

超声速蒙皮颤振微分积分方程 的特征值问题

董明德

(中国科学院理论物理所, 1982年12月30日收到)

摘 要

根据二维线性化理论讨论超声速薄板的动力稳定性, 导致一类新颖的数学物理问题: 非自共轭 Volterra 型四阶微分积分方程的复特征值问题。

求得这一气动弹性系统的严格解, 与其它近似分析对比, 本法的临界曲线与实验数据符合良好, 在低超声速范围不存在发散问题, 此外, 在数学物理实质方面, 发现: (1) 颤振频谱与固有频谱有互为间隔现象; (2) 临界 Mach 数有简并现象。

指出本法可以推广应用于三维机翼模型和燃气轮机中叶栅的超声速颤振问题。

一、引 言

二维超声速流中薄板的动力稳定性问题在气动弹性力学的数学理论中是个具有根本重要性的问题^[1-3]。从气动弹性力学开始形成一门分支的时候, 这一问题就引起了广泛的注意。但是, 直到现在, 除了一些工程简化计算外, 在数学方法和物理实质方面还有好些基本问题需要阐明。

从力学观点而言, 上述模型是最简单的模型, 通过与实验结果对比可以验证气动力的理论公式。由此可以建立二维以至三维的机翼简化模型。另一方面, 从数学观点看来, 这一模型提出一类新型的特征值问题。由于气动力在超声速情况下的非局域性, 由于气流和弹性体的耦合振动效应, 须要讨论一类微分积分方程的复特征值问题。但值得注意的是: 在 Sturm-Liouville 问题中, 本征值只是方程中一个简单乘子; 而在超声速颤振问题中, 它还在核函数的超越函数中出现。这种特征值的高度非线性只有通过最终结果进行数值分析才能阐明。

上述非自共轭微分积分方程的复特征问题的严格解法首先由作者给出^[4]。为了进一步分析这一气动弹性系统的动力学特征, 本文采用另一种等价的方法, 简称直接变换法, 并对严格解进行大量数值计算。所得的理论临界曲线和实验数据对比, 符合较好。

进一步发现这一气动弹性系统在动力学上有两个基本特点。一是颤振频率和固有频率的相互间隔现象; 二是临界 Mach 数的简并现象。这些特点是否为其它气动弹性系统所共有, 须要进一步探讨。

二、问题的提法

设有二维弹性薄板，弦长 l ，厚度 h ，长度为无限。当这一薄板在它的平面上（令为 xy 平面）以超声速 U 作平行移动，板的上方（ $z=0+$ ）承受气流作用，下方的介质为真空。如考虑机翼模型时，则板的上下方均受气动力作用。

给定薄板的前缘和后缘（分别记作 $x=0$ ， $x=l$ ）的边界条件。对于蒙皮，可取前后缘为固支条件。对于二维机翼模型，则取前后缘为自由支承条件。

设此二维气流是可压缩的、无粘性的。扰动势 $\varphi(x, z)$ 可由线性化方程决定。

当薄板除基本平移运动外，受到气流扰动作用产生微振 $w(x)$ 。板面邻域的气体介质相互引起耦合振动，两者具有相同的振幅和频率，不然将产生空隙。由于耦合振动，薄板与气流之间将存在能量交换过程。当弹性体不断接受气流能量，则将引起动力失稳；当弹性体不断对气流输送能量，则运动渐趋衰减；当弹性体与气流之间能量交换处于平衡时，则此耦合系统处于临界态。

如所周知，由于能量交换的存在，系统的动力学特征是在数学上不具备自共轭性，而是具有非自共轭性。对这类非自共轭问题，一般的讨论着重于运动是否稳定？即，复特征值（ $\exp(\omega t)$ ， $\omega = \omega_R + i\omega_I$ ）的实部如取负值 $\omega_R < 0$ ，则运动稳定，反之，如取正值 $\omega_R > 0$ ，则运动为不稳定。

因此，超声速薄板颤振的运动方程^[4]（另一推导见下节）

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + F \frac{d^2 w}{dx^2} + \rho_m \omega^2 h w$$

$$= \frac{\rho_\infty}{\sqrt{M^2 - 1}} \left(U \frac{d}{dx} + \omega \right) \int_0^x K(x - \xi, \omega) \left(U \frac{d}{d\xi} + \omega \right) w(\xi) d\xi$$

$$K(x - \xi, \omega) = \frac{-1}{\sqrt{M^2 - 1}} I_0 \left(\frac{\omega}{c(M^2 - 1)} (x - \xi) \right) \exp \left(\frac{-\omega M}{c(M^2 - 1)} (x - \xi) \right) \quad (2.1)$$

边界条件有四个：

1) 如前、后缘固支

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad w(l) = w'(l) = 0 \quad (2.2a)$$

2) 如前、后缘自由

$$w''(0) = w'''(0) = 0, \quad w''(l) = w'''(l) = 0 \quad (2.2b)$$

其中

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \text{——薄板的刚度, } \rho_m \text{——板的密度, } F \text{——板平面 } x \text{-轴向力, } M = \frac{U}{c} \text{——}$$

Mach 数， U ——未扰动气流速度， c ——声速。

由于超声速气动力的非定域性，因此出现微分积分算符，而且它是非自共轭的。由运动方程(2.1)和边界条件(2.2a或b)所构成的复特征值问题是类新型问题，其特点是特征值出现在气动力算符的核函数 $K(x - \xi, \omega)$ 中，这比 Sturm-Liouville 问题复杂得多。

文[4,5]中给出严格解法，便于一般讨论。现在改进求解方法，更便于数值计算。再者，这里对特征值分布进行分析，更有助于阐明气动弹性系统的物理实质。由于通常计算常限于工程需要，着重于求出临界曲线，本文对于频率的分布和临界 Mach 数的简并，虽然是很初

步的,但对说明问题的数学和物理本质是有一定意义的。将一个近代工程技术问题,提炼成一个数学物理中新颖问题来分析,正是本文企图达到的目的。

三、直接变换法

对于气动弹性系统,利用直接变换法,讨论较简单,而且涉及问题本质。它的具体步骤如下:

a. 首先列出气动弹性系统的完整运动方程组和全部定解条件,其中未知函数是平板的振幅 $w(x)$ 和气流的扰动势 $\varphi(x, z)$ 。

b. 对上述完整方程组和定解条件进行积分变换,进一步将映象方程相消,求 $\tilde{w}(s)$ 和 $\tilde{\varphi}(s, 0)$ 含初参数的表式。

c. 利用反演定理得 $w(x)$ 表式。

d. 由定解条件得到特征方程,表示为二阶行列式形式。

e. 决定扰动势 $\varphi(x, z)$ 和作用于平板表面的气动力(见[4],这里从略)

f. 计算特征值,并作出临界曲线。

g. 与实验对比并讨论力学意义。

现按上述步骤逐一讨论如下。

气动-弹性系统的完整方程组和定解条件

(i) 平板振动方程

$$(3.1) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} + f \frac{d^2 w}{dx^2} + \sigma \omega^2 w(x) = P\{w(x)\} \quad (3.1)$$

表面气动力 $P\{w(x)\}$ 根据Cauchy-Lagrange公式是

$$P\{w(x)\} = -\lambda' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \omega \varphi \right) \quad (3.2)$$

$$\lambda' = \lambda \beta = \lambda \sqrt{M^2 - 1}$$

边界条件: 两端分别满足两个条件,如

$$1) \text{ 固支: } w=0, \quad \frac{dw}{dx}=0 \quad (3.3a)$$

$$2) \text{ 自由: } \frac{d^2 w}{dx^2}=0, \quad \frac{d^3 w}{dx^3}=0 \quad (3.3b)$$

(ii) 二维超声速气流的扰动方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = M^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \omega \right)^2 \varphi(x, z) \quad (3.4)$$

上流无扰动条件

$$\text{当 } x \leq 0: \varphi=0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}=0 \quad (3.5)$$

无穷远处衰减条件

$$\text{当 } r = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty \text{ 处} \\ \varphi = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \omega \varphi = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$$

(iii) 系统振动的相容条件

在 $z \rightarrow 0_+$ 处

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z \rightarrow 0_+} = \frac{dw}{dx} + \omega w(x) \quad (3.7)$$

因此气弹系统的运动规律由上述方程组和定解条件(i~iii)来决定, 其中含有五个无量纲参量 $f, \sigma, \lambda, \omega$ 和 M 分别表示

$$\left. \begin{array}{l} \text{a. 轴向力} \quad f = \frac{F a^2}{D} \\ \text{b. 惯性力} \quad \sigma = \frac{\rho_m U^2 a^2 h}{D} \\ \text{c. 气动力} \quad \lambda = \frac{\rho U^2 a^3}{D \sqrt{M^2 - 1}} \\ \text{d. Strouhal 数} \quad \omega = \frac{\omega_1 a}{U} \\ \text{e. Mach 数} \quad M = \frac{U}{c} \end{array} \right\} \quad (3.8a \sim e)$$

颤振的相似律为

$$\Theta(f, \sigma, \lambda, M; \omega) = 0 \quad (3.9)$$

Θ 的具体表式待求.

求 $\bar{\varphi}(s)$ 映象解

对波动方程(ii)施行 Laplace 变换, 得到

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} = \beta^2 [(s + kM)^2 - k^2] \bar{\varphi}(s, z) \quad \left(k = \frac{\omega M}{M^2 - 1}, \beta = \sqrt{M^2 - 1} \right)$$

由此得解

$$\bar{\varphi}(s, z) = A(s) \exp\{-\beta \sqrt{(s + kM)^2 - k^2} z\} + B(s) \exp\{+\beta \sqrt{(s + kM)^2 - k^2} z\} \quad (z \geq 0)$$

式中 $A(s), B(s)$ 只与 s (即 x) 有关. 考虑到 $z \rightarrow \infty$ 处函数 $\varphi(x, z)$ 是有限的, 故 $B(s) = 0$.

根据 $z = 0_+$ 处相容条件

$$\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}\right)_{z=0_+} = \int_0^\infty \left(\frac{dw}{dx} + \omega w\right) \exp(-sx) dx$$

可以决定 $A(s)$. 因此有

$$\bar{\varphi}(s, z) = \frac{-1}{\beta \sqrt{(s + kM)^2 - k^2}} \exp(-\beta \sqrt{(s + kM)^2 - k^2} z) \int_0^\infty \left(\frac{dw}{dx} + \omega w\right) \exp(-sx) dx$$

当 $z \rightarrow 0_+$ 时, 得到极限值

$$\bar{\varphi}(s, 0_+) = \frac{-1}{\beta \sqrt{(s + kM)^2 - k^2}} \{(s + \omega) \bar{w}(s) - w(0)\}$$

如果将 $\bar{\varphi}(s, 0_+)$ 反演, 得到 ($\beta = \sqrt{M^2 - 1}$):

$$\varphi(x, 0) = \int_0^x K(x-\xi; \omega) \left(\frac{dw}{d\xi} + \omega w(\xi) \right) d\xi \quad (3.10)$$

$$K(x-\xi; \omega) = -\frac{1}{\beta} \exp \left\{ -\frac{\omega M^2}{M^2-1} (x-\xi) \right\} \cdot I_0 \left(\frac{\omega M}{M^2-1} (x-\xi) \right)$$

代入平钣运动方程 (i) 中, 得到二维超声速薄钣颤振的微积分方程

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + f \frac{d^2 w}{dx^2} + \sigma \omega^2 w(x) = \lambda \left(\frac{d}{dx} + \omega \right) \int_0^x K(x-\xi, \omega) \left(\frac{dw}{d\xi} + \omega w(\xi) \right) d\xi \quad (3.11)$$

这与上述方程 (2.1) 完全一致。

本法的特点是直接对映象 $\tilde{w}(s)\varphi(s)$ 进行运算, 而且由于引进初参数 $w(0), w'(0), w''(0), w'''(0)$ 可使特征方程大为简化, 便于数值分析。

四、颤振振幅

上述方程积分变换后具有形式

$$\left. \begin{aligned} \{s^4 + fs^2 + \sigma\omega^2 - \lambda(s+\omega)^2 \tilde{K}(s)\} \tilde{w}(s) &= (s^3 + \lambda(s+\omega)K(s) + fs)w(0) \\ &+ (s^2 + f)w'(0) + sw''(0) + w'''(0) \\ \tilde{K}(s) &= [(s-kM)^2 - k^2]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

或者写成以下形式

$$\tilde{w}(s) = \sum_{i=0}^3 c_i \xi_i(s) \quad (4.2)$$

c_i 是初参数

$$c_i = w^{(i)}(0) = \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^i w(x) \right]_{x=0}$$

而 $\xi_i(s)$ 的形式如下:

$$\xi_0(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \{s^3 + fs - \lambda(s+\omega)K(s)\}$$

$$\xi_1(s) = \frac{1}{\Delta(s)} (s' + f)$$

$$\xi_2(s) = \frac{1}{\Delta(s)} s$$

$$\xi_3(s) = \frac{1}{\Delta(s)}$$

$$\Delta(s) = s^4 + fs^2 + \sigma\omega^2 - \frac{\lambda(s+\omega)^2}{\sqrt{(s-kM)^2 - k^2}}$$

采用适当积分回路 Γ , 对上述映象 $\tilde{w}(s)$ 应用反演定理, 得到

$$w(x) = \sum_{i=0}^3 c_i \zeta_i(x)$$

其中

$$\zeta_i(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp(sx) \xi_i(s) ds \quad (4.3)$$

Γ 包含所有极点 $s_l (l=1, 2, \dots)$, 并对代数支点 $\sqrt{(s+kM)^2-k^2}$ 作割线. 因此有挠度表式

$$w(x) = w(0)\xi_0(x) + w'(0)\xi_1(x) + w''(0)\xi_2(x) + w'''(0)\xi_3(x) \quad (4.4)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \xi_0(x) &= \sum_l a_{0l} \exp(s_l x) + \int_a^b a_0(\rho) \exp(-\rho \omega x) d\rho \\ \xi_1(x) &= \sum_l a_{1l} \exp(s_l x) + \int_a^b a_1(\rho) \exp(-\rho \omega x) d\rho \\ \xi_2(x) &= \sum_l a_{2l} \exp(s_l x) + \int_a^b a_2(\rho) \exp(-\rho \omega x) d\rho \\ \xi_3(x) &= \sum_l a_{3l} \exp(s_l x) + \int_a^b a_3(\rho) \exp(-\rho \omega x) d\rho \end{aligned} \right\} \quad (4.5a \sim d)$$

右端第一项中有

$$a_{il} = b_{il} \left/ \left[\frac{d\Delta}{ds} \right]_{s=s_l} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} b_{0l} &= (s_l^2 + f s_l) \sqrt{(s_l + kM)^2 - k^2} - \lambda(s_l + \omega) \\ b_{1l} &= (s_l + f) \sqrt{(s_l + kM)^2 - k^2} \\ b_{2l} &= s_l \sqrt{(s_l + kM)^2 - k^2} \\ b_{3l} &= \sqrt{(s_l + kM)^2 - k^2} \end{aligned} \right.$$

$$\left[\frac{d\Delta}{ds} \right]_{s=s_l} = 2s_l (2s_l^2 + f) \sqrt{(s_l + kM)^2 - k^2} - 2\lambda(s_l + \omega) f \\ + \left(s_l + \frac{\omega M^2}{M^2 - 1} \right) (s_l^2 + f s_l + \sigma \omega^2) \cdot [(s_l + kM)^2 - k^2]^{-\frac{1}{2}}$$

而第二项中有

$$a_i(\rho, \omega) = \frac{1}{\pi} \frac{g_i(\rho, \omega)}{G(\rho, \omega)}$$

$$g_0(\rho) = \lambda(1-\rho) \{ \rho(\rho^2 \omega^2 - f)(1-\rho) - (\rho^4 \omega^2 + f\rho + \sigma) \}$$

$$g_1(\rho) = -\frac{\lambda}{\omega} (1-\rho)^2 (f + \rho^2 \omega^2)$$

$$g_2(\rho) = -\lambda \rho (1-\rho)^2$$

$$g_3(\rho) = -\frac{\lambda}{\omega} (1-\rho)$$

$$G(\rho, \omega) = \left\{ \left(\frac{M}{M-1} - \rho \right) \left(\rho - \frac{M}{M+1} \right) (\rho^4 \omega^2 + f\rho^2 + \sigma)^2 + \lambda^2 (1-\rho)^4 \right\} \\ \cdot \left\{ \left(\frac{M}{M-1} - \rho \right) \left(\rho - \frac{M}{M+1} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

割线的两端为 $(s = -\rho\omega)$:

$$a = \frac{M}{M-1}, \quad b = \frac{M}{M+1}$$

注意：根据解析延拓原理，映象 $\tilde{K}(s)$ 的单值支 $\operatorname{Re}\left[\left(s + \frac{\omega M}{M+1}\right)\left(s + \frac{\omega M}{M-1}\right)\right]^{1/2} > 0$

的正规域是沿支点 $\frac{\omega M}{M+1}$ 和 $\frac{\omega M}{M-1}$ 作割线后的平面。

再则，上式中假设 $\mathcal{A}(s)$ 的零点都是一阶 $s=s_1, s_2, \dots$ ，高阶零点讨论也类似。零点个数有限个，即不大于 10，这是由于方程

$$\left(s + \frac{\omega M}{M+1}\right)\left(s + \frac{\omega M}{M-1}\right)(s^4 + fs^2 + \sigma\omega^2)^2 - \lambda^2(s+\omega)^4 = 0$$

的 10 个根一般不是平均分布在两个分支上。

五、特征方程

1. 蒙皮颤振

取前、后缘为固支条件

$$\begin{cases} w(0) = 0, w'(0) = 0 \\ w(1) = 0, w'(1) = 0 \end{cases}$$

由前缘条件得

$$w(x) = w''(0)\zeta_2(x) + w'''(0)\zeta_3(x)$$

根据后缘条件得到特征方程

$$\begin{vmatrix} \zeta_2(1) & \zeta_3(1) \\ \zeta_2'(1) & \zeta_3'(1) \end{vmatrix} = 0 \quad (5.1)$$

因此颤振相似律为

$$\Theta(f, \sigma, \lambda, M; \omega) = \zeta_2(1)\zeta_3'(1) - \zeta_2'(1)\zeta_3(1) = 0,$$

2. 二维机翼

前、后缘满足自由边界条件（气动力乘以 2）

$$\begin{cases} w''(0) = 0, w'''(0) = 0 \\ w''(1) = 0, w'''(1) = 0 \end{cases}$$

故得特征方程

$$\Theta(f, \sigma, \lambda, M; \omega) = \zeta_2''(1)\zeta_3'''(1) - \zeta_2'''(1)\zeta_3''(1) = 0 \quad (5.2)$$

六、稳定边界曲线

计算数据

取海平面上空气（温度 15°C）

$$\gamma = 1.4, \nu = 0.3, \rho_\infty = 1.293 \times 10^{-3} \text{g/cm}^3, p_\infty = 1.014 \times 10^6 \text{dyn/cm}^2, \rho_m = 7.8 \text{g/cm}^3,$$

$$c_m = \sqrt{\frac{E}{\rho_m(1-\nu^2)}} = 5450 \text{m/sec}, E = 2 \times 10^{12} \text{dyn/cm}^2.$$

为了阐明问题的实质，并与现有蒙皮颤振的实验数据比较^[3]，略去气动加热效应，不考

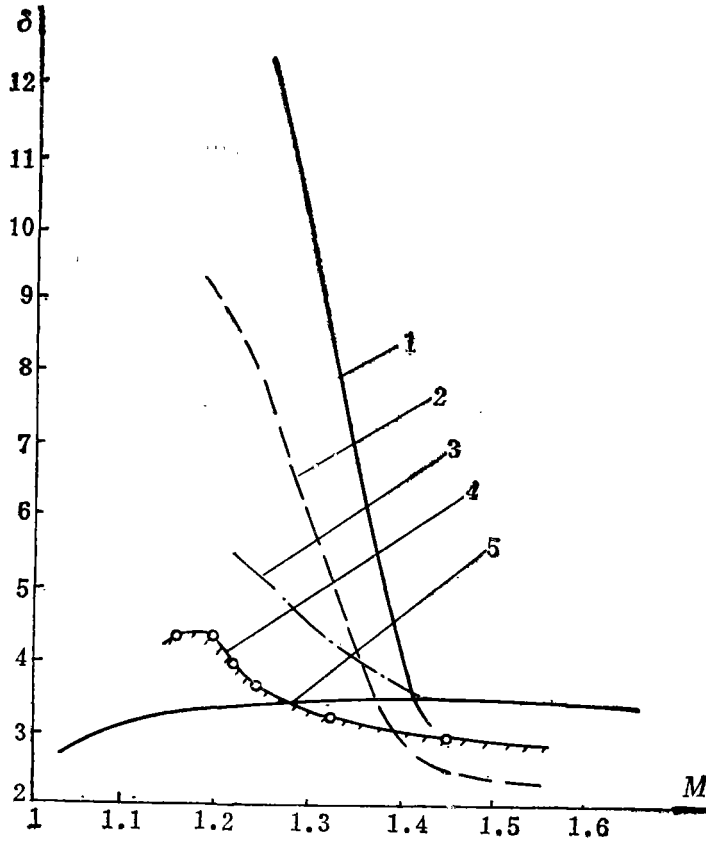


图 1 稳定边界曲线

($\delta^* \sim M^*$ 曲线上部是稳定区, 下部是不稳定区. 参阅 Fung[3])

- 1, 2—Fung: 活塞理论和 Galerkin 法计算曲线
- 3—McCrae: 简化附面层的计算曲线
- 4—Fung-Lock: 实验曲线
- 5—本法的计算曲线

(注: 作为设计的简化公式本文曲线可表为 $\delta^* = 17.7M^* - 6.41M^{*2} - 8.7$ ($1.1 < M < 1.7$) ($\delta = l/100h$))

虑板平面的压力作用。

按本文理论计算, 得到稳定边界曲线 ($M^* \sim \delta^*$), 如图 1。又, 对于不同临界 Mach 数, 得到颤振频率曲线 ($\omega^* \sim \delta^*, M^*$), 如图 2 所示。

由图 1 可见, 在现有实验数据范围内, 按二维线化理论而建立的上述模型具有一定的适用性。

与其它近似分析相比较, 气动力的近似公式 (活塞理论) 和计算的近似方法 (Galerkin 法) 引起误差较大。二维近似附面层计算比其它方案有改进, 但在 $1 < M < 1.2$ 区域, 曲线有显然继续上翘趋势 (当 M 渐减时), 即趋向发散。另一方面, 和实验数据比较, 进一步改善附面层计算 (本身已很复杂) 才有可能改善发散趋势, 而应用二维势流, 可以较简便地解决发散问题。

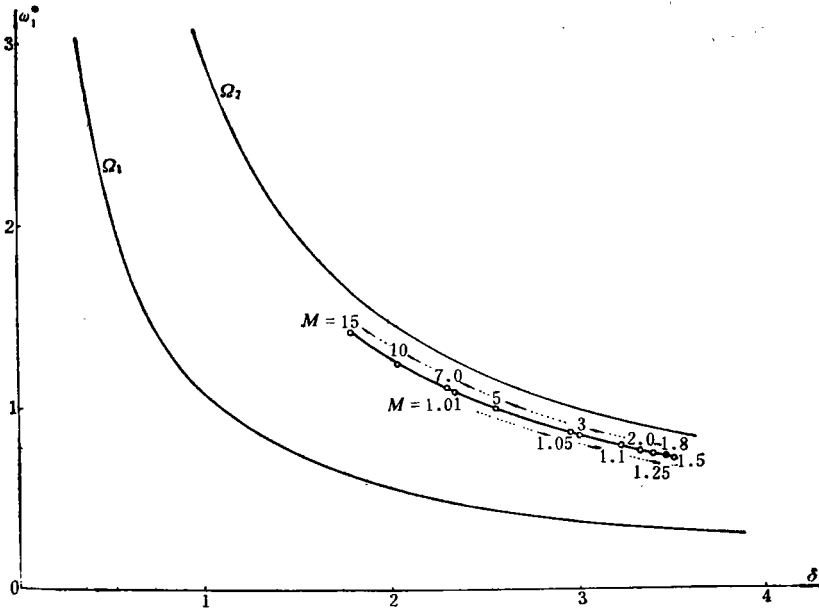


图 2

七、颤振频谱的间隔性和临界 Mach 数的简并性

A. 颤振频谱的间隔性

由图 2 可见：一阶颤振频率 ω_1^* 在一阶和二阶固有频率 Ω_1, Ω_2 之间；而且， ω_1^* 曲线在 Ω_1 曲线和 Ω_2 曲线之间；它与 Ω_2 曲线较为贴近，并与 Ω_2 曲线保持同一趋势。

这一点在力学上是可以理解的。弹性体在真空中的固有频率，在超声速气流中的颤振频率，其差别在于气流使弹性体增加“等价质量”。

计算结果表明：高阶颤振频率与固有频率之间存在互为间隔的现象：

$$\Omega_1 < \omega_1 < \Omega_2 < \omega_2 < \Omega_3 < \omega_3 \dots$$

严格讨论在数学上归结为如下问题，试证比较定理：

1. 真空中固有振动问题

运动方程：
$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \sigma \omega^2 w = 0$$

边界条件：
$$x=0, l \text{ 处 } w = \frac{dw}{dx} = 0$$

特征值序列：
$$0 < \Omega_1 < \Omega_2 < \dots$$

2. 气流中颤振运动问题

运动方程：
$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \sigma \omega^2 w = \lambda P\{w(x); \omega\}$$

边界条件：
$$x=0, l \text{ 处 } w = \frac{dw}{dx} = 0$$

特征值序列: $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots$

求证: $0 < \Omega_1 < \omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_n < \omega_n < \Omega_{n+1} < \dots$

这和 Sturm-Liouville 问题中 Haupt 定理有些类似 (参见 Courant und Hilbert, 1924, pp.338, 366). 但是颤振问题的特点在于方程为四阶, 有四个边界条件, 右端 $\lambda P\{\omega; \omega\}$ 含微分积分算符, 而且特征值还在核函数中出现. 这些都比 Sturm-Liouville 问题复杂得多, 须另行讨论.

B. 临界 Mach 数简并现象

由图 2 可见, 一个颤振频率有两个不同的临界 Mach 数与它对应. 如 $\omega^*=1$ 时, 有 $M^*=1.02$ 和 5.5 相对应.

这与简单设想相反, 频率曲线并不构成封闭迴线 (不论是开或闭的), 而是 $M^*=1.01 \sim 1.5$ 的频率支与 $M^*=1.5 \sim 15$ 的频率支在 $M^*=1.5$ 处互相叠合, 而趋向相反. 或者说, 开迴线退化为一曲线. (自然, 对于较高 Mach 数, 线化理论不成立, 这里只作为延伸结果来讨论).

简并现象在物理中早有讨论, 而在 (气动弹性) 力学似未曾提到. 再者, 这里只就计算结果来分析简并现象, 一般性证明数学上困难较大.

八、讨 论

A. 本文的二维线化理论与实验数据符合较好. 不但如此, 根据计算结果所得的频谱间隔现象和临界 Mach 数简并现象在理论上也是自洽的.

B. 本文方法可以推广应用于三维机翼问题和燃气轮机中叶栅问题^[6]. 对于三维机翼, 需要计及超声速边缘效应; 对于叶栅问题, 需要考虑前缘 Mach 锥的超声速效应. 关于气动力原则上都已有阐明. 由此所形成的微分积分方程属于本文所讨论的类型, 完全可按本法讨论.

参 考 文 献

- [1] Bisplinghoff, Ashley, Halfman, *Aeroelasticity*, Cambridge, Addison-Wesley.
- [2] Miles, J. W., On the aerodynamic instability of thin panels, *JAS*, 23,8(1956).
- [3] Fung, Y. C., Some recent contributions to panel flutter research, *IAS*, 63-26.
- [4] Дун Мин-дэ, Точная линеаризованная теория сверхзвукового флаттера панелей, *Sientia Sinica*, 13, 3(1964)391-412.
- [5] Дун Мин-дэ, Об устойчивости пластинки при сверхзвуковом обтекании, *ДАН СССР*, 120, 4(1958), 726-729. (or *Soviet Physics*, May 1958).
- [6] Bendiksen, O. and P. Friedman, Coupled bending-torsion flutter in a supersonic cascade *AIAA*, 15,6(1981), 774-781.

Eigenvalue Problem for Integro-Differential Equation of Supersonic Panel Flutter

Dong Ming-de

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

The dynamic stability of a thin plate in supersonic flow based on 2-dimensional linear theory leads to study a new problem in mathematical physics: complex eigenvalue problem for a non-self-adjoint integro-differential equation (4-th order) of Volterra's type.

Exact solution for the aeroelastic system is obtained. In contrast to various approximate analysis, our resulting critical curve agrees satisfactorily with experimental data, free from divergence in low supersonic region. Moreover, we observe some notable physical behaviors: (1) mutual separation between flutter and vacuum frequency spectrum, (2) degeneracy of critical Mach number.

The present method may be generalized in solving the supersonic flutter problems for 3-dimensional airfoil models as well as blade cascade in turbo-generator.