

文章编号: 1000-0887(2004)11-1189-06

周期裂纹削弱的无限长板条的应力分析^{*}

陈宜周

(1. 江苏大学 工程力学研究所, 江苏 镇江 212013)

(王银邦推荐)

摘要: 作出了周期裂纹削弱的无限长板条的应力分析。假设这些裂纹均在水平位置, 又板条承受 y 方向的拉伸力 p 。此时边值问题归结为一个复杂混合边值问题。发现, 对此问题言, 特征展开变分原理方法 (eigenfunction expansion variational method, 简称为 EEVM) 是非常有效的。研究了裂纹端的应力强度因子和 T_{\perp} 应力。从拉伸力作用下的弹性变形考虑, 开裂板条可等价于不开裂的正交异性板条。还分析了等价正交异性板条的弹性性质。最后给出了算例和数值结果。

关键词: 特征展开变分原理方法; 周期裂纹; 应力强度因子; T_{\perp} 应力

中图分类号: O346 **文献标识码:** A

引 言

诸如混凝土和岩石那样的材料常常含有许多裂纹。从而, 众多研究者研究了多裂纹问题^[1~3]。平面弹性中的双周期裂纹问题就是其中的一个特殊问题, 此问题被许多研究者研究^[4~6]。过去的研究局限于应力强度因子的计算。此外, 不同研究结果是相互矛盾的。对于开裂板条情况, 过去的研究仅局限于几条裂纹的情况^[7]。近来, 含夹杂物和微裂纹固体的刚度得到研究^[8]。此外, 含多裂纹固体的有效弹性模量也做了研究^[9]。

文中, 研究了周期裂纹削弱的板条。假设这些裂纹均在水平位置, 又板条承受 y 方向的拉伸力 p (图 1)。此时, 可从开裂板条中割出一个矩形单元。从载荷和几何形状的对称条件考虑, 此边界值问题定可归化为一个复杂混合边值问题。

此外, 研究者发现, 特征展开变分原理方法是一个求解此问题的有效方法。例如, 混合边界条件下的和不同质材料的裂纹问题均可由此法解决^[10, 11]。一般说, 在断裂力学中, 特征展开变分原理方法要比边界配置法为好。相关理由为, 此法和边界配置方案无关又具有物理意义^[10, 11]。除此之外, 若利用特征展开变分原理方法, T_{\perp} 应力也可以同时求得。这个目标是无法用通常的奇异积分方程方法得到的, 因为此法只能得到裂纹端的应力强度因子。近来, 开裂物体的有效弹性模量已成为固体力学中的重要课题^[9]。在本文中, 在求解边界值问题后, 开裂物体的边界位移甚易得到。从而, 平均应变也可得到。此时, 开裂板条可等价于不开裂的正

* 收稿日期: 2003_08_20; 修订日期: 2004_06_05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272053)

作者简介: 陈宜周(1935—), 男, 浙江余姚人, 教授, 名古屋工业大学博士(Tel: + 86_511_8780780; E-mail: yizhou922@yahoo.com.cn; chens@uj.s.edu.cn)。

交异性板条。最后,文中得出了数值结果,用来说明裂纹几何参数对于应力强度因子和有效弹性模量的影响。

1 周期裂纹削弱的无限长板条的分析

下列分析依赖于平面弹性力学的复变函数方法^[12]。在此法中,应力分量 ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$), 位移 (u, v) 和合力函数 (X, Y) 可通过二个复位函数 $\phi(z), \omega(z)$ 来表示,具体式子如下

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}\phi'(z),$$

$$\sigma_y - i\sigma_{xy} = \phi'(z) + (z - \bar{z}) \overline{\phi''(z)} + \omega'(z), \tag{1}$$

$$f = -Y + iX = \phi(z) + (z - \bar{z}) \overline{\phi(z)} + \omega(z), \tag{2}$$

$$2G(u + iv) = \kappa\phi(z) + (z - \bar{z}) \overline{\phi(z)} + \omega(z), \tag{3}$$

式中 G 是剪切弹性模量,平面应力时取 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, 为 Poisson 比。

在以下分析中,带周期裂纹的无限长板条如图 1 所示,又远处承受拉伸 $\sigma_y = p$ 。相应的弹性常数记为 $\nu_0, G_0, E_0 (E_0 = 2G_0(1 + \nu_0))$ 。在文中,我们取为 $\nu_0 = 0.3$ 。在分析时,可从板条上切割下一矩形开裂单元(图 1)。显然,矩形开裂单元的边界条件如下

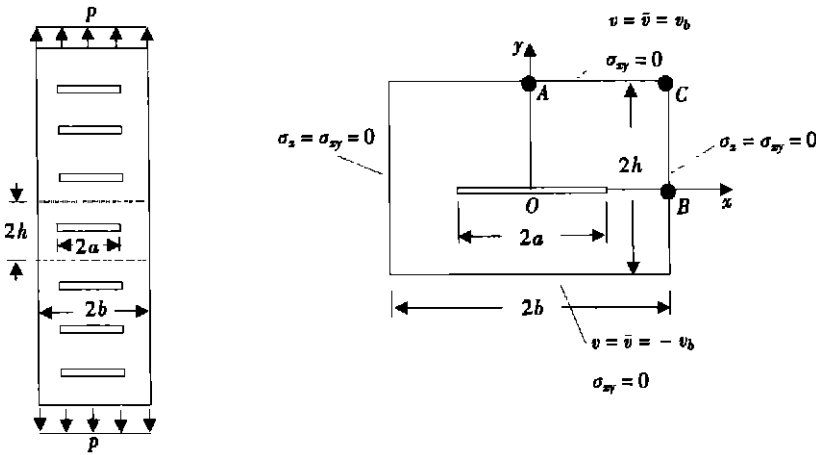
$$v = \bar{v} = \pm v_b, \sigma_{xy} = 0 \quad (-b \leq x \leq b, y = \pm h), \tag{4a}$$

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = 0 \quad (x = \pm b, -h \leq y \leq h), \tag{4b}$$

式(4a)中, v_b 为一待定值,它决定于下列条件

$$\int_0^b \sigma_y(x, h) dx = bp, \tag{5}$$

从式(4a)可见,式(4a)所示的是一个复杂混合边界条件,正因为式(4a)中既有位移边界条件也有力的边界条件。



(a) 带周期裂纹的无限长板条

(b) 一个带裂纹单元

图 1

为了求解问题,引入下列复位函数^[10]

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{2M} X_k \phi^{(k)}(z), \quad \omega(z) = \sum_{k=1}^{2M} X_k \omega^{(k)}(z), \tag{6}$$

其中

$$\begin{cases} \phi^{(k)}(z) = \omega^{(k)}(z) = \sqrt{z^2 - a^2} z^{2k-2} & (1 \leq k \leq M), \\ \phi^{(k)}(z) = -\omega^{(k)}(z) = z^{2(k-M)-1} & (M+1 \leq k \leq 2M). \end{cases} \quad (7)$$

今指出, 所引用的复位函数恒满足裂纹表面自由条件^[10]. 在式(6), (7)中, $2M$ 是特征展开式中截取的项数.

在简单混合边界条件时^[10], 决定 X_k ($k = 1, 2, \dots, 2M$) 的方程为

$$\sum_{k=1}^{2M} A_{mk} X_k = B_m \quad (m = 1, 2, \dots, 2M), \quad (8)$$

其中

$$A_{mk} = A_{km} = \int_{C_p} \sigma_{ij}^{(k)} n_j u_i^{(m)} ds - \int_{C_u} \sigma_{ij}^{(m)} n_j u_i^{(k)} ds \quad (k, m = 1, 2, \dots, 2M), \quad (9)$$

$$B_m = \int_{C_p} p_i u_i^{(m)} ds - \int_{C_u} \sigma_{ij}^{(m)} n_j u_i ds \quad (m = 1, 2, \dots, 2M), \quad (10)$$

又其中 $\sigma_{ij}^{(k)}$, $u_i^{(k)}$ 代表第 k 项展开式中的应力和位移, p_i 表示作用于 C_p 部分边界上的作用力, u_i 表示作用于 C_u 部分边界上的位移.

在下面, 用特征展开变分原理方法来解决上述边界值问题^[10]. 在目前情况下(图 1), 边界“AC”属于复杂混合边界. 此时, 在式(9)中推求沿边界“AC”的积分时, 对于力型边界条件((4a)中的 $\sigma_{xy} = 0$) 选用“ C_p ”型积分, 对于位移型边界条件((4a)中的 $v = v = \pm v_b$) 选用“ C_u ”型积分. 从而, 我们最后得到

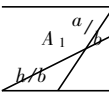
$$A_{mk} = A_{km} = \int_{AC} [\sigma_{xy}^{(k)} u^{(m)} - \sigma_y^{(m)} v^{(k)}] dx + \int_{BC} [\sigma_x^{(k)} u^{(m)} \sigma_{xy}^{(k)} u^{(m)}] dy \quad (k, m = 1, 2, \dots, 2M), \quad (11)$$

$$B_m = - \int_{AC} \sigma_y^{(m)} v dx \quad (m = 1, 2, \dots, 2M). \quad (12)$$

在(11), (12)中, 例如, AC 表示积分沿着图 1 中的 AC 线段进行, $\sigma_y^{(m)}$ 代表第 m 项展开式中的应力 σ_y , v 是沿着 AC 线段给定的位移, 如式(4a)中所示. 事实上, 我们是先在条件(4b)和条件 $v = v = \pm 1$, $\sigma_{xy} = 0$ ($-b \leq x \leq b, y = \pm h$) 求解问题, 然后 v_b 可从式(5)定出.

方程(8)求解后, 应力强度因子和 T_{-} 应力可从下式定出^[10, 13]

表 1 开裂板条问题中的无因次应力强度因子 $A_1(h/b, a/b)$ (见图 1 和式(15))

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0.4	0.966	0.900	0.854	0.848	0.886	0.986	1.170	1.527
0.6	0.993	0.978	0.970	0.986	1.038	1.145	1.338	1.688
0.8	1.001	1.007	1.024	1.061	1.128	1.243	1.433	1.762
1.0	1.005	1.019	1.048	1.095	1.171	1.288	1.472	1.783
1.5	1.006	1.025	1.059	1.111	1.190	1.308	1.483	1.802
2.0	1.006	1.024	1.058	1.106	1.180	1.289	1.459	1.757

$$K_1 = 2(2\pi)^{1/2} \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{z-a} \phi(z) \quad \text{或} \quad K_1 = 2(\pi a)^{1/2} \sum_{k=1}^{2M} X_k a^{2k-2}. \quad (13)$$

$$T = 4X_{M+1}. \quad (14)$$

当采用 $M = 8$ 时, 应力强度因子和 T 应力的计算结果表示为

$$K_1 = A_1(h/b, a/b)p(\pi a)^{1/2}, \tag{15}$$

$$T = -B_1(h/b, a/b) \frac{1}{1 - (a/b)^2} p \tag{16}$$

计算得到的 $A_1(h/b, a/b)$ 和 $B_1(h/b, a/b)$ 值列出在表 1 和表 2 中

表 2 开裂板条问题中的无因次 T 应力 $B_1(h/b, a/b)$ (见图 1 和式(16))

$\frac{h/b}{a/b}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0.4	0.846	0.636	0.435	0.278	0.199	0.090	0.044	0.018
0.6	0.883	0.745	0.602	0.468	0.352	0.255	0.176	0.112
0.8	0.897	0.788	0.680	0.575	0.477	0.385	0.298	0.212
1.0	0.902	0.809	0.719	0.633	0.548	0.464	0.375	0.275
1.5	0.906	0.823	0.746	0.671	0.598	0.518	0.425	0.324
2.0	0.906	0.822	0.746	0.668	0.592	0.510	0.416	0.309

显然, 从 y 方向的位移影响, 开裂板条可模拟为一无裂纹的正交异性板条。熟知, 正交异性材料的物理方程为^[14]

$$\epsilon_x = \frac{1}{E_1} \alpha_x - \frac{\nu_{21}}{E_2} \alpha_y, \quad \epsilon_y = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \alpha_x + \frac{1}{E_2} \alpha_y, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G_{12}} \alpha_{xy} \tag{17}$$

式(17)中的诸值之间还存在一个关系式

$$(E_1 \nu_{21}) / (E_2 \nu_{12}) = 1 \tag{18}$$

为了得到等效弹性常数, 今引入一个特解

$$\alpha_x = 1, \quad \alpha_y = 0, \quad \epsilon_x = \frac{1}{E_0}, \quad \epsilon_y = -\frac{\nu_0}{E_0} \tag{19}$$

式(19)代入式(17), 可得

$$E_1 = E_0, \quad \nu_{12} = \nu_0 \tag{20}$$

其次, 从上述数值解, 可得另一种特解

$$\alpha_x = 0, \quad \alpha_y = p, \quad \epsilon_{x,av} = \frac{u_{av}}{b}, \quad \epsilon_{y,av} = \frac{v_b}{h} \tag{21}$$

式中下标“av”表示相应量在某些边界上的平均值, 又 u_{av} 定义为

$$u_{av} = \frac{1}{h} \int_0^h u(b, y) dy \tag{22}$$

类同, 式(21)代入式(17)后, 可得

$$E_2 = \frac{h}{v_b p}, \quad \nu_{21} = -\frac{h u_{av}}{b v_b} \tag{23}$$

很明显, 从式(20), (23)得到的 $E_1, \nu_{12}, E_2, \nu_{21}$ 不一定精确地满足关系式(18)。事实上, 在本文中关于 h/b 和 a/b 的取值范围内, $(E_1 \nu_{21}) / (E_2 \nu_{12})$ 的值在 0.998 7 到 1.001 3 之间变化。这就说明, 所作的假定符合实际情况。

计算得到的 E_2 表示为

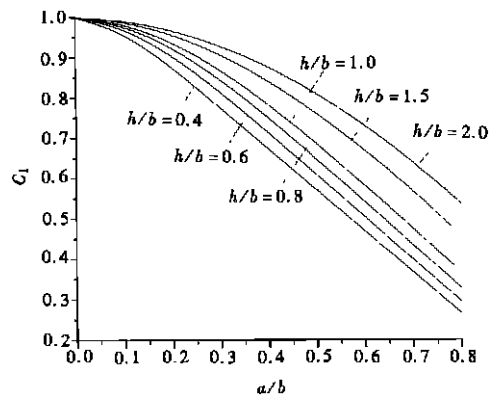


图 2 无因次弹性常数 C_1 a/b 图
($C_1 = E_2/E_0$)

$$E_2 = C_1(h/b, a/b)E_0 \quad (24)$$

相应的无量纲系数 $C_1(h/b, a/b)$ 值表示在图 2 中。从图 2 可见, 在所作研究范围内 $C_1(h/b, a/b)$ 的值均小于单位值。

2 结 论

对于开裂板条言, 诸多感兴趣的量, 如应力强度因子, T -应力和等效弹性模量均可由特征展开变原理方法得到。从而, 特征展开变原理方法提供了对带周期裂纹开裂板条的一个有效解法。

上面的分析表明, 一开裂板条可等效于一无裂纹的正交异性板条。这一结论有助于估量连续物体的损伤。又从以上分析可知, 若裂纹愈长, 应力强度因子和弹性模量所受的影响愈大。作为对比, 引用 2 个例子如下,

例 1 当 $h/b = 1.0$ $a/b = 0.1$ 时, 有 $K_1 = 1.005 p(\pi a)^{1/2}$, $E_2 = 0.985 E_0$

例 2 当 $h/b = 1.0$ $a/b = 0.6$ 时, 有 $K_1 = 1.228 p(\pi a)^{1/2}$, $E_2 = 0.583 E_0$

由此可见, 在 $h/b = 1.0$ 时, 当 $a/b = 0.1$ 变到 $a/b = 0.6$ 时, E_2 值有大幅度下降。

[参 考 文 献]

- [1] Savruk M P. Two dimensional Problems of Elasticity for Body with Cracks [M]. Kiev: Nauka Dumka, 1981.
- [2] CHEN Yi_zhou. A survey of new integral equations in plane elasticity crack problem[J]. Engng Fract Mech, 1995, **51**(5): 387—394.
- [3] CHEN Yi_zhou, Lee K Y. An infinite plate weakened by periodic cracks[J]. J Appl Mech, 2002, **69**(3): 552—555.
- [4] Isida M, Usijima N, Kishine N. Rectangular plate, strips and wide plates containing internal cracks under various boundary conditions[J]. Trans Japan Soc Mech Engrs, 1981, **47**: 27—35.
- [5] Delameter W R, Herrmann G, Barnett D M. Weakening of elastic solid by a rectangular array of cracks[J]. J Appl Mech, 1975, **42**(1): 74—80.
- [6] Parton V Z, Perlin P I. Integral Equations in Elasticity [M]. Moscow: Mir, 1982.
- [7] Benthem J P, Koiter W T. Asymptotic approximations to crack problems[A]. In: G C Sih Ed. Mechanics of Fracture [C]. 1973, **1**: 131—178.
- [8] Huang Y, Hu K X, Chandra A. Stiffness evaluation for solids containing dilute distributions of inclusions and microcracks[J]. J Appl Mech, 1995, **62**(1): 71—77.
- [9] Kachanov M. Elastic solids with many cracks and related problems[A]. In: J W Hutchinson, T Wu Eds. Advances in Applied Mechanics [C]. 1993, **30**: 259—445.
- [10] CHEN Yi_zhou. An investigation of the stress intensity factor for a finite internally cracked plate by using variational method[J]. Engng Fract Mech, 1983, **17**(5): 387—394.
- [11] Wang W C, Chen J T. Stress analysis of finite interfacially cracked bimaterial plates by using variational method[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1989, **73**: 153—171.
- [12] Muskhelishvili N I. Some Basic Problems in the Theory of Elasticity [M]. Gronigen: Noordhoff, 1953.
- [13] CHEN Yi_zhou. Closed form solution of T -stress in plane elasticity crack problems[J]. Internat J Solids and Structures, 2000, **37**(11): 1629—1637.

- [14] Lekhnitsky S G. Theory of Elasticity of Anisotropic Elastic Body [M]. San Francisco: Holden_Day, 1963.

Stress Analysis for an Infinite Strip Weakened by Periodic Cracks

CHEN Yi_zhou

(1. Division of Engineering Mechanics, Jiangsu University
Zhenjiang, Jiangsu 212013, P. R. China)

Abstract: Stress analysis for an infinite strip weakened by periodic cracks is studied. The cracks were assumed in a horizontal position, and the strip is applied by tension “ p ” in y -direction. The boundary value problem can be reduced into a complex mixed one. It is found that the EEVM (eigenfunction expansion variational method) is efficient to solve the problem. The stress intensity factor at the crack tip and the T -stress were evaluated. From the deformation response under tension the cracked strip can be equivalent to an orthotropic strip without cracks. The elastic properties in the equivalent orthotropic strip were also investigated. Finally, numerical examples and results were given.

Key words: eigenfunction expansion variational method; periodic crack; stress intensity factor; T -stress