

两平行圆板间径向层流进口段效应分析*

刘震北 王致清

(哈尔滨工业大学, 1983年2月20日收到)

摘 要

本文首先将 B. B. Голубев 方法^[1]推广至二平行圆板间的径向扩散流动, 由边界层运动方程式同时推导出动量积分方程式和能量积分方程式, 而后再用 Picard 逐次逼近法^[2]解能量积分方程式, 求得进口段通道长随边界层厚度而改变的二级近似显函数表达式, 从而为进口段效应诸系数的直接解析分析提供了可能。特别是当圆板外径小于进口段长度时, 更加突出地表现了本方法的优越性。

由于采用了能量积分方程式, 则压力损失系数的各项才得以从理论上独立地推导出来。本文所提供的压力损失系数计算值, 在进口修正雷诺数 $Re < 100$ 时, 和文献 [3] 比较与实验值更为接近。因此在该范围内本文的结果既可靠又简便。

一、引 言

两平行圆板间径向层流流动, 在液压技术中, 如轴向柱塞泵的滑靴与斜盘之间的流动、圆板阀和喷嘴挡板阀的流动, 均可视作这种流动。当进口段长度与圆板外径的比值不能忽略时, 即所谓径向“短通道”, 其进口段效应必须加以考虑。

自从文献 [4] 对二平行圆板间的流动仅就粘性项进行了解析解之后, 许多作者对考虑其惯性项的解做了大量研究。如文献 [5] 的级数解与文献 [6] 的实验值除入口段外吻合得很好, 文献 [7] 对于内向流做了迭代近似解和级数解。此外, 当二圆板在其平面内相对回转时, 在文献 [8] 中也进行了研究。而文献 [3] 对空气测微计的径向喷流咀就其进口段效应进行了一系列的理论和实验研究, 但是由于对动量积分方程式进行了多次变换, 致使其所得到的进口段通道长随边界层厚度而变化的关系是一个很复杂的隐函数表达式, 这对于工程实际应用来说甚感不便。

本文采用的是能量积分方程式近似处理方法, 所得结果的精度与文献 [3] 的实验值比较仍为符合。但由于近似表达式简明、直观, 因而大大地方便了工程实际的应用。本文并绘制了进口段效应诸系数沿流程和进口修正雷诺数而改变的图表, 可供设计、计算时使用。

文中引用符号的意义 (常用符号, 此处省略):

r —— 径向坐标

r_0 —— 中心圆管的半径

$r_1(r_2)$ —— 平行圆板的内 (外) 半径

r_e —— 完全发展了的流动的起始半径

ξ —— 无因次半径长 $\xi = r/r_1$

ξ_e —— 无因次进口段长度 $\xi_e = r_e/r_1$

* 钱伟长推荐。

z ——法向坐标
 h ——平行圆板的间隙值
 δ ——边界层厚度
 Δ ——无因次边界层厚度 $\Delta = 2\delta/h$
 u ——边界层内径向(r 向)速度
 v ——边界层内周向(θ 向)速度
 w ——边界层内法向(z 向)速度
 u_o ——边界层外侧势流速度
 u_m ——间隙任意断面处的平均速度
 $u_m = Q/(2\pi r h)$
 U ——边界层外侧无因次势流速度
 $U = u_o/u_m$

u_{m1} ——平行圆板进口($r=r_1$)处的平均速度
 $u_{m1} = Q/(2\pi r_1 h) = u_m \xi$
 Re ——进口处修正雷诺数
 $Re = (u_{m1} h / \nu) (h/r_1)$
 $= Qh / (2\pi r_1^2 \nu)$
 p_0, p_1, p_2, p_e 和 p —— r_0, r_1, r_2, r_e 和 r 处的压力
 λ_s ——局部压头损失系数
 λ ——全压头损失系数
 λ_p ——压力损失系数
 γ ——进口段效应压力损失修正系数
 C_e ——进口段效应流量修正系数

二、边界层积分关系式的推导

讨论问题基于下列假设：(1) 流体为不可压缩的 ($\rho = \text{常数}$)；(2) 流动是定常和常物性的；(3) 进口处光滑，且中心圆管半径比间隙大得多 ($h/r_0 \ll 1$)，此时进口处速度可认为近似均匀 ($u_{m1} = \text{常数}$)，见图1；(4) 进口段形成以间隙中心面为对称面的层流边界层，在边界层外侧是势流；(5) 在进口段終了处形成完全发展了的层流流动。

采用圆柱坐标系 (r, θ, z)。从中心开始沿壁面方向以 r 表示，壁面内法线方向表示为 z ，如图1所示。由于径向流动对称于 z 轴，因此 $v = 0$ ， $\partial/\partial\theta = 0$ 。此时，平行圆板进口段内的层流边界层运动方程式和连续性方程式有下列形式

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

边界层的基本边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } z=0 \text{ 时, } u=w=0 \\ \text{当 } z=\delta \text{ 时, } u=u_o, w=w_s, \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

将B.В.Голубев方法推广，用 $u^m dz$ 遍乘式 (2.1) 两端，并从0到 δ 积分得

$$\begin{aligned} \int_0^\delta u^{m+1} \frac{\partial u}{\partial r} dz + \int_0^\delta u^m \frac{\partial u}{\partial z} w dz \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \int_0^\delta u^m dz + \nu \int_0^\delta u^m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dz \end{aligned} \quad (2.4)$$

在上式的左端，令

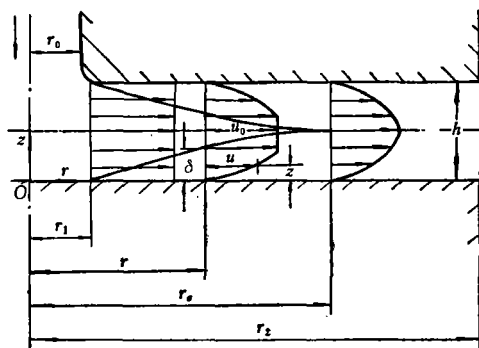


图 1

$$J_1 = \int_0^\delta u^{m+1} \frac{\partial u}{\partial r} dz$$

$$J_2 = \int_0^\delta u^m \frac{\partial u}{\partial z} w dz$$

注意积分上限 $\delta(r)$ 是 r 的函数, 利用定积分求导数的方法, 并考虑式(2.3)可得

$$J_1 = \frac{1}{m+2} \int_0^\delta \frac{\partial u^{m+2}}{\partial r} dz = \frac{1}{m+2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \int_0^\delta u^{m+2} dz - u_0^{m+2} \frac{d\delta}{dr} \right] \quad (2.5)$$

利用分部积分法, 并考虑式(2.2), 有

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{m+1} \int_0^\delta w \frac{\partial u^{m+1}}{\partial z} dz = \frac{1}{m+1} \left[u_0^{m+1} w_\delta - \int_0^\delta u^{m+1} \frac{\partial w}{\partial z} dz \right] \\ &= \frac{1}{m+1} \left[u_0^{m+1} w_\delta + \int_0^\delta \frac{u^{m+2}}{r} dz + J_1 \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

外, 用 dz 遍乘式(2.2)两端, 并从0到 δ 积分, 注意 δ 是 r 的函数, 得到

$$w_\delta = - \int_0^\delta \frac{u}{r} dz - \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\delta u dz + u_0 \frac{d\delta}{dr} \quad (2.7)$$

由式(2.5), (2.6)和(2.7)求得

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{m+1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\delta r u^{m+2} dz - \frac{u_0^{m+1}}{m+1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\delta r u dz \quad (2.8)$$

又, 在方程式(2.4)右端的第二项中, 有

$$\int_0^\delta u^m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dz = - \left[u^m \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=0} - m \int_0^\delta u^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz \quad (2.9)$$

在边界层上利用Bernoulli方程式

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -u_0 \frac{du_0}{dr} \quad (2.10)$$

将式(2.8), (2.9)和(2.10)一并代入式(2.4), 即得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m+1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\delta r u^{m+2} dz - \frac{u_0^{m+1}}{m+1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\delta r u dz \\ &= u_0 \frac{du_0}{dr} \int_0^\delta u^m dz - \nu \left[\left(u^m \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} + m \int_0^\delta u^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

在积分关系式(2.11)中, 若分别令 $m=0$ 和 $m=1$, 就导出了平行圆板进口段层流边界层动量与能量积分方程式:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\delta r u^2 dz - \frac{u_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\delta r u dz = u_0 \frac{du_0}{dr} \delta - \nu \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=0} \quad (1.12)$$

这就是文献[3]中所导出的动量积分方程式;

$$\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\delta r u^3 dz - \frac{u_0^2}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\delta r u dz = u_0 \frac{du_0}{dr} \int_0^\delta u dz - \nu \int_0^\delta \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz \quad (2.13)$$

这就是能量积分方程式:

如果引入

$$\text{排挤厚度} \quad \delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) dz$$

$$\text{动量厚度} \quad \delta_2 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) \frac{u}{u_0} dz$$

$$\text{能量厚度} \quad \delta_3 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u^2}{u_0^2}\right) \frac{u}{u_0} dz$$

$$\text{壁面摩擦应力} \quad \tau_w = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=0}$$

则动量积分方程式变为

$$\frac{d}{dr} (u_0^2 \delta_2) + \frac{u_0^2}{r} \delta_2 + u_0 \frac{du_0}{dr} \delta_1 = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (2.14)$$

而能量积分方程式变为

$$\frac{d}{dr} (u_0^3 \delta_3) + \frac{u_0^3}{r} \delta_3 = 2D_w \quad (2.15)$$

$$\text{式中} \quad D_w = \nu \int_0^\delta \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz$$

显见, 这种推导方式可同时得到两种积分方程式, 但只限于不可压缩流体情形。

下面将依据能量积分方程式, 对平行圆板层流进口段长度及进口段效应诸系数进行近似计算。

三、边界层内速度分布的假设

设边界层内速度分布是相似的, 其一般函数形式为

$$\frac{u}{u_0} = f(\eta) \quad \eta = \frac{z}{\delta} \quad (3.1)$$

下面来讨论函数 $f(\eta)$ 应满足的条件。

根据流动连续性, 有

$$4\pi r \cdot \frac{h}{2} u_m = 4\pi r \left[u_0 \left(\frac{h}{2} - \delta \right) + \int_0^\delta u dz \right]$$

把式 (3.1) 代入上式, 整理后得

$$\frac{u_m}{u_0} = 1 - A\Delta \quad (3.2)$$

式中

$$A = \int_0^1 [1 - f(\eta)] d\eta \quad (3.3)$$

因而得出无因次势流速度

$$U = \frac{u_0}{u_m} = \frac{1}{1 - A\Delta} \quad (3.4)$$

从进口处开始, 壁面上边界层厚度逐渐增长至间隙中心面时, 即 Δ 从 0 趋近于 1 时, 再发展便形成了准 Poiseuille 流。此时有 $\Delta = 1$, $U = 3/2$, 由式 (3.4) 和 (3.3) 得

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{3} \\ \int_0^1 f(\eta) d\eta &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

或

此即函数 $f(\eta)$ 所应满足的附加条件；当然，函数 $f(\eta)$ 还应满足边界层的基本边界条件式 (2.3)。换句话说，因为所选择的边界层内速度分布函数总是要自动地满足条件 (2.3) 和 (3.5)，所以式 (3.4) 可以改写为

$$U = \frac{u_o}{u_m} = \frac{u_o \xi}{u_{m1}} = \frac{3}{3 - \Delta} \quad (3.6)$$

另外，为计算上方便，引入无因次能量厚度

$$\Delta_3 = \frac{2\delta_3}{h} = \frac{2}{h} \int_0^\delta \left(1 - \frac{u^2}{u_o^2}\right) \frac{u}{u_o} dz = B\Delta \quad (3.7)$$

和

$$\frac{2D_w}{h} = \frac{2\nu}{h} \int_0^\delta \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dz = \frac{4\nu u_o^2}{h^2 \Delta} C \quad (3.8)$$

式中

$$B = \int_0^1 (1 - f^2) f d\eta \quad C = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 d\eta \quad (3.9)$$

四、层流进口段长度与进口段效应诸系数的近似计算

现在来导出平行圆板层流进口段长度及其进口段效应诸系数沿流程改变的关系式，或者说，随 Δ 而变化的表达式。

1. 层流进口段长度

首先将能量积分方程式 (2.15) 变成无因次量形式，将之遍乘 $2\xi^3/(u_{m1}^3 h)$ ，并注意到式 (3.8)，化简整理后，有

$$\frac{d}{d\xi} (U^3 \Delta_3) - \frac{2U^3 \Delta_3}{\xi} = \frac{8U^2 C \xi}{Re \Delta} \quad (4.1)$$

或者改写成

$$\frac{d}{d\Delta} (U^3 \Delta_3) \frac{d\Delta}{d\xi} = \frac{8U^2 C \xi}{Re \Delta} + \frac{2U^3 \Delta_3}{\xi}$$

经运算可得到

$$\frac{d\xi}{d\Delta} = \frac{\left(3 \frac{dU}{d\Delta} \Delta_3 + U \frac{d\Delta_3}{d\Delta}\right) Re \Delta \xi}{8C\xi^2 + 2U Re \Delta \Delta_3} \quad (4.2)$$

又，将式 (3.6) 和 (3.7) 求导后得

$$\frac{dU}{d\Delta} = \frac{3}{(3 - \Delta)^2} \quad \frac{d\Delta_3}{d\Delta} = B \quad (4.3)$$

将式 (3.6)，(3.7) 和 (4.3) 一并代入式 (4.2)，经运算整理得

$$\frac{d\xi}{d\Delta} = \frac{3B Re \Delta (2\Delta + 3) \xi}{2(3 - \Delta) [4C(3 - \Delta) \xi^2 + 3B Re \Delta^2]} \quad (4.4)$$

其初始条件为

$$\xi(0) = 1 \quad (4.5)$$

本文应用 Picard 法, 通过逐步逼近来求解一阶非线性微分方程式 (4.4). 将初始条件 $\xi(0) = 1$ 作为一级近似解代入式 (4.4), 求其二级近似解

$$\xi = 1 + \int_0^{\Delta} \frac{3BRe\Delta(2\Delta+3)}{2(3-\Delta)[4C(3-\Delta)+3BRe\Delta^2]} d\Delta \quad (4.6)$$

将上式右端第二项中的被积函数分解为部分分式, 而后积分, 即可求得

$$\xi = 1 - \frac{3}{2} \ln\left(1 - \frac{\Delta}{3}\right) + \frac{1}{4} \ln\left(1 - \frac{\Delta}{3} + \frac{BRe}{4C} \Delta^2\right) - D \quad (4.7)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{5}{4\sqrt{1-\frac{9BRe}{C}}} \ln \left[\frac{6-\Delta\left(1-\sqrt{1-\frac{9BRe}{C}}\right)}{6-\Delta\left(1+\sqrt{1-\frac{9BRe}{C}}\right)} \right] & \left(Re < \frac{C}{9B} \right) \\ D &= \frac{15BRe\Delta}{2(2C-3BRe\Delta)} & \left(Re = \frac{C}{9B} \right) \\ D &= \frac{\pi}{72\sqrt{\frac{9BRe}{C}-1}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\Delta}{6-\Delta} \sqrt{\frac{9BRe}{C}-1} \right) & \left(Re > \frac{C}{9B} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

这就是无因次进口段通道长随无因次边界层厚度变化的近似表达式.

当 $\Delta=1$ 时, 即可由上二式求得无因次进口段长度为

$$\xi_e = 1.6082 + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{2}{3} + \frac{BRe}{4C}\right) - D_e \quad (4.9)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \frac{5}{4\sqrt{1-\frac{9BRe}{C}}} \ln \left[\frac{5+\sqrt{1-\frac{9BRe}{C}}}{5-\sqrt{1-\frac{9BRe}{C}}} \right] & \left(Re < \frac{C}{9B} \right) \\ D_e &= \frac{15BRe}{2(2C-3BRe)} & \left(Re = \frac{C}{9B} \right) \\ D_e &= \frac{\pi}{72\sqrt{\frac{9BRe}{C}-1}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{1}{5} \sqrt{\frac{9BRe}{C}-1} \right) & \left(Re > \frac{C}{9B} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

设在进口段层流边界层内取以下四种均满足式 (2.3) 和 (3.5) 的速度分布, 且由式 (3.9) 算得各常数, 再将之代入式 (4.9) 和 (4.10), 即可求得对应于不同进口修正雷诺数 Re 的无因次进口段长度 ξ_e , 如表 1 所列. 为便于比较, 表中还列出了文献 [3] 的近似解. 由表 1 可见, 速度分布假设 III 和 IV 与速度分布假设 I 的 ξ_e 值极其接近, 故在图 2 所示的 $\xi_e \sim Re$ 关系曲线中, I, III 和 IV 重合在了一起.

由本文的计算结果以及与文献 [3] 的比较, 可见, 当 $Re=250$ 时, $\xi_e \approx 2$.

表 1

序号	I	II	III	IV	
$f(\eta)$	$2\eta-\eta^2$	$\frac{5}{3}\eta-\frac{2}{3}\eta^3$	$\frac{28}{15}\eta-\frac{28}{15}\eta^2+\eta^4$	$\frac{\pi}{3(4-\pi)}\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)-\frac{4(\pi-3)}{3(4-\pi)}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$	文献[3]
B	$\frac{22}{105}$	$\frac{101}{540}$	$\frac{171436}{804375}$	$\frac{195\pi^3-90\pi^2-504\pi+4536}{810(4-\pi)^3}$	近似解
C	$\frac{4}{3}$	$\frac{61}{45}$	$\frac{10552}{7875}$	$\frac{51\pi^4-352\pi^3+624\pi^2}{216(4-\pi)^2}$	
Re	ξ_0				
1	1.0239	1.0211	1.0242	1.0237	1.0632
5	1.1068	1.0953	1.1080	1.1059	1.1414
10	1.1900	1.1656	1.1919	1.1860	1.2000
15	1.2579	1.2345	1.2602	1.2561	1.2450
20	1.3151	1.2884	1.3177	1.3131	1.2828
30	1.4078	1.3766	1.4107	1.4054	1.3464
40	1.4810	1.4472	1.4842	1.4784	1.4000
50	1.5413	1.5058	1.5446	1.5386	1.4472
70	1.6368	1.5993	1.6403	1.6340	1.5292
100	1.7423	1.7034	1.7459	1.7394	1.6325
150	1.8652	1.8256	1.8689	1.8622	1.7746
200	1.9531	1.9133	1.9568	1.9501	1.8994
250	2.0213	1.9816	2.0250	2.0183	2.0000

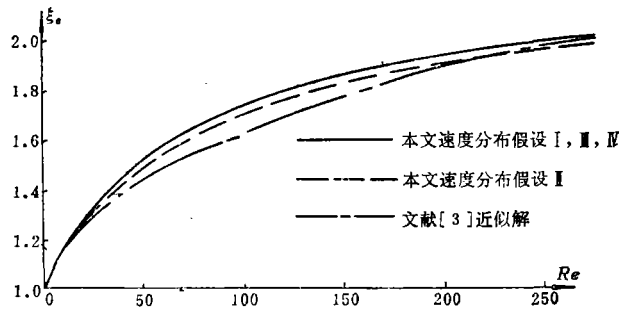


图 2

2. 压力损失系数

局部压头损失系数定义为

$$\lambda_\xi = -\frac{dp}{d\xi} / \left(\frac{1}{2} \rho u_m^2 \right) \quad (4.11)$$

利用Bernoulli方程式 $-\frac{dp}{d\xi} = \rho u_o \frac{du_o}{d\xi}$

则式(4.11)经推导整理后得

$$\lambda_\xi = \left(2U \frac{dU}{d\xi} \frac{d\Delta}{d\xi} - 2 \frac{U^2}{\xi} \right) \frac{1}{\xi^2} \quad (4.12)$$

将由式(4.4)求出的 $d\Delta/d\xi$, 式(3.6)和(4.3)一并代入式(4.12), 经化简得

$$\lambda_\xi = \frac{2[24C\xi^2(3-\Delta) - 27BRe\Delta]}{BRe\Delta\xi^3(3+2\Delta)(3-\Delta)^2} \quad (4.13)$$

沿流程全压头损失系数定义为

$$\lambda = \frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho u_{m1}^2} \frac{1}{\xi} \quad (4.14)$$

式中 p_0 ——进口处流体总压力, $p_0 = p_1 + \frac{1}{2} \rho u_{m1}^2$.

当 $\xi \leq \xi_0$ 时, 即在进口段流动区域内, 在边界层外侧势流部分, 由Bernoulli方程式得

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho u_0^2 \quad (4.15)$$

当注意到式(3.6), 则有

$$\lambda = \frac{U^2}{\xi^3} = \frac{9}{(3-\Delta)^2 \xi^3} \quad (4.16)$$

因而压力损失系数, 当 $\xi \leq \xi_0$ 时, 有

$$\lambda_r = \frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho u_{m1}^2} = \lambda \xi = \frac{9}{(3-\Delta)^2 \xi^2} \quad (4.17)$$

当 $\xi = \xi_0$ 时, $\Delta = 1$, 则有

$$\lambda_{r0} = \frac{p_0 - p_0}{\frac{1}{2} \rho u_{m1}^2} = \frac{9}{4 \xi_0^2} \quad (4.18)$$

当 $\xi \geq \xi_0$ 时, 由能量积分方程式(2.13), 再考虑到Bernoulli方程式(2.10), 则得

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial r} = & \frac{\rho}{\int_0^{h/2} u dz} \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \int_0^{h/2} (u^2 - u_0^2) u dz \right. \\ & \left. + \frac{1}{2r} \int_0^{h/2} (u^2 - u_0^2) u dz + \nu \int_0^{h/2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

由Navier—Stokes方程和连续性方程不难导出

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} (z^2 - hz) \\ u_0 &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{h^2}{4} \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

注意到流量公式

$$Q = \int_0^h u \cdot 2\pi r dz = -\frac{\pi r h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial r}$$

则有

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{6\mu Q}{\pi r h^3}$$

将之代回式(4.20), 得

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{3Q}{\pi r h^3} (hz - z^2) \\ u_0 &= \frac{3Q}{4\pi r h} \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

将式(4.21)再代回(4.19),即可解得

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{6\mu Q}{\pi r h^3} - \frac{27\rho Q^2}{70\pi^2 r^3 h^2} \quad (4.22)$$

因为 $Q=2\pi r_1 h u_{m1}$ 和 $r=r_1 \xi$,所以式(4.22)变为

$$-\frac{\partial p}{\partial \xi} = \left(\frac{24}{Re} \frac{1}{\xi} - \frac{108}{35} \frac{1}{\xi^3} \right) \frac{1}{2} \rho u_{m1}^2 \quad (4.23)$$

而压力损失

$$\Delta p = p_0 - p = (p_0 - p_e) + (p_e - p)$$

故压力损失系数

$$\lambda_p = \lambda_{p0} + \frac{\int_{\xi_0}^{\xi} \left(-\frac{\partial p}{\partial \xi} \right) d\xi}{\frac{1}{2} \rho u_{m1}^2} = \frac{24}{Re} \ln \xi + \frac{54}{35} \frac{1}{\xi^2} + \gamma_e \quad (4.24)$$

式中

$$\gamma_e = \frac{99}{140} \frac{1}{\xi_0^2} - \frac{24}{Re} \ln \xi_0 \quad (4.25)$$

式(4.24)右端第一项是由粘性摩擦引起的压力损失,第二项是考虑扩散流动而导致的压力变化,第三项 γ_e 是反映整个进口段的附加压力损失的,称为进口段效应压力损失修正系数。对于某一固定的 ξ 值,如 $\xi = \xi_2$ 时,与平面缝隙流动^[9]相比,压力损失系数 λ_p 不再是常数,而是与进口修正雷诺数 Re 相关的。

今选择在边界层理论中广为使用的抛物线速度分布假设,即

$$f(\eta) = 2\eta - \eta^2 \quad (4.26)$$

进行以下的所有讨论。

取 $\xi = \xi_2 = 6/2.03$,由式(4.24)和(4.25)求得 $\lambda_p \sim Re$ 的关系曲线示于图3,与文献[3]的数值解和实验值比较之。当 $Re < 100$ 时,本文近似解较文献[3]的数值解更接近于实验值,而当 $Re \geq 100$ 时,与实验值稍有偏离。

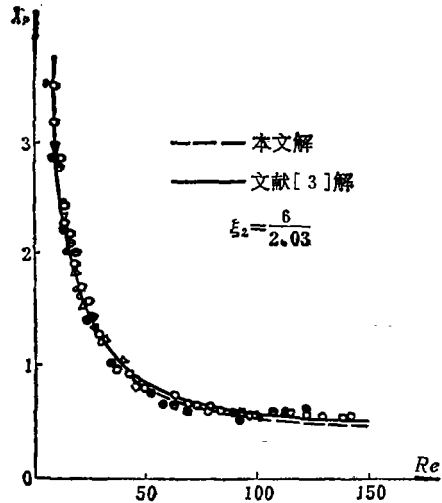


图 3

3. 进口段效应修正系数

当 $\xi \leq \xi_0$ 时,在进口段流动区域内,压力损失系数可以表示为

$$\lambda_p = \frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho u_{m1}^2} = \frac{24}{Re} \ln \xi + \frac{54}{35} \frac{1}{\xi^2} + \gamma \quad (4.27)$$

上式与式(4.17)比较,得进口段效应压力损失修正系数

$$\gamma = \left[\frac{9}{(3-D)^2} - \frac{54}{35} \right] \frac{1}{\xi^2} - \frac{24}{Re} \ln \xi \quad (4.28)$$

此式是在进口段流动区域内该系数沿流程而改变的关系式。当 $\xi \geq \xi_0$ 时,有 $D \equiv 1$ ($\xi = \xi_0$),则式(4.28)变为式(4.25),即 $\gamma = \gamma_e$ 。

下面求出进口段效应流量修正系数。由式 (4.27) 和 (4.24) 均可求得压力降为

$$p_0 - p = C_e \frac{12\mu r_1 u_{m1}}{h^2} \ln \xi \quad (4.29)$$

但是其中 C_e 的含义却各不相同。当 $\xi \leq \xi_e$ 时,

$$C_e = 1 + \frac{\xi}{\frac{24}{Re} \ln \xi} = \frac{\lambda_r}{\frac{24}{Re} \ln \xi} \quad (4.30)$$

式中 $\xi = \frac{54}{35} \frac{1}{\xi^2} + \gamma$, 而 λ_r 按式 (3.17) 确定。

而当 $\xi \geq \xi_e$ 时,

$$C_e = 1 + \frac{\xi_e}{\frac{24}{Re} \ln \xi} = \frac{\lambda_r}{\frac{24}{Re} \ln \xi} \quad (4.31)$$

式中 $\xi_e = \frac{54}{35} \frac{1}{\xi^2} + \gamma_e$, 而 λ_r 按式 (4.24) 确定。

由式 (4.29) 求得进口平均流速后, 就可求出考虑进口段效应的流量计算公式

$$Q = 2\pi r_1 h u_{m1} = \frac{\pi h^3 \Delta p}{C_e \cdot 6\mu \ln \xi} \quad (4.32)$$

C_e 即为进口段效应流量修正系数。由式 (4.30) 和 (4.31) 求得 $C_e \sim 1/Re$ 关系曲线, 如图 4 所示。显见, 当 $\xi = \xi_e = \text{常值}$ 时, 系数 C_e 仅是 Re 的函数, Re 越大, C_e 就越大。又, 当 $\xi \gg \xi_e$ 时, $C_e = 1$; 反之, C_e 对流量的影响不容忽略。

在工程实际中, 二平行圆板的外径小于进口段长度者, 并不乏实例。上述诸系数在该情况下沿流程的变化关系, 一直为人们所关注。由于式 (4.7) 和 (4.8) 提供了 $\xi \sim \Delta$ 之间的显函数关系, 从而为解决这一问题打开了通路。图 5 所示三组曲线, 自上而下分别为由式 (4.17) 确定的 $\lambda_r \sim \Delta$ 关系曲线, 由式 (4.7) 和 (4.8) 确定的 $\xi \sim \Delta$ 关系曲线, 以及由式 (4.30) 和 (4.17) 确定的 $C_e \sim \Delta$ 关系曲线。其横坐标均为 Δ , 且均以 Re 做参变数。例如,

欲求 $\xi = 1.415$, $Re = 100$ 时的 λ_r 和 C_e 值, 沿箭头所示方向很快就可找到 $\lambda_r = 0.83$, 而 $C_e = 10.2$, 同时可以得到 $\Delta = 0.675$ 。

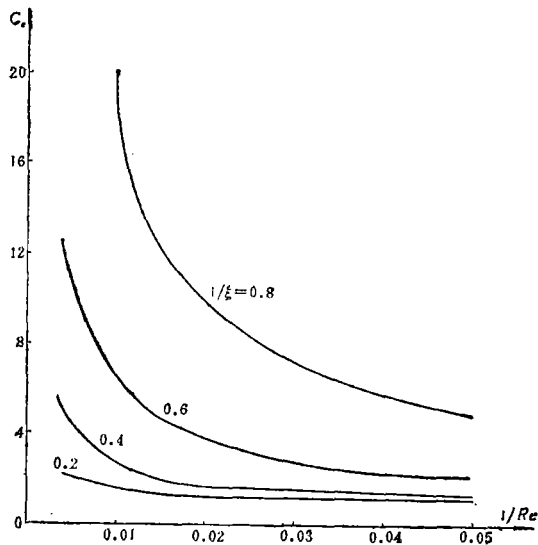


图 4

五、讨 论

(1) 速度分布。进口段中心的势流速度 u_0 由式 (3.6) 求出

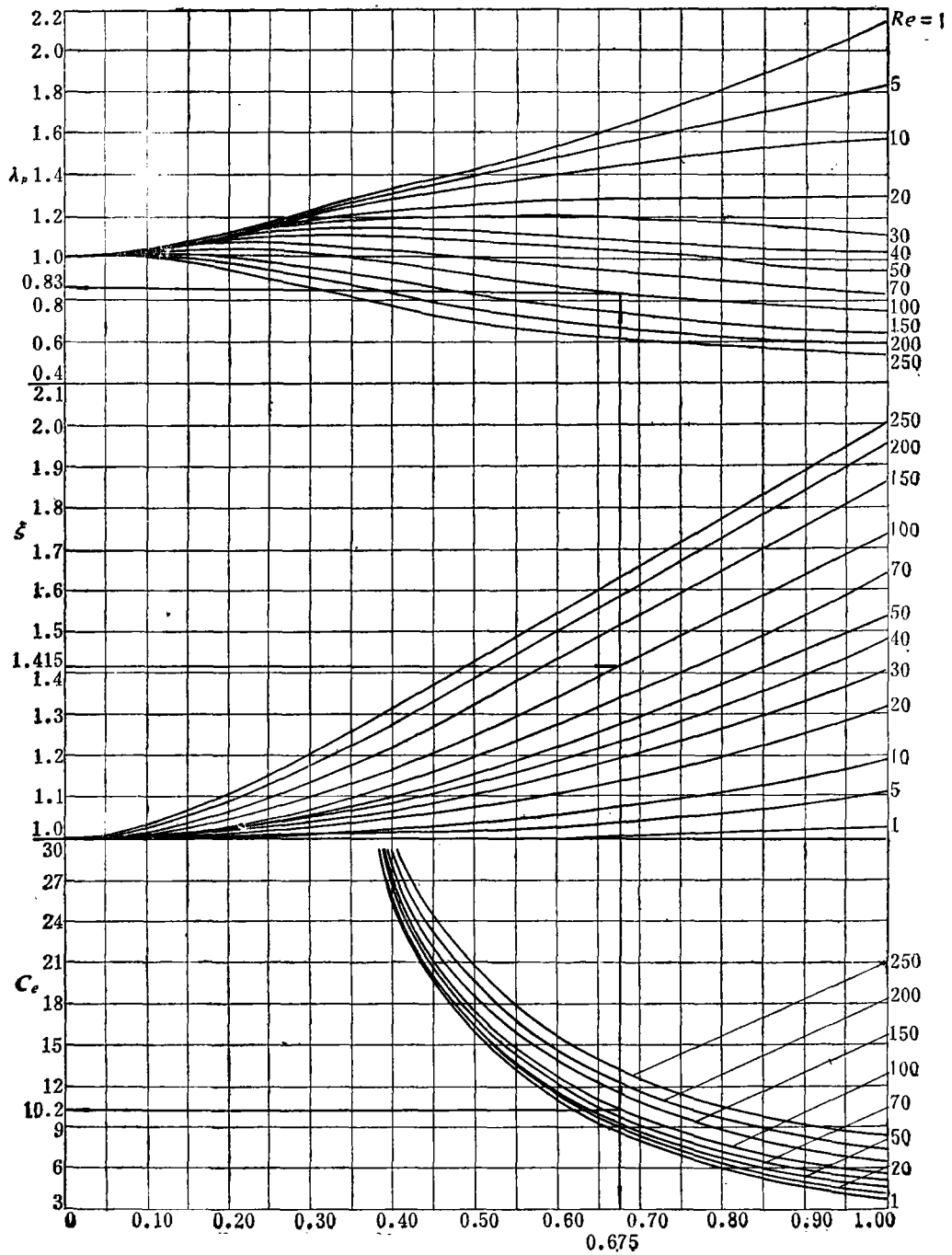


图 5

$$u_0 = u_m \frac{3}{3-\Delta} = u_{m1} \frac{3}{(3-\Delta)\xi} \quad (5.1)$$

而关于断面的速度分布，则由式(3.1)，(4.26)，(5.1)及 $\Delta = 2\delta/h$ 的假设求出

$$\frac{u}{u_{m1}} = \frac{12}{(3-\Delta)\xi} \left(1 - \frac{z}{\Delta h}\right) \frac{z}{\Delta h} \quad (5.2)$$

图6所示分别为 $Re=10, 50$ 和 100 时的速度分布。因为边界层厚度随流程而增加,则 u_0 增速;又由于断面逐渐扩大的效果而减速。 Re 小则增速显著, Re 大就很快减速。 $Re=10$ 时,在 $\xi=1.2$ 处形成抛物线状分布,其后由于速度分布是相似的假设,则 u/u_{m1} 与 $1/\xi$ 成比例地减少。 $Re=50$ 前后,速度增减的效果约相平衡,故其 u_0 在进口段内几乎不变,在 $\xi=1.5$ 处结束。

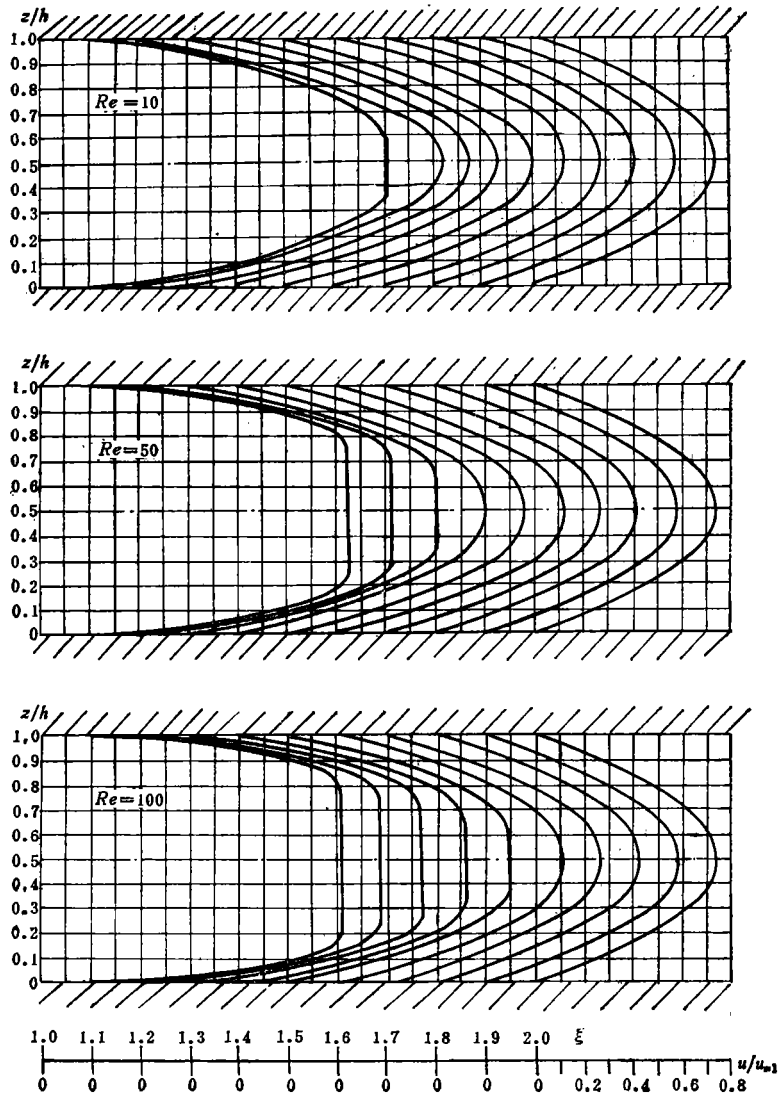


图 6

$Re=100$ 时,速度分布曲线的形状一面减速,一面接近抛物线,在 $\xi \approx 1.7$ 处完了。

(2) 其它三种速度分布假设,按照上述方法得到了类似的结果。其中按假设Ⅲ和Ⅳ计算的诸系数值,如同 $\xi \sim \Delta$ 之间的关系一样,与假设Ⅰ极其接近;而按假设Ⅱ计算的诸系数值,也如同 $\xi \sim \Delta$ 之间的关系一样,介于假设Ⅰ与文献[3]的数值之间,且偏近于假设Ⅰ,这里就不一一详述了。

(3) 压力损失系数表达式(3.24),文献[3]是按经验给出的,本文是从理论上独立地推导出来的,因而本文为文献[3]的这个公式提供了理论依据。

(4) 本文开始时推得的动量积分方程式,无因次化之后也可按 Picard 逐次逼近法求得

$\xi \sim \Delta$ 之间的显函数表达式, 笔者另文专述。

参 考 文 献

- [1] 王致清, 哈尔滨工业大学学报, 3, (1980), 26—40.
- [2] Szidarovszky, F. (匈) and S. Yakowitz (美), 《数值分析的原理及过程》, 上海科学技术文献出版社, (1982), 271—273.
- [3] 萩原辰弥(日), 机械学会论文集(第2部), 28, 196(1962), 138—156.
- [4] 川崎義人(日), 精密機械, 13, 2(1947), 13.
- [5] Savage, S. B., *J. Appl. Mech.*, 86, *Tran. of the ASME*, (1964), 594—596.
- [6] Moller, P. S., MS Thesis, Department of Mechanical Engineering, McGill University, Montreal, Canada, (1961).
- [7] 郭金基, 力学学报, 3, (1980), 306—310.
- [8] 常近时, 机械工程学报, (1982, 1), 62—68.
- [9] 王致清, 哈尔滨工业大学学报, 4, (1979), 43—55.

An Analysis on Entrance Region Effect of the Laminar Radial Flow between Two Parallel Disks

Liu Zhen-bei Wang Zhi-qing
(Harbin Institute of Technology, Harbin)

Abstract

In this paper, B. B. Golubev method^[1] is used for calculating the radial diffuse flow between two parallel disks for the first step, the momentum integral equation together with the energy integral equation is derived from the boundary layer momentum equation, then the expression of secondary approximation explicit function which is the entrance region duct length accompanied by the boundary layer thickness can be obtained by using Picard iteration^[2] in the solution of the energy integral equation. Therefore, this has made it possible to analyze directly and analytically the coefficients of entrance region effect. Especially when the outer diameter of the disk is less than the entrance region length, the advantage of this method can be prominently shown.

Because energy integral equation was employed, the terms in the pressure loss coefficient can only be independently derived theoretically. The computable value of the pressure loss coefficient presented in this paper is nearer to the testing value than ref. [3] when the entrance correction Reynolds number $Re < 100$. Therefore, the results in this paper within $Re < 100$ are both reliable and simple.