组为

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1)$$

其中  $\mathbf{v}$ ,  $p$  为无量纲的速度矢量及压力函数,  $\nabla$  是哈密尔顿算子,由于流动的轴对称性,存在着流函数  $\psi$ ,它和径向速度分量  $v_R$ , 轴向速度分量  $v_z$  以及压力梯度的关系为:

$$v_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} (D^2 \psi), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (D^2 \psi) \quad (2.3)$$

其中  $D^2$  是广义轴对称Stokes算子,它在柱坐标系统中的表达式为:

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

对(2.1)式取旋度并利用(2.2)式得到流函数满足以下的四阶线性偏微分方程

$$D^2(D^2 \psi) = 0 \quad (2.5)$$

在圆管表面  $R=1$  上,无滑移条件及流函数取常数值要求

$$v_z = 0, \quad \psi = \frac{1}{2} \quad (2.6)$$

在初始截面  $z=0$  上,速度是指定的,即

$$v_z = f(R), \quad v_R = g(R) \quad (2.7)$$

其中  $f(R)$ ,  $g(R)$  是给定的已知函数,当  $z \rightarrow \infty$  时,流动趋于泊肃叶流,于是

$$\psi = R^2 - \frac{1}{2} R^4$$

将  $\psi$  写成  $\psi_1$  和  $\psi_2$  之和

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (2.8)$$

$\psi_1, \psi_2$ 都是由柱坐标系中分离变数解组成的, 它们的表达式为:

$$\begin{aligned} \psi_1 = & R^2 - \frac{1}{2}R^4 + \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n}(1+k_n z)e^{-k_n z} k_n R J_1(k_n R) \\ & + \int_0^{\infty} [A_1(t) R I_1(Rt) + B_1(t) R^2 I_0(Rt)] \cos(zt) dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = & \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} q_n z \exp(-q_n z) q_n R J_1(q_n R) \\ & + \int_0^{\infty} [A_2(t) R I_1(Rt) + B_2(t) R^2 I_0(Rt)] \sin(zt) dt \end{aligned} \quad (2.10)$$

式中  $R^2 - \frac{1}{2}R^4$  代表泊肃叶流动,  $I_n$  是  $n$  阶第一类变型 Bessel 函数.  $E_{1n}, E_{2n}, A_1, B_1, A_2, B_2$  分别为级数中的待定系数.  $k_n, q_n$  是常数, 它的数学意义可以从下面讨论中看出. 根据(2.2)式, 与  $\psi_1, \psi_2$  对应的速度分量分别为:

$$\begin{aligned} v_{z_1} = & 2(1-R^2) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n}(1+k_n z)e^{-k_n z} k_n^2 J_0(k_n R) \\ & + \int_0^{\infty} \{A_1(t)tI_0(Rt) + B_1(t)[RtI_1(Rt) + 2I_0(Rt)]\} \cos(zt) dt \\ v_{R_1} = & \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} k_n^3 z e^{-k_n z} J_1(k_n R) \\ & + \int_0^{\infty} [A_1(t)I_1(Rt) + B_1(t)RI_0(Rt)]t \sin(zt) dt \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} v_{z_2} = & \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} q_n^3 z \exp(-q_n z) J_0(q_n R) \\ & + \int_0^{\infty} \{A_2(t)tI_0(Rt) + B_2(t)[RtI_1(Rt) + 2I_0(Rt)]\} \sin(zt) dt \\ v_{R_2} = & \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} q_n^2 (q_n z - 1) \exp(-q_n z) J_1(q_n R) \\ & - \int_0^{\infty} [A_2(t)I_1(Rt) + B_2(t)RI_0(Rt)]t \cos(zt) dt \end{aligned} \quad (2.12)$$

由(2.11), (2.12)不难看出,  $\psi_1, \psi_2$  分别代表  $v_{z_1} \neq 0, v_{R_1} = 0$  以及  $v_{R_2} \neq 0, v_{z_2} = 0$  的情形. 令  $\psi_1$  满足  $R=1: v_{z_1} = 0, \psi_2$  满足  $R=1: \psi_2 = 0$  得:

$$B_1(t) = -\frac{tI_0(t)}{tI_1(t) + 2I_0(t)} A_1(t), \quad J_0(k_n) = 0 \quad (2.13)$$

及

$$B_2(t) = -\frac{I_1(t)}{I_0(t)} A_2(t), \quad J_1(q_n) = 0 \quad (2.14)$$

由此可见,  $k_n, q_n$  分别为零阶和一阶 Bessel 函数的零点. 将(2.13), (2.14)代入(2.9)~

(2.12) 并考虑到(2.8)及(2.3)式得:

$$\begin{aligned} \psi = & R^2 - \frac{1}{2} R^4 + \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} (1+k_n z) e^{-k_n z} k_n R J_1(k_n R) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} q_n z \exp(-q_n z) q_n R J_1(q_n R) \\ & + \int_0^{\infty} A_1(t) \left[ R J_1(Rt) - \frac{R^2 t I_0(t)}{t I_1(t) + 2 I_0(t)} I_0(Rt) \right] \cos(zt) dt \\ & + \int_0^{\infty} A_2(t) \left[ R J_1(Rt) - \frac{I_1(t)}{I_0(t)} R^2 I_0(Rt) \right] \sin(zt) dt \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} v_z = & 2(1-R^2) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} (1+k_n z) e^{-k_n z} k_n^2 J_0(k_n R) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} q_n^2 z \exp(-q_n z) J_0(q_n R) \\ & + \int_0^{\infty} A_1(t) \left[ t I_0(Rt) - \frac{R t I_1(Rt) + 2 I_0(Rt)}{t I_1(t) + 2 I_0(t)} t I_0(t) \right] \cos(zt) dt \\ & + \int_0^{\infty} A_2(t) \left\{ t I_0(Rt) - \frac{I_1(t)}{I_0(t)} [R t I_1(Rt) + 2 I_0(Rt)] \right\} \sin(zt) dt \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} v_R = & \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} k_n^2 z e^{-k_n z} J_1(k_n R) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} q_n^2 (q_n z - 1) \exp(-q_n z) J_1(q_n R) \\ & + \int_0^{\infty} A_1(t) \left[ I_1(Rt) - \frac{t I_0(t)}{t I_1(t) + 2 I_0(t)} R I_0(Rt) \right] t \sin(zt) dt \\ & - \int_0^{\infty} A_2(t) \left[ I_1(Rt) - \frac{I_1(t)}{I_0(t)} R I_0(Rt) \right] t \cos(zt) dt \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} p = & p_0 - 8z + \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} e^{-k_n z} 2k_n^3 J_0(k_n R) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} \exp(-q_n z) 2q_n^3 J_0(q_n R) \\ & + \int_0^{\infty} \left[ -\frac{t I_0(t)}{t I_1(t) + 2 I_0(t)} A_1(t) \sin(zt) + \frac{I_1(t)}{I_0(t)} A_2(t) \cos(zt) \right] 2t I_0(Rt) dt \end{aligned} \quad (2.18)$$

其中  $p_0$  是参考压力值,  $E_{1n}$ ,  $E_{2n}$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  仍然待定.

令(2.15), (2.16)满足边界条件(2.6), 我们有:

$$\int_0^{\infty} A_1(t) / g^{(1)}(t) \cos(zt) dt = - \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} (1+k_n z) e^{-k_n z} k_n J_1(k_n)$$

$$\int_0^{\infty} A_2(t) / g^{(2)}(t) \sin(zt) dt = - \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} q_n^2 z \exp(-q_n z) J_0(q_n)$$

这里

$$g^{(1)}(t) = -\frac{t I_1(t) + 2 I_0(t)}{H(t)}, \quad g^{(2)}(t) = \frac{I_0(t)}{H(t)}$$

$$H(t) = t [I_0^2(t) - I_1^2(t)] - 2 I_0(t) I_1(t)$$

将上述富氏变换反演之得

$$\left. \begin{aligned} A_1(t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} g^{(1)}(t) F_1(t) \\ A_2(t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} g^{(2)}(t) F_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F_1(t) &= \frac{4}{\pi} \frac{k_n^4 J_1(k_n)}{(k_n^2 + t^2)^2} \\ F_2(t) &= \frac{4}{\pi} \frac{q_n^4 t J_0(q_n)}{(q_n^2 + t^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

将  $A_1(t)$ 、 $A_2(t)$  的表达式 (2.19) 代入 (2.15) ~ (2.18) 中去, 经过一系列运算和整理后得:

$$\left. \begin{aligned} v_z(R, z) &= 2(1-R^2) + \sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(1)}(R, z) + E_{2n} W_{2n}^{(1)}(R, z)] \\ v_R(R, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(2)}(R, z) + E_{2n} W_{2n}^{(2)}(R, z)] \\ \psi(R, z) &= R^2 - \frac{1}{2} R^4 + \sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(3)}(R, z) + E_{2n} W_{2n}^{(3)}(R, z)] \\ p(R, z) &= p_c - 8z + \sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(4)}(R, z) + E_{2n} W_{2n}^{(4)}(R, z)] \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} W_{1n}^{(1)}(R, z) &= (1+k_n z) e^{-k_n z} k_n^2 J_0(k_n R) + \int_0^{\infty} h_1^{(1)}(R, t) F_1(t) \cos(zt) dt \\ W_{2n}^{(1)}(R, z) &= q_n z \exp(-q_n z) q_n^2 J_0(q_n R) + \int_0^{\infty} h_2^{(1)}(R, t) F_2(t) \sin(zt) dt \\ W_{1n}^{(2)}(R, z) &= k_n^3 z e^{-k_n z} J_1(k_n R) + \int_0^{\infty} h_1^{(2)}(R, t) F_1(t) \sin(zt) dt \\ W_{2n}^{(2)}(R, z) &= q_n^2 (q_n z - 1) \exp(-q_n z) J_1(q_n R) - \int_0^{\infty} h_2^{(2)}(R, t) F_2(t) \cos(zt) dt \\ W_{1n}^{(3)}(R, z) &= (1+k_n z) e^{-k_n z} k_n R J_1(k_n R) + \int_0^{\infty} h_1^{(3)}(R, t) F_1(t) \cos(zt) dt \\ W_{2n}^{(3)}(R, z) &= q_n z \exp(-q_n z) q_n R J_1(q_n R) + \int_0^{\infty} h_2^{(3)}(R, t) F_2(t) \sin(zt) dt \\ W_{1n}^{(4)}(R, z) &= 2k_n^3 e^{-k_n z} J_0(k_n R) + \int_0^{\infty} h_1^{(4)}(R, t) F_1(t) \sin(zt) dt \\ W_{2n}^{(4)}(R, z) &= 2q_n^3 \exp(-q_n z) J_0(q_n R) - \int_0^{\infty} h_2^{(4)}(R, t) F_2(t) \cos(zt) dt \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

这里

$$\left. \begin{aligned}
 h_1^{(1)}(R, t) &= \frac{t^2 I_1(t)}{H(t)} I_0(Rt) - \frac{t^2 I_0(t)}{H(t)} R I_1(Rt) \\
 h_1^{(2)}(R, t) &= -\frac{t^2 I_0(t)}{H(t)} R I_0(Rt) + \frac{t[2I_0(t) + t I_1(t)]}{H(t)} I_1(Rt) \\
 h_1^{(3)}(R, t) &= \frac{R}{t} h_1^{(2)}(R, t), \quad h_1^{(4)}(R, t) = -\frac{2t^2 I_0(t)}{H(t)} I_0(Rt) \\
 h_2^{(1)}(R, t) &= \frac{2I_1(t) - t I_0(t)}{H(t)} I_0(Rt) + \frac{t I_1(t)}{H(t)} R I_1(Rt) \\
 h_2^{(2)}(R, t) &= \frac{t I_1(t)}{H(t)} R I_0(Rt) - \frac{t I_0(t)}{H(t)} I_1(Rt) \\
 h_2^{(3)}(R, t) &= \frac{R}{t} h_2^{(2)}(R, t), \quad h_2^{(4)}(R, t) = \frac{2t I_1(t)}{H(t)} I_0(Rt)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

(2.22)中各个积分无法解析地积出, 必须进行数值计算.

令解满足边界条件 (2.7) 得:

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(1)}(R, 0) + E_{2n} W_{2n}^{(1)}(R, 0)] &= f(R) - 2(1 - R^2) \\
 \sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(2)}(R, 0) + E_{2n} W_{2n}^{(2)}(R, 0)] &= g(R)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

式中  $(R, 0)$  是初始截面上各点的坐标. 我们无法用反演的方法定出 (2.24) 式中的系数  $E_{1n}$ ,  $E_{2n}$ , 因此不得不采用近似的配置法. 将 (2.21) 式中的无穷级数在  $n$  项处截断, 用有限项近似地代替无限项. 在初始截面上选取  $n$  个离散点, 在这些点上满足 (2.24) 式, 于是得到  $2n$  个线性代数方程组用来确定  $2n$  个未知系数  $E_{1n}$ ,  $E_{2n}$ . 用任何一种标准方法解出线性代数方程组后, 我们便找到了速度分布, 压力分布, 流函数 (2.21) 的  $n$  项级数的近似解. 显然, 如果解是收敛的, 则  $n$  越大, 近似解越接近于精确解.

在均匀入口流的情形下,  $f(R) = 1$ ,  $g(R) = 0$ . (2.24) 式变为

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} W_{1n}^{(1)}(R, 0) = 1 - 2(1 - R^2) \quad (2.25)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} W_{2n}^{(2)}(R, 0) = 0 \quad (2.26)$$

由 (2.26) 式立即推出  $E_{2n} = 0$ . 于是只须解 (2.25) 式以确定  $E_{1n}$ .

### 三、数值计算结果

第一种情形计算进口截面处具有均匀轴向速度和零径向速度的入口流. 如上所述, 利用 (2.26) 容易使零径向速度条件得到满足. (2.25) 中级数的收敛性通过比较  $n=10$  和  $n=20$  二组结果加以检验. 入口截面处沿半径方向的  $n$  个配置点是等距离分布的, 富氏积分采用 Sam-

pson公式或Laugerre求积公式<sup>[8]</sup>求值。表1和表2列出了 $n=10$ 和 $n=20$ 时速度分量, 压力分布和流函数的结果。注意, 表中的压力是 $p'=p+8z$ 而不是 $p$ 。因此当流动趋于下游的泊肃叶剖面时,  $p'$ 趋于一常数。表1和表2的结果表明配置的收敛性是相当好的, 除了尖角( $R=1, z=0$ )附近的一些点外,  $n=10$ 的结果已和 $n=20$ 的结果十分接近。

定义速度剖面和泊肃叶剖面相差为平均速度1%的地方到入口处的距离 $L$ 为入口段长度, 则根据表2,  $L=1.2a$ , 此结果和Lew及Fung的结果相近。根据他们对实质上是有限长圆管的计算,  $L$ 约为 $1.3a$ 。为了比较, 在表2a, 表2b中同时列出了Lew及Fung在 $z=1.2$ 处及 $z=2.9$ 处速度分布的结果。可以看出, 在 $z=1.2$ 处, 本文的最大速度和Lew及Fung的相差7%左右。这种差别即使在 $z=2.9$ 处仍然维持。其原因是在Lew及Fung的计算中流量不准。如果在每个横截面上根据Lew及Fung的结果计算流量, 并将轴向速度除以以此流量换算得到的平均速度, 则文[1]的结果在 $z=1.3$ 处约和泊肃叶剖面相差1%。流量的不准主要是因为入口轴速度由 $r=0.9$ 处的 $u=1$ 以一种不确定的方式变到 $r=1$ 处的 $u=0$ 。在本文的计算中, 流量和入口处的均匀速度剖面与实际更接近, 因而速度分量的绝对值更精确地代表了这种理想情形。图2画出了 $z=0$ 到 $z=1.2$ 不同截面处的速度分布。

对大多数实际问题而言, 入口条件不会取均匀速度剖面。例如考虑从半无穷平面上圆形孔口开始的圆管, 其速度剖面类似于无界平面上圆形孔口处的精确解<sup>[9]</sup>。为了研究入口处非均匀速度剖面对入口段长度的影响, 我们考虑第二种情形: 入口处轴向速度分量取薄平面上圆形孔口处的准确解(图3)。计算出来的速度分量, 压力和流函数列在表3中。可以看出, 此时速度剖面非常快地趋向于泊肃叶流。入口段长度约为 $0.5a$ , 只有均匀入口流情形的40%左右。入口段长度的显著变短可能是入口处和边界相连的圆管内Stokes流的共有的特性(包括从大管分叉为小管这种情形)。这个结论是和[2]中有限长孔道的结果相一致的。

总结起来说, 对于均匀入口流情形, 本文得到的入口段长度 $L=1.2$ 和文[1]中的值相符。其次, 对于更为现实的非均匀的入口速度剖面, 入口段长度可以小到 $0.5a$ 。

表 1a 轴向速度分量  $v_z (n=10)$ 

$R$	$z=0.0$	$z=0.1$	$z=0.2$	$z=0.3$	$z=0.4$	$z=0.5$	$z=0.6$	$z=0.7$	$z=0.8$	$z=0.9$	$z=1.0$	$z=1.1$	$z=1.2$
0.00	1.0000	1.0457	1.1594	1.3061	1.4577	1.5956	1.7104	1.7998	1.8659	1.9127	1.9447	1.9659	1.9795
0.10	1.0000	1.0465	1.1599	1.3058	1.4556	1.5909	1.7026	1.7890	1.8525	1.8973	1.9277	1.9479	1.9608
0.20	1.0000	1.0465	1.1610	1.3048	1.4489	1.5757	1.6781	1.7556	1.8115	1.8503	1.8764	1.8934	1.9043
0.30	1.0000	1.0490	1.1636	1.3025	1.4357	1.5475	1.6338	1.6986	1.7404	1.7699	1.7892	1.8016	1.8053
0.40	1.0000	1.0506	1.1669	1.2974	1.4123	1.5010	1.5642	1.6069	1.6349	1.6528	1.6639	1.6709	1.6749
0.50	1.0000	1.0569	1.1716	1.2855	1.3712	1.4269	1.4603	1.4792	1.4895	1.4950	1.4978	1.4992	1.4999
0.60	1.0000	1.0622	1.1746	1.2570	1.2976	1.3104	1.3096	1.3040	1.2978	1.2924	1.2893	1.2854	1.2834
0.70	1.0000	1.0804	1.1675	1.1876	1.1644	1.1293	1.0970	1.0719	1.0539	1.0415	1.0333	1.0281	1.0247
0.80	1.0000	1.0885	1.1408	1.0190	0.9277	0.8574	0.8084	0.7758	0.7546	0.7410	0.7325	0.7272	0.7241
0.90	1.0000	1.0612	0.8246	0.6462	0.5400	0.4768	0.4386	0.4153	0.4009	0.3920	0.3863	0.3832	0.3792

表 1b 径向速度分量  $v_R (n=10)$ 

$R$	$z=0.0$	$z=0.1$	$z=0.2$	$z=0.3$	$z=0.4$	$z=0.5$	$z=0.6$	$z=0.7$	$z=0.8$	$z=0.9$	$z=1.0$	$z=1.1$	$z=1.2$
0.00	0.0000	0.0000	0.0690	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	0.0000	-0.0430	-0.0677	-0.0762	-0.0730	-0.0629	-0.0502	-0.0379	-0.0273	-0.0189	-0.0127	-0.0083	-0.0052
0.20	0.0000	-0.0660	-0.1351	-0.1505	-0.1423	-0.1212	-0.0958	-0.0716	-0.0511	-0.0352	-0.0235	-0.0152	-0.0096
0.30	0.0000	-0.1320	-0.2018	-0.2203	-0.2039	-0.1702	-0.1320	-0.0971	-0.0634	-0.0465	-0.0307	-0.0198	-0.0124
0.40	0.0000	-0.1770	-0.2665	-0.2817	-0.2522	-0.2040	-0.1541	-0.1107	-0.0766	-0.0513	-0.0335	-0.0213	-0.0132
0.50	0.0000	-0.2304	-0.3272	-0.3283	-0.2796	-0.2165	-0.1577	-0.1101	-0.0744	-0.0489	-0.0314	-0.0197	-0.0121
0.60	0.0000	-0.2816	-0.3767	-0.3468	-0.2764	-0.2019	-0.1405	-0.0947	-0.0623	-0.0401	-0.0253	-0.0156	-0.0094
0.70	0.0000	-0.3502	-0.3994	-0.3246	-0.2325	-0.1578	-0.1042	-0.0675	-0.0431	-0.0271	-0.0167	-0.0102	-0.0060
0.80	0.0000	-0.3945	-0.3531	-0.2341	-0.1471	-0.0918	-0.0574	-0.0358	-0.0222	-0.0136	-0.0082	-0.0049	-0.0029
0.90	0.0000	-0.3749	-0.1774	-0.0880	-0.0480	-0.0277	-0.0165	-0.0099	-0.0059	-0.0039	-0.0030	-0.0029	-0.0022

表 1c 流函数数 ( $n=10$ )

R	z=0.0	z=0.1	z=0.2	z=0.3	z=0.4	z=0.5	z=0.6	z=0.7	z=0.8	z=0.9	z=1.0	z=1.1	z=1.2
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	0.0050	0.0052	0.0058	0.0065	0.0073	0.0080	0.0085	0.0090	0.0093	0.0095	0.0097	0.0098	0.0099
0.20	0.0200	0.0209	0.0232	0.0261	0.0291	0.0317	0.0339	0.0355	0.0368	0.0376	0.0382	0.0386	0.0388
0.30	0.0449	0.0471	0.0523	0.0587	0.0651	0.0708	0.0753	0.0777	0.0812	0.0829	0.0840	0.0848	0.0853
0.40	0.0801	0.0839	0.0930	0.1042	0.1150	0.1241	0.1313	0.1366	0.1403	0.1428	0.1445	0.1456	0.1462
0.50	0.1248	0.1312	0.1457	0.1624	0.1777	0.1901	0.1994	0.2060	0.2106	0.2137	0.2156	0.2169	0.2177
0.60	0.1804	0.1896	0.2102	0.2324	0.2512	0.2655	0.2757	0.2827	0.2873	0.2904	0.2923	0.2935	0.2942
0.70	0.2442	0.2590	0.2864	0.3121	0.3315	0.3451	0.3541	0.3600	0.3639	0.3663	0.3678	0.3687	0.3693
0.80	0.3217	0.3406	0.3722	0.3956	0.4106	0.4200	0.4258	0.4295	0.4318	0.4332	0.4340	0.4345	0.4348
0.90	0.4007	0.4326	0.4566	0.4679	0.4738	0.4771	0.4791	0.4802	0.4809	0.4814	0.4816	0.4818	0.4818

表 1d 压力分布 ( $n=10$ )

R	z=0.0	z=0.1	z=0.2	z=0.3	z=0.4	z=0.5	z=0.6	z=0.7	z=0.8	z=0.9	z=1.0	z=1.1	z=1.2
0.00	-18.45	-16.84	-15.52	-14.54	-13.84	-13.37	-13.08	-12.90	-12.79	-12.74	-12.71	-12.70	-12.70
0.10	-18.47	-16.74	-15.44	-14.47	-13.79	-13.33	-13.05	-12.88	-12.78	-12.73	-12.71	-12.70	-12.70
0.20	-18.10	-16.48	-15.19	-14.25	-13.61	-13.21	-12.96	-12.82	-12.75	-12.71	-12.70	-12.69	-12.70
0.30	-17.78	-16.00	-14.74	-13.88	-13.33	-13.01	-12.83	-12.74	-12.70	-12.68	-12.68	-12.69	-12.69
0.40	-16.92	-15.28	-14.08	-13.34	-12.94	-12.74	-12.66	-12.64	-12.64	-12.65	-12.67	-12.68	-12.69
0.50	-16.16	-14.20	-13.13	-12.62	-12.45	-12.44	-12.48	-12.54	-12.59	-12.63	-12.66	-12.68	-12.69
0.60	-14.29	-12.66	-11.85	-11.75	-11.92	-12.14	-12.33	-12.47	-12.56	-12.62	-12.66	-12.68	-12.70
0.70	-12.68	-10.16	-10.13	-10.79	-11.45	-11.93	-12.25	-12.45	-12.57	-12.63	-12.67	-12.70	-12.71
0.80	-6.70	-6.22	-8.10	-10.03	-11.23	-11.92	-12.29	-12.50	-12.61	-12.67	-12.70	-12.72	-12.72
0.90	0.74	0.86	-6.89	-10.12	-11.52	-12.17	-12.48	-12.63	-12.70	-12.73	-12.73	-12.71	-12.71

\* Lew及Fung的结果

表 2a 轴向速度分量  $v_z (n=20)$

R	z=0.0	z=0.1	z=0.2	z=0.3	z=0.4	z=0.5	z=0.6	z=0.7	z=0.8	z=0.9	z=1.0	z=1.1	z=1.2	z=1.2*	z=2.9*
0.00	1.0000	1.0458	1.1593	1.3059	1.4576	1.5955	1.7103	1.7997	1.8658	1.9126	1.9446	1.9658	1.9795	1.8336	1.8527
0.10	1.0000	1.0460	1.1597	1.3056	1.4555	1.5907	1.7025	1.7689	1.8524	1.8972	1.9277	1.9478	1.9608	1.8162	1.8342
0.20	1.0000	1.0469	1.1610	1.3047	1.4487	1.5756	1.6780	1.7555	1.8115	1.8503	1.8761	1.8934	1.9042	1.7636	1.7785
0.30	1.0000	1.0485	1.1634	1.3024	1.4366	1.5474	1.6337	1.6965	1.7403	1.7698	1.7892	1.8015	1.8093	1.6704	1.6857
0.40	1.0000	1.0513	1.1670	1.2973	1.4122	1.5009	1.5641	1.6063	1.6349	1.6527	1.6639	1.6707	1.6749	1.5506	1.5558
0.50	1.0000	1.0559	1.1715	1.2855	1.3712	1.4269	1.4602	1.4791	1.4895	1.4950	1.4978	1.4992	1.4999	1.3884	1.3889
0.60	1.0000	1.0639	1.1751	1.2573	1.2977	1.3104	1.3096	1.3040	1.2978	1.2924	1.2883	1.2854	1.2834	1.1889	1.1849
0.70	1.0000	1.0779	1.1630	1.1880	1.1645	1.1293	1.0971	1.0720	1.0539	1.0416	1.0334	1.0281	1.0247	0.9483	0.9439
0.80	1.0000	1.0988	1.1067	1.0194	0.9277	0.8574	0.8085	0.7758	0.7546	0.7410	0.7325	0.7273	0.7240	0.6701	0.6659
0.90	1.0000	1.0554	0.8227	0.6456	0.5399	0.4769	0.4386	0.4155	0.4006	0.3914	0.3862	0.3815	0.3728	0.3538	0.3514

表 2b

径向速度分量  $v_R (n=20)$

\* Lew及Fung的结果

R	z=0.0	z=0.1	z=0.2	z=0.3	z=0.4	z=0.5	z=0.6	z=0.7	z=0.8	z=0.9	z=1.0	z=1.1	z=1.2	z=1.2*
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	0.0000	-0.0429	-0.0677	-0.0762	-0.0739	-0.6629	-0.0502	-0.0379	-0.0273	-0.0189	-0.0127	-0.0083	-0.0052	-0.0045
0.20	0.0000	-0.0864	-0.1351	-0.1505	-0.1423	-0.1213	-0.0939	-0.0716	-0.0511	-0.0352	-0.0235	-0.0152	-0.0096	-0.0082
0.30	0.0000	-0.1311	-0.2017	-0.2202	-0.2039	-0.1702	-0.1321	-0.0971	-0.0684	-0.0466	-0.0308	-0.0198	-0.0124	-0.0106
0.40	0.0000	-0.1781	-0.2665	-0.2817	-0.2522	-0.2040	-0.1541	-0.1108	-0.0766	-0.0514	-0.0335	-0.0213	-0.0132	-0.0114
0.50	0.0000	-0.2285	-0.3270	-0.3283	-0.2796	-0.2165	-0.1578	-0.1101	-0.0744	-0.0490	-0.0314	-0.0197	-0.0121	-0.0104
0.60	0.0000	-0.2842	-0.3768	-0.3457	-0.2763	-0.2019	-0.1365	-0.0946	-0.0623	-0.0401	-0.0253	-0.0156	-0.0091	-0.0081
0.70	0.0000	-0.3462	-0.3992	-0.3262	-0.2322	-0.1577	-0.1042	-0.0675	-0.0431	-0.0271	-0.0163	-0.0102	-0.0061	-0.0052
0.80	0.0000	-0.4041	-0.3521	-0.2522	-0.1467	-0.0910	-0.0574	-0.0353	-0.0222	-0.0156	-0.0082	-0.0049	-0.0030	-0.0025
0.90	0.0660	-0.3501	-0.1726	-0.0870	-0.0473	-0.0277	-0.0166	-0.0083	-0.0057	-0.0044	-0.0049	-0.0066	-0.0071	-0.0057

流函数 ( $n=20$ )

$R$	$z=0.0$	$z=0.1$	$z=0.2$	$z=0.3$	$z=0.4$	$z=0.5$	$z=0.6$	$z=0.7$	$z=0.8$	$z=0.9$	$z=1.0$	$z=1.1$	$z=1.2$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0030	0.0509	0.6000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0009	0.0000	0.0000
0.10	0.0050	0.0052	0.0058	0.0065	0.0073	0.0080	0.0085	0.0090	0.0093	0.0095	0.0097	0.0093	0.0099
0.20	0.0200	0.0209	0.0232	0.0261	0.0291	0.0317	0.0339	0.0356	0.0368	0.0376	0.0382	0.0386	0.0393
0.30	0.0450	0.0471	0.0523	0.0567	0.0651	0.0708	0.0753	0.0787	0.0812	0.0829	0.0840	0.0848	0.0853
0.40	0.0800	0.0839	0.0930	0.1042	0.1150	0.1241	0.1313	0.1366	0.1403	0.1428	0.1445	0.1456	0.1462
0.50	0.1250	0.1313	0.1457	0.1623	0.1777	0.1901	0.1994	0.2061	0.2106	0.2137	0.2156	0.2169	0.2177
0.60	0.1801	0.1886	0.2102	0.2324	0.2512	0.2655	0.2757	0.2827	0.2873	0.2904	0.2923	0.2935	0.2942
0.70	0.2451	0.2591	0.2865	0.3121	0.3315	0.3451	0.3541	0.3600	0.3638	0.3663	0.3678	0.3687	0.3693
0.80	0.3203	0.3408	0.3724	0.3957	0.4106	0.4200	0.4258	0.4295	0.4318	0.4332	0.4340	0.4345	0.4348
0.90	0.4059	0.4338	0.4568	0.4680	0.4738	0.4771	0.4791	0.4802	0.4809	0.4814	0.4816	0.4817	0.4817

压力分布 ( $n=20$ )

$R$	$z=0.0$	$z=0.1$	$z=0.2$	$z=0.3$	$z=0.4$	$z=0.5$	$z=0.6$	$z=0.7$	$z=0.8$	$z=0.9$	$z=1.0$	$z=1.1$	$z=1.2$
0.00	-18.48	-16.84	-15.52	-14.54	-13.84	-13.37	-13.07	-12.89	-12.79	-12.74	-12.71	-12.70	-12.70
0.10	-18.40	-16.75	-15.44	-14.47	-13.78	-13.33	-13.04	-12.87	-12.73	-12.73	-12.71	-12.70	-12.70
0.20	-18.14	-16.48	-15.18	-14.25	-13.61	-13.21	-12.96	-12.82	-12.75	-12.71	-12.69	-12.69	-12.69
0.30	-17.68	-16.00	-14.74	-13.88	-13.33	-13.00	-12.83	-12.74	-12.70	-12.63	-12.68	-12.69	-12.69
0.40	-16.99	-15.27	-14.07	-13.34	-12.93	-12.74	-12.66	-12.64	-12.64	-12.65	-12.67	-12.63	-12.63
0.50	-15.98	-14.21	-13.14	-12.62	-12.45	-12.43	-12.48	-12.54	-12.59	-12.63	-12.66	-12.68	-12.67
0.60	-14.47	-12.64	-11.85	-11.74	-11.92	-12.14	-12.33	-12.46	-12.56	-12.62	-12.66	-12.63	-12.63
0.70	-12.07	-10.21	-10.13	-10.78	-11.45	-11.93	-12.25	-12.44	-12.56	-12.63	-12.67	-12.69	-12.70
0.80	-7.52	-6.10	-8.09	-10.03	-11.23	-11.91	-12.29	-12.50	-12.61	-12.67	-12.70	-12.71	-12.72
0.90	6.10	0.71	-6.93	-10.12	-11.52	-12.17	-12.48	-12.63	-12.70	-12.71	-12.69	-12.67	-12.66

表 3a 轴向速度分量  $v_z$  (非均匀情形)

$R$	$z=0.0$	$z=0.1$	$z=0.2$	$z=0.3$	$z=0.4$	$z=0.5$
0.00	1.790614	1.859548	1.911280	1.947578	1.971413	1.986955
0.10	1.776225	1.844400	1.895067	1.930279	1.953181	1.967110
0.20	1.733966	1.798944	1.846171	1.878099	1.898225	1.910669
0.30	1.662413	1.722331	1.763776	1.790166	1.805754	1.814316
0.40	1.561857	1.613677	1.646391	1.664909	1.674427	1.678881
0.50	1.429536	1.470614	1.491458	1.499894	1.502381	1.502559
0.60	1.265127	1.290032	1.294841	1.291710	1.287460	1.284223
0.70	1.061145	1.064595	1.049914	1.036359	1.027941	1.023374
0.80	0.815244	0.780820	0.747901	0.731490	0.724076	0.720824
0.90	0.476179	0.408739	0.388037	0.381792	0.379586	0.378859

表 3b 径向速度分量  $v_R$  (非均匀情形)

$R$	$z=0.0$	$z=0.1$	$z=0.2$	$z=0.3$	$z=0.4$	$z=0.5$
0.00	0.000000	0.000000	0.060000	0.000000	0.000000	0.000000
0.10	-0.038739	-0.029864	-0.021516	-0.014503	-0.009146	-0.005384
0.20	-0.076150	-0.058075	-0.041329	-0.027465	-0.017063	-0.009888
0.30	-0.110691	-0.082960	-0.057679	-0.037352	-0.022593	-0.012742
0.40	-0.140962	-0.102450	-0.068621	-0.042665	-0.024772	-0.013410
0.50	-0.164667	-0.114191	-0.072047	-0.042113	-0.023052	-0.011776
0.60	-0.179947	-0.114743	-0.065748	-0.035056	-0.017682	-0.008339
0.70	-0.181892	-0.099820	-0.048381	-0.022543	-0.010199	-0.004291
0.80	-0.166998	-0.062721	-0.022675	-0.008867	-0.003496	-0.001191
0.90	-0.109085	-0.012543	-0.002670	-0.000914	-0.000272	0.000014

表 3c 流函数 (非均匀情形)

$R$	$z=0.0$	$z=0.1$	$z=0.2$	$z=0.3$	$z=0.4$	$z=0.5$
0.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.10	0.008917	0.009260	0.009516	0.009695	0.009812	0.009883
0.20	0.035244	0.036585	0.037576	0.038258	0.038698	0.038962
0.30	0.077700	0.080603	0.082702	0.084114	0.085000	0.085519
0.40	0.134128	0.138989	0.142388	0.144585	0.145909	0.146654
0.50	0.201445	0.208400	0.213007	0.215811	0.217401	0.218245
0.60	0.275568	0.284353	0.289671	0.292613	0.294144	0.294894
0.70	0.351232	0.360956	0.365956	0.368328	0.369422	0.369904
0.80	0.421694	0.430375	0.433505	0.434675	0.435139	0.435314
0.90	0.477338	0.481290	0.481830	0.481975	0.482025	0.482034

表 3d 压力分布 (非均匀情形)

$R$	$z=0.0$	$z=0.1$	$z=0.2$	$z=0.3$	$z=0.4$	$z=0.5$
0.00	-4.958	-4.943	-4.935	-4.946	-4.964	-4.984
0.10	-4.984	-4.936	-4.931	-4.944	-4.964	-4.985
0.20	-4.922	-4.911	-4.918	-4.939	-4.964	-4.987
0.30	-4.892	-4.875	-4.900	-4.934	-4.966	-4.992
0.40	-4.770	-4.825	-4.880	-4.932	-4.973	-5.002
0.50	-4.708	-4.774	-4.869	-4.942	-4.990	-5.018
0.60	-4.496	-4.730	-4.884	-4.975	-5.021	-5.042
0.70	-4.464	-4.748	-4.959	-5.043	-5.069	-5.073
0.80	-4.002	-4.945	-5.143	-5.152	-5.129	-5.106
0.90	-5.383	-5.703	-5.423	-5.261	-5.178	-5.129

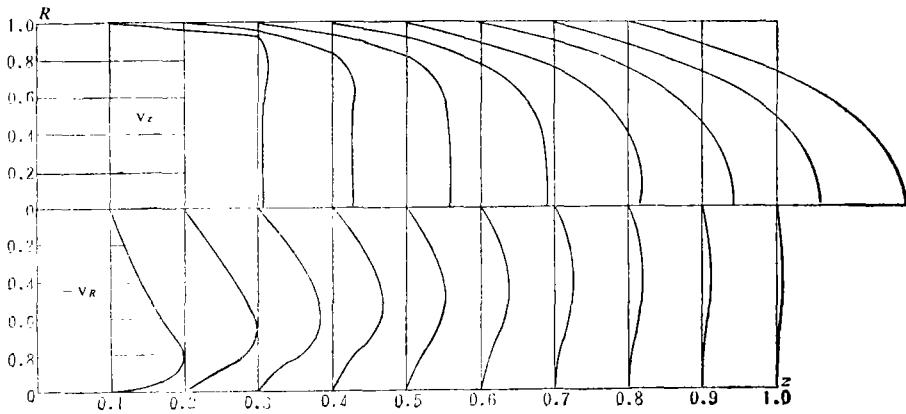


图 2 入口段的速度分布

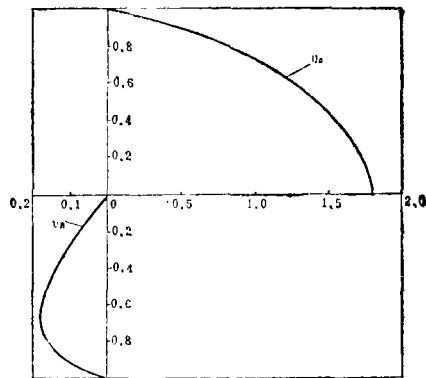


图 3 入口横截面处的给定速度分布

## 参 考 文 献

- [1] Lew, H. S and Y. C. Fung, *J. Biomechanics*, 2(1969), 105—119.
- [2] Dagan, Z., S. Weinbaum and R. Pfeffer, *J. Fluid Mech.*, 115(1982), 502—523
- [3] Goldstein, S. (ed.), *Modern Developments in Fluid Mechanics*, 1(1938), 299—311
- [4] Rosenhead, L.(ed.), *Laminar Boundary Layers*, Oxford University Press, London, (1963).
- [5] Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 4th Edition, McGraw-Hill, New York (1962), 168.
- [6] Gluckman, M. J., S. Weinbaum and R. Pfeffer, *J. Fluid Mech.*, 55 (1972), 677—709.
- [7] Stimson, M. and O.B. Jeffery, *Proc. Roy. Soc.*, A 111, 110(1926).
- [8] Rabinowitz, P and G. weiss, *MTAC*, 13(1959), 285—293.
- [9] Happel, J. and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, 2nd Edition, Noordhoff International Publishing, Leyden, (1973).

## The Creeping Motion in the Entry Region of a Semi-Infinite Circular Cylindrical Tube

Wu Wang-yi

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Richard Skalak

(Department of Civil Engineering and Engineering Mechanics, Bioengineering Institute, Columbia University, New York)

### Abstract

In 1969, Lew and Fung<sup>[1]</sup> considered the inlet flow into a semi-infinite circular cylinder at low Reynolds number. Dagan, et al.<sup>[2]</sup> in 1982 obtained a series solution for the creeping motion through a pore of finite length directly. The numerical results obtained in [1] also describe the entrance flow in tube of a finite length, because the Fourier integrals in the general solutions are replaced by Fourier series. In the present paper, the Fourier integrals are evaluated numerically and the velocity, pressure distribution and the stream function in the entry region of a semi-infinite circular cylindrical tube for a uniform entry velocity are obtained more precisely. The corresponding inlet length which is equal to (1.2) times the radius of the tube is close to the factor (1.3) suggested by Lew and Fung<sup>[1]</sup>. The collocation technique applied in the present paper is shown to converge rapidly and it should be useful in other similar problems.