

# 球面间流体流动考虑流动 惯性的近似解\*

王致清 刘震北

(哈尔滨工业大学, 1983年3月23日收到)

## 摘 要

本文利用球坐标下的Navier-Stokes方程式, 采用迭代近似解法, 求出了考虑流动惯性时的球面间流动的压力分布、速度分布以及流量的解析式. 并利用此式可直接导出平行圆板间径向层流的相应解析表达式, 它与文献[3], [4]中所提供的相应结果是完全一致的.

## 一、引 言

关于两平行圆板间径向层流流动, 考虑流动惯性影响, 在文献[3, 4, 6]中进行了理论分析与实验研究工作. 然而, 对于两球面间层流流动的研究尚不够. 在文献[1]中忽略流动惯性影响, 由简化了的Navier-Stokes方程式, 求得球面间流动的线性解, 在工程上, 特别是润滑问题中一直应用着这个结果. 而对于考虑流动惯性的影响研究是缺乏的. 实际上, 对于球面间距较大或者对于大雷诺数流动, 如在液压球阀中常遇到的, 其流动惯性的效应是必须要考虑的.

球面间流动一般分为跑合型与间距型的两种, 如图1中的a), b)所示. 本文主要是讨论在工程上应用较多的跑合型, 而间距型的球面间流动只给出相应的计算结果.

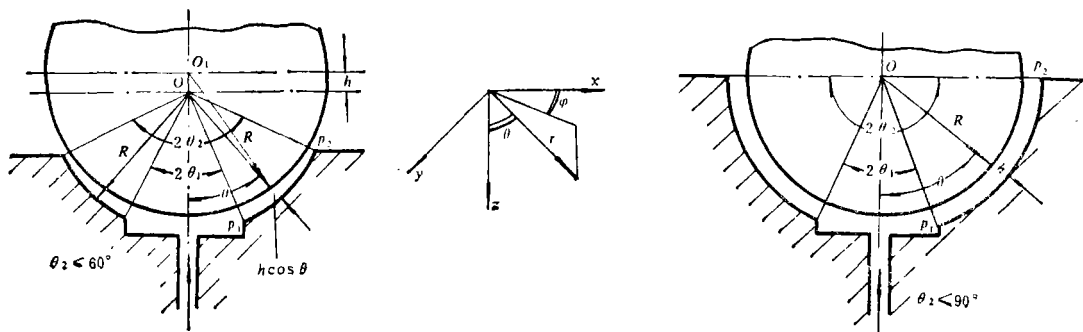


图1 a) 跑合型

图1 b) 间距型

\* 钱伟长推荐.

## 二、基本方程式

设在球坐标  $r, \varphi, \theta$  下, 速度分量分别为  $u_r, u_\varphi, u_\theta$ . 作下列基本假设: 流体为不可压缩 (流体密度  $\rho = \text{常数}$ ); 忽略质量力作用; 并且是定常和轴对称的层流流动; 因此有

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$$

当  $h$  相对于球面半径  $R$  较小时, 可以认为  $u_r = 0$ , 因而设  $u_\theta = u$ .

在上面假设条件下, 球坐标的N-S方程式可简化为如下形式

$$-\rho \frac{u^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( -\frac{2\text{ctg}\theta}{r^2} u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = & -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\text{ctg}\theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{u}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

连续性方程式为

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -u \text{ctg}\theta \quad (2.3)$$

式中  $\mu$ ——流体的动力粘性系数,  $p$ ——流体的静压力.

把(2.3)式代入(2.1)式, 得

$$\rho \frac{u^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2.4)$$

仿曲面上边界层理论<sup>[2]</sup>, 将  $p$  视作与  $r$  无关, 即有  $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ . 因而  $p$  仅是  $\theta$  的函数.

再将(2.3)式对  $\theta$  求导数后, 代入(2.2)式右端, 则(2.2)式变成为

$$\rho \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.5)$$

或者写成为

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.6)$$

$$\text{式中} \quad P = p + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (2.7)$$

称为流体总压力.

采用非线性微分方程式(2.5)或(2.6), 对跑合型和间距型的流动, 分别求出它们的迭代近似解.

## 三、跑合型球面间流动的迭代近似解

在这种情况下, 求方程式(2.5)或(2.6)的迭代近似解, 其边界条件为当  $r=R$  和  $r=R+h\cos\theta$  时,  $u=0$

$$(3.1)$$

## (1) 一级近似解

首先, 将方程式 (2.7) 中右端含有速度  $u$  的项, 用当地平均速度代替, 解方程式求一级近似解. 设在  $\theta$  处的当地速度为  $v$ , 则有

$$v = \frac{Q}{\pi h \sin 2\theta \left( R + \frac{h}{2} \cos \theta \right)} \quad (3.2)$$

式中  $Q$ ——体积流量. 将式 (2.7) 中  $u$  置换以  $v$ , 得

$$P = p + \frac{1}{2} \rho \left[ \frac{Q^2}{\pi h \sin 2\theta \left( R + \frac{h}{2} \cos \theta \right)^2} \right] \quad (3.3)$$

可见,  $P$  与  $r$  无关, 因而  $\frac{\partial P}{\partial \theta}$  与  $r$  也是无关的. 将方程式 (2.6) 对  $r$  积分, 并利用边界条件 (3.1), 求得

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} \left[ r + \frac{R(R+h\cos\theta)}{r} - (2R+h\cos\theta) \right] \quad (3.4)$$

如将总压  $P$  换成静压  $p$ , 上式就是线性解 [1] 的速度分布表达式.

通过任意  $\theta$  处过流断面的流量

$$Q = \int_R^{R+h\cos\theta} u \cdot 2\pi r \sin\theta dr \quad (3.5)$$

将速度分布式 (3.4) 代入上式, 算得

$$Q = -\frac{\pi h^3 \cos^3 \theta \sin \theta}{6\mu} \frac{dP}{d\theta} \quad (3.6)$$

或者

$$\frac{dP}{d\theta} = -\frac{6\mu Q}{\pi h^3 \cos^3 \theta \sin \theta} \quad (3.7)$$

将 (3.3) 式对  $\theta$  求导数, 并与 (3.7) 式比较, 得

$$\frac{dP}{d\theta} = -\frac{6\mu Q}{\pi h^3 \cos^3 \theta \sin \theta} - \frac{1}{2} \rho Q^2 \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{\pi^2 h^2 \sin^2 2\theta \left( R + \frac{h}{2} \cos \theta \right)^2} \right] \quad (3.8)$$

压力的边界条件:

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } \theta = \theta_1 \text{ 时, } p = p_1 \\ \text{当 } \theta = \theta_2 \text{ 时, } p = p_2 \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

利用边界条件 (3.9), 求解方程式 (3.8), 得出一级近似的压力分布规律为

$$p - p_2 = \frac{3\mu Q}{\pi h^3} [\operatorname{tg}^2 \theta_2 - \operatorname{tg}^2 \theta + 2 \ln (\operatorname{tg} \theta_2 / \operatorname{tg} \theta)] + \frac{\rho Q^2}{8\pi^2 h^2 R^2} \left[ \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_2)^3}{\operatorname{tg}^2 \theta_2 \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_2} + \frac{h}{2R} \right)^2} - \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^3}{\operatorname{tg}^2 \theta \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} + \frac{h}{2R} \right)^2} \right] \quad (3.10)$$

因而两端的压力降

$$\begin{aligned} \Delta p = p_1 - p_2 = & \frac{3\mu Q}{\pi h^3} [\operatorname{tg}^2 \theta_2 - \operatorname{tg}^2 \theta_1 + 2 \ln(\operatorname{tg} \theta_2 / \operatorname{tg} \theta_1)] \\ & + \frac{\rho Q^2}{8\pi^2 h^2 R^2} \left[ \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_2)^3}{\operatorname{tg}^2 \theta_2 \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_2} + \frac{h}{2R} \right)^2} - \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1)^3}{\operatorname{tg}^2 \theta_1 \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1} + \frac{h}{2R} \right)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

## (2) 二级近似解

仿照一级近似计算步骤进行计算，二级近似计算工作是很复杂的。

首先，将(3.7)式代入(3.4)式，再将(3.4)式代入(2.7)式，求得总压力

$$P = p + \frac{1}{2} \rho \frac{9Q^2}{\pi^2 h^6 \cos^6 \theta \sin^2 \theta} \left[ r + \frac{R(R + h \cos \theta)}{r} - (2R + h \cos \theta) \right]^2 \quad (3.12)$$

将上式对  $\theta$  求偏导数后，再代入方程式(2.6)，化简整理得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = & \frac{r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{9\rho Q^2}{2\mu\pi^2 h^6 \cos^7 \theta \sin^3 \theta} \cdot \left\{ (6\sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta) r^3 \right. \\ & + [2h\sin^2 \theta \cos \theta + (2\cos^2 \theta - 6\sin^2 \theta)(4R + 2h\cos \theta)] r^2 - [2\sin^2 \theta \cos \theta (3Rh \\ & + h^2 \cos \theta) + (2\cos^2 \theta - 6\sin^2 \theta)(6R^2 + 6Rh\cos \theta + h^2 \cos \theta)] r + [2\sin^2 \theta \cos \theta (3R^2 h \\ & + 2Rh^2 \cos \theta) + (2\cos^2 \theta - 6\sin^2 \theta)(4R^3 + 6R^2 h \cos \theta + 2Rh^2 \cos \theta)] \\ & \left. - [2\sin^2 \theta \cos \theta (R^3 h + R^2 h^2 \cos \theta) + R^2 (R + h \cos \theta)^2 (2\cos^2 \theta - 6\sin^2 \theta)] \frac{1}{r} \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

求解微分方程式(3.13)，利用边界条件(3.1)，得出二级近似速度表达式

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left[ r + \frac{R(R + h \cos \theta)}{r} - 2R - h \cos \theta \right] \\ & + \frac{9\rho Q^2}{2\mu\pi^2 h^6 \cos^7 \theta \sin^3 \theta} \left\{ [A_0(\theta) r^3 + A_1(\theta) r^2 + A_2(\theta) r + A_3(\theta) \ln r \right. \\ & + A_4(\theta) \frac{1 + \ln r}{r}] - [A_0(\theta) R^3 + A_1(\theta) R^2 + A_2(\theta) R + A_3(\theta) \ln R \\ & + A_4(\theta) \frac{1 + \ln R}{R}] + \frac{R(R + h \cos \theta)}{r h \cos \theta} \left( \frac{1}{r} - 1 \right) \cdot [A_0(\theta) ((R + h \cos \theta)^3 \\ & - R^3) + A_1(\theta) ((R + h \cos \theta)^2 - R^2) + A_2(\theta) h \cos \theta + A_3(\theta) \ln \frac{R + h \cos \theta}{R} \\ & \left. + A_4(\theta) \left( \frac{\ln(R + h \cos \theta)}{R + h \cos \theta} - \frac{\ln R}{R} - \frac{h \cos \theta}{R(R + h \cos \theta)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} A_0(\theta) &= -\frac{2}{3} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \\ A_1(\theta) &= R \left[ \frac{7}{3} \cos^3 \theta \left( \frac{h}{R} \right) + \frac{16}{3} \cos^2 \theta - \frac{5}{3} \cos \theta \left( \frac{h}{R} \right) - 4 \right] \\ A_2(\theta) &= R^2 \left[ -3 \cos^4 \theta \left( \frac{h}{R} \right)^2 - 21 \cos^3 \theta \left( \frac{h}{R} \right) + \left( 2 \left( \frac{h}{R} \right)^2 - 24 \right) \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & + 15\cos\theta\left(\frac{h}{R}\right) + 18 \Big] \\
 A_3(\theta) = R^3 & \left[ 12\cos^4\theta\left(\frac{h}{R}\right)^2 + 42\cos^3\theta\left(\frac{h}{R}\right) + \left(32 - 8\left(\frac{h}{R}\right)^2\right)\cos^2\theta \right. \\
 & \left. - 30\cos\theta\left(\frac{h}{R}\right) - 24 \right] \\
 A_4(\theta) = R^4 & \left[ 6\cos^4\theta\left(\frac{h}{R}\right)^3 + 14\cos^3\theta\left(\frac{h}{R}\right) + \left(8 - 4\left(\frac{h}{R}\right)^2\right)\cos^2\theta \right. \\
 & \left. - 10\cos\theta\left(\frac{h}{R}\right) - 6 \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

将(3.14)式代入流量表达式(3.5), 并进行积分整理得

$$\begin{aligned}
 Q = & \frac{\pi h^3 \cos^3\theta \sin\theta}{6\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial\theta}\right) + \frac{9\rho Q^2}{\mu\pi h^6 \cos^7\theta \sin^2\theta} \left\{ \frac{A_0(\theta)}{5} [(R+h\cos\theta)^5 - R^5] \right. \\
 & + \frac{A_1(\theta)}{4} [(R+h\cos\theta)^4 - R^4] + \left[ \frac{A_2(\theta)}{3} + A_0(\theta)R(R+h\cos\theta) \right. \\
 & \left. - \frac{A_0(\theta)}{2} ((R+h\cos\theta)^2 - R^2) - \frac{R+h\cos\theta}{h\cos\theta} \right] \cdot [(R+h\cos\theta)^3 - R^3] \\
 & + \left[ A_1(\theta)R(R+h\cos\theta) - \frac{1}{2}(A_0(\theta)R^3 + A_1(\theta)R^2 + A_2(\theta)R + A_3(\theta)\ln R \right. \\
 & \left. + A_4(\theta)\frac{1+\ln R}{R}) - \frac{A_1(\theta)}{2} \cdot \frac{R+h\cos\theta}{h\cos\theta} ((R+h\cos\theta)^2 - R^2) - \frac{A_3(\theta)}{4} \right. \\
 & \left. - \frac{A_2(\theta)}{2}(R+h\cos\theta) + \frac{A_4(\theta)}{2R} + A_4(\theta)\frac{R+h\cos\theta}{2Rh\cos\theta} \ln R \right] \cdot [(R+h\cos\theta)^2 - R^2] \\
 & + (A_2(\theta)Rh\cos\theta - A_4(\theta)\ln R)(R+h\cos\theta) + \left(-\frac{A_3(\theta)}{2}R^2\ln R - A_4(\theta)R\ln R \right. \\
 & \left. - A_4(\theta)h\cos\theta \right) + \left[ \frac{A_3(\theta)}{2}(R+h\cos\theta)^2 + A_4(\theta)(R+h\cos\theta) + A_4(\theta)R \right. \\
 & \left. - A_4(\theta)\frac{(R+h\cos\theta)^2 - R^2}{2h\cos\theta} \right] \ln(R+h\cos\theta) + \left[ A_3(\theta)R(R+h\cos\theta) \right. \\
 & \left. - A_3(\theta)\frac{R+h\cos\theta}{h\cos\theta} \frac{1}{2} ((R+h\cos\theta)^2 - R^2) \right] \ln \frac{R+h\cos\theta}{R} \Big\} \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

再将(3.15)式各系数  $A_i(\theta)$  代入上式, 经化简整理, 并按  $\cos\theta$  的降幂排列可得

$$\begin{aligned}
 Q = & \frac{\pi h^3 \cos^3\theta \sin\theta}{6\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial\theta}\right) + \frac{9\rho Q^2}{\mu\pi h^6 \cos^7\theta \sin^2\theta} \left[ (B_7 \cos^7\theta + B_6 \cos^6\theta + B_5 \cos^5\theta \right. \\
 & + B_4 \cos^4\theta + B_3 \cos^3\theta + B_2 \cos^2\theta + B_1 \cos\theta + B_0) + (C_5 \cos^5\theta + C_4 \cos^4\theta \\
 & \left. + C_3 \cos^3\theta + C_2 \cos^2\theta + C_1 \cos\theta + C_0) \ln(R+h\cos\theta) \right] \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 B_7 &= R^6 \frac{7}{60} \left(\frac{h}{R}\right)^6, & B_8 &= -R^6 \frac{4}{3} \left(\frac{h}{R}\right)^4 \\
 B_6 &= R^6 \left[ -\frac{1}{15} \left(\frac{h}{R}\right)^5 - \left(\frac{41}{2} + 9 \ln R\right) \left(\frac{h}{R}\right)^3 \right] \\
 B_4 &= R^6 \left[ \frac{5}{6} \left(\frac{h}{R}\right)^4 - (43 - 40 \ln R) \left(\frac{h}{R}\right)^2 \right] \\
 B_3 &= R^6 \left[ \left(\frac{h}{R}\right)^3 (14 + 6 \ln R) - (24 + 55 \ln R) \left(\frac{h}{R}\right) \right] \\
 B_2 &= R^6 \left[ (31 + 28 \ln R) \left(\frac{h}{R}\right)^2 - 24 \ln R \right] \\
 B_1 &= R^6 \left[ (18 + 40 \ln R) \left(\frac{h}{R}\right) \right], & B_0 &= R^6 18 \ln R
 \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

$$\left. \begin{aligned}
 C_5 &= R^6 9 \left(\frac{h}{R}\right)^3, & C_4 &= R^6 40 \left(\frac{h}{R}\right)^2 \\
 C_3 &= R^6 \left[ -6 \left(\frac{h}{R}\right)^3 + 55 \left(\frac{h}{R}\right) \right] \\
 C_2 &= R^6 \left[ -28 \left(\frac{h}{R}\right)^2 + 24 \right] \\
 C_1 &= R^6 \left[ -40 \left(\frac{h}{R}\right) \right], & C_0 &= -18 R^6
 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

将  $\ln(R+h\cos\theta) = \ln R + \ln\left(1 + \frac{h}{R}\cos\theta\right)$  中的第二项展成幂级数, 则有

$$\begin{aligned}
 \ln(R+h\cos\theta) &= \ln R + \frac{h}{R}\cos\theta - \frac{h^2}{2R^2}\cos^2\theta + \frac{h^3}{3R^3}\cos^3\theta - \frac{h^4}{4R^4}\cos^4\theta \\
 &\quad + \frac{h^5}{5R^5}\cos^5\theta - \frac{h^6}{6R^6}\cos^6\theta + \frac{h^7}{7R^7}\cos^7\theta - \dots
 \end{aligned} \quad (3.20)$$

将上式代入(3.17)式, 化简整理最后得到

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\pi h^3 \cos^3\theta \cdot \sin\theta}{6\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial\theta}\right) + \frac{9\rho Q^2}{\mu\pi h^3 \cos^7\theta \sin^2\theta} \\
 &\quad \cdot [I_{12} \cos^{12}\theta + I_{11} \cos^{11}\theta + I_{10} \cos^{10}\theta + I_9 \cos^9\theta + I_8 \cos^8\theta + I_7 \cos^7\theta]
 \end{aligned} \quad (3.21)$$

这里

$$\left. \begin{aligned}
 I_{12} &= R^6 \frac{9}{7} \left(\frac{h}{R}\right)^{10}, & I_{11} &= R^6 \frac{59}{14} \left(\frac{h}{R}\right)^9 \\
 I_{10} &= R^6 \left[ \frac{314}{105} \left(\frac{h}{R}\right)^8 - \frac{6}{7} \left(\frac{h}{R}\right)^{10} \right] \\
 I_9 &= R^6 \left[ \frac{1}{84} \left(\frac{h}{R}\right)^7 - 3 \left(\frac{h}{R}\right)^9 \right] \\
 I_8 &= R^6 \left[ -\frac{236}{105} \left(\frac{h}{R}\right)^8 \right], & I_7 &= R^6 \left[ -\frac{1}{210} \left(\frac{h}{R}\right)^7 \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

从式(3.21)求出压力梯度

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \theta} = & -\frac{6\mu Q}{\pi h^3 \cos^3 \theta \sin \theta} + \frac{54\rho Q^2}{\mu \pi^2 h^9 \cos^{10} \theta \sin^8 \theta} \cdot [I_{12} \cos^{12} \theta + I_{11} \cos^{11} \theta \\ & + I_{10} \cos^{10} \theta + I_9 \cos^9 \theta + I_8 \cos^8 \theta + I_7 \cos^7 \theta] \end{aligned} \quad (3.23)$$

将上式对  $\theta$  进行积分, 再由边界条件(3.9)确定积分常数, 则得二级近似压力分布规律为

$$\begin{aligned} p - p_2 = & \frac{3\mu Q}{\pi h^3} [\operatorname{tg}^2 \theta_2 - \operatorname{tg}^2 \theta + 2 \ln(\operatorname{tg} \theta_2 / \operatorname{tg} \theta)] \\ & + \frac{27\rho Q^2}{140\pi^2 h^2 R^2} \left[ K(\theta_2) - K(\theta) + M \ln\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\theta_2}{2} / \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}\right) \right. \\ & \left. - N \ln(\operatorname{tg}^2 \theta_2 / \operatorname{tg}^2 \theta) \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} K(\theta_2) = & \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_2)^2}{\operatorname{tg}^2 \theta_2} \left[ \frac{2}{3} + \frac{h}{R} \left( 60 \frac{h^2}{R^2} + 104 + \frac{1888}{3} \operatorname{tg}^2 \theta_2 \right) \right. \\ & \left. \cdot \frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_2)^{3/2}} + \left( 170 \frac{h^2}{R^2} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_2} \right] \\ K(\theta) = & K(\theta_2) \Big|_{\theta_2 = \theta} \\ M = & \frac{788}{3} \left( \frac{h}{R} \right) + 150 \left( \frac{h}{R} \right)^3 \\ N = & \frac{1}{3} - 420 \left( \frac{h}{R} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

因而沿球面通道两端的压力降

$$\begin{aligned} \Delta p = p_1 - p_2 = & \frac{3\mu Q}{\pi h^3} [\operatorname{tg}^2 \theta_2 - \operatorname{tg}^2 \theta_1 + 2 \ln(\operatorname{tg} \theta_2 / \operatorname{tg} \theta_1)] + \frac{27\rho Q^2}{140\pi^2 h^2 R^2} \left[ K(\theta_2) \right. \\ & \left. - K(\theta_1) + M \ln\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\theta_2}{2} / \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_1}{2}\right) - N \ln(\operatorname{tg}^2 \theta_2 / \operatorname{tg}^2 \theta_1) \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

式中  $K(\theta_1)$  为  $K(\theta_2)$  当  $\theta_2 = \theta_1$  时的值.

今由(3.24)式可得

$$\begin{aligned} \frac{(p - p_2)h^4}{3\rho Q^2} = & \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{Re'} \operatorname{tg}^2 \theta_2 \left[ 1 - \xi^2 + 2 \ln \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta_2} \right] \\ & + \frac{9}{140} \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{h}{R} \right)^3 \cdot F(\theta, \theta_2, \frac{h}{R}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned} Re' = & \frac{\rho v_2 R}{\mu} \sin 2\theta_2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{R} \right) \cos \theta_2 \right] \\ \xi = & \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \theta_2} \\ F(\theta, \theta_2, \frac{h}{R}) = & K(\theta_2) - K(\theta) + M \ln\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\theta_2}{2} / \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}\right) - N \ln(\operatorname{tg}^2 \theta_2 / \operatorname{tg}^2 \theta) \end{aligned} \right.$$

当  $Re' = 3240, \theta_2 = 60^\circ, \frac{h}{R} = 0.02$  时, 在球面上压力分布规律, 绘于图 2 所示, 并与文献[1]中线性解进行比较, 有关数据列在表 1 中。

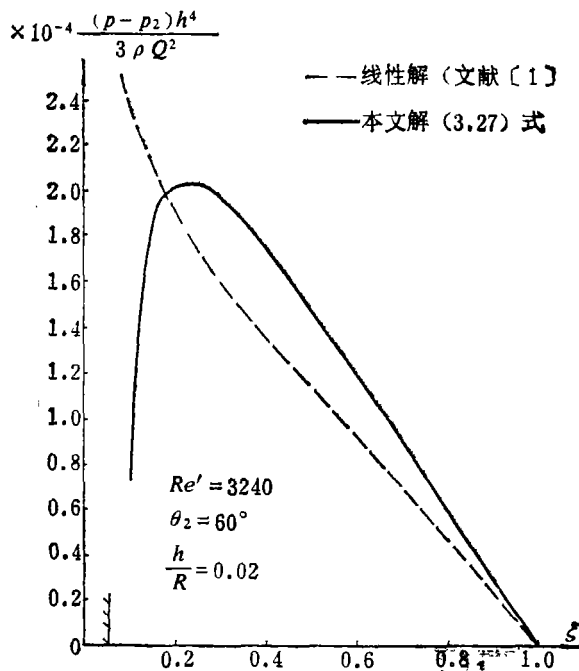


图 2

表 1

$\theta$	$\xi$	$Re' = 3240 \quad \theta_2 = 60^\circ \quad \frac{h}{R} = 0.02$	
		线 性 解	本文解(3.27)式
10°	0.10	$2.3689 \times 10^{-4}$	$0.7341 \times 10^{-4}$
15°	0.15	$2.1035 \times 10^{-4}$	$1.8501 \times 10^{-4}$
20°	0.21	$1.8729 \times 10^{-4}$	$2.0434 \times 10^{-4}$
25°	0.269	$1.6915 \times 10^{-4}$	$2.0245 \times 10^{-4}$
30°	0.333	$1.5219 \times 10^{-4}$	$1.9112 \times 10^{-4}$
35°	0.404	$1.3519 \times 10^{-4}$	$1.7451 \times 10^{-4}$
40°	0.484	$1.1722 \times 10^{-4}$	$1.5377 \times 10^{-4}$
45°	0.577	$0.9698 \times 10^{-4}$	$1.2834 \times 10^{-4}$
50°	0.688	$0.7280 \times 10^{-4}$	$0.9667 \times 10^{-4}$
55°	0.824	$0.4222 \times 10^{-4}$	$0.5598 \times 10^{-4}$
60°	1	0	0

当已知压力降  $\Delta p$  时, 直接用(3.26)式计算流量是不太方便的, 为此引入压力损失系数

$$\lambda_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v_1^2} \quad (3.28)$$



式中  $v_1$  是进口断面平均速度。

将(3.26)式代入(3.28)式, 并注意到  $Q = v_1 \pi h \cdot \sin 2\theta_1 \left( R + \frac{h}{2} \cos \theta_1 \right)$ , 化简整理得

$$\lambda_p = \frac{6}{Re} [\operatorname{tg}^2 \theta_2 - \operatorname{tg}^2 \theta_1 + 2 \ln(\operatorname{tg} \theta_2 / \operatorname{tg} \theta_1)] + \beta_s \quad (3.29)$$

式中进口修正雷诺数

$$Re = \frac{Qh}{\pi \nu \sin^2 2\theta_1 \left( R + \frac{h}{2} \cos \theta_1 \right)^2} = \frac{v_1 h}{\nu} \left( \frac{h}{\sin 2\theta_1 \left( R + \frac{h}{2} \cos \theta_1 \right)} \right) \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \beta_s = & \frac{54}{35} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{R} \right) \cos \theta_1 \right]^2 \frac{1}{4} \sin^2 2\theta_1 \left[ K(\theta_2) - K(\theta_1) \right. \\ & \left. + M \ln \left( \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_2}{2} / \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_1}{2} \right) - N \ln(\operatorname{tg}^2 \theta_2 / \operatorname{tg}^2 \theta_1) \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

$\beta_s$  称为流动惯性效应压力损失修正系数, 与进口修正雷诺数  $Re$  是无关系的, 它是考虑流动惯性以后所引起的。

由(3.29)式得压力降

$$\begin{aligned} \Delta p = & \left\{ \frac{6}{Re} [\operatorname{tg}^2 \theta_2 - \operatorname{tg}^2 \theta_1 + 2 \ln(\operatorname{tg} \theta_2 / \operatorname{tg} \theta_1)] \right\} \frac{1}{2} \rho v_1^2 \\ = & c_s \frac{3 \mu v_1 \sin 2\theta_1 \left( R + \frac{h}{2} \cos \theta_1 \right)}{h^2} [\operatorname{tg}^2 \theta_2 - \operatorname{tg}^2 \theta_1 + 2 \ln(\operatorname{tg} \theta_2 / \operatorname{tg} \theta_1)] \end{aligned} \quad (3.32)$$

由上式求出进口平均速度

$$v_1 = \frac{h^2 \Delta p}{c_s 3 \mu \sin 2\theta_1 \left( R + \frac{h}{2} \cos \theta_1 \right) [\operatorname{tg}^2 \theta_2 - \operatorname{tg}^2 \theta_1 + 2 \ln(\operatorname{tg} \theta_2 / \operatorname{tg} \theta_1)]} \quad (3.33)$$

因而流量表达式有

$$\begin{aligned} Q = & v_1 \pi h \sin 2\theta_1 \left( R + \frac{h}{2} \cos \theta_1 \right) \\ = & \frac{\pi h^3 \Delta p}{c_s 3 \mu [\operatorname{tg}^2 \theta_2 - \operatorname{tg}^2 \theta_1 + 2 \ln(\operatorname{tg} \theta_2 / \operatorname{tg} \theta_1)]} \end{aligned} \quad (3.34)$$

式中

$$\begin{aligned} c_s = & 1 + \beta_s / \left[ \frac{6}{Re} [\operatorname{tg}^2 \theta_2 - \operatorname{tg}^2 \theta_1 + 2 \ln(\operatorname{tg} \theta_2 / \operatorname{tg} \theta_1)] \right] \\ = & \lambda_p / \left[ \frac{6}{Re} [\operatorname{tg}^2 \theta_2 - \operatorname{tg}^2 \theta_1 + 2 \ln(\operatorname{tg} \theta_2 / \operatorname{tg} \theta_1)] \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

$c_s$  称为流动惯性效应流量修正系数, 它与压力损失系数  $\lambda_p$  是相关的。并可见, 由于系数  $\beta_s$  是负值, 所以系数  $c_s$  是小于 1 的, 因而流量比线性解时的将要增大。

现将  $\theta_1 = 1.5^\circ$ ,  $\frac{h}{R} = 0.01$ ,  $\frac{h}{R} = 0.001$ ,  $\frac{h}{R} = 0.0001$  时, 系数  $\beta_s$  与  $\theta_2$  变化关系曲线, 绘

于图 3 所示, 其数据列于表 2 中.

表 2.

$\beta_1$ $\theta_2$ $h/R$	$\theta_1=1.5^\circ$ ( $\text{tg } 1.5^\circ=0.0262$ )								
	$1.8^\circ$	$2.0^\circ$	$2.5^\circ$	$3.0^\circ$	$5.0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$
0.01	-2.0836	-2.2926	-2.6133	-2.7871	-3.0388	-3.1426	-3.1659	-3.1686	-3.1660
0.001	-0.6341	-0.8382	-1.1515	-1.3217	-1.5693	-1.6738	-1.8999	-1.7062	-1.7062
0.0001	-0.4888	-0.6929	-1.0063	-1.1765	-1.4243	-1.5291	-1.5556	-1.5622	-1.5622

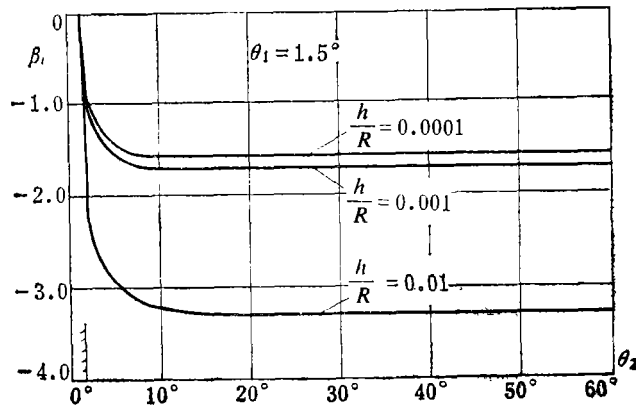


图 3

当  $\theta_1=1.5^\circ$ ,  $h/R=0.001$ ,  $Re=1$  时, 线性解与本文的解的  $\lambda_2 \sim \theta_2$  关系曲线, 绘于图 4 所示. 其有关数据列在表 3 中.

当  $\theta_1=1.5^\circ$ ,  $\theta_2=60^\circ$ ,  $h/R=0.001$  时, 绘出  $\lambda_2 \sim Re$  以及  $c_1 \sim Re$  关系曲线, 于图 5 所示. 有关数据列在表 4 中.

表 3

$\theta_2$	$\theta_1=1.5^\circ \quad \frac{h}{R}=0.001 \quad Re=1$											
	$1.6^\circ$	$1.8^\circ$	$2^\circ$	$2.5^\circ$	$3^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$
$\lambda_2$	0.4267	1.5568	2.7093	4.9906	7.0167	12.948	21.394	30.673	37.410	44.119	52.627	66.592

表 4

$Re$	$\theta_1=1.5^\circ \quad \theta_2=60^\circ \quad \frac{h}{R}=0.001$									
	1	1.5	2	5	10	15	20	25	30	40
$\lambda_2$	66.59	43.83	32.44	11.65	5.124	2.847	1.709	1.026	0.5705	0.0014
$c_1$	0.9750	0.9625	0.9500	0.8751	0.7502	0.6263	0.5004	0.3755	0.2506	0.0008

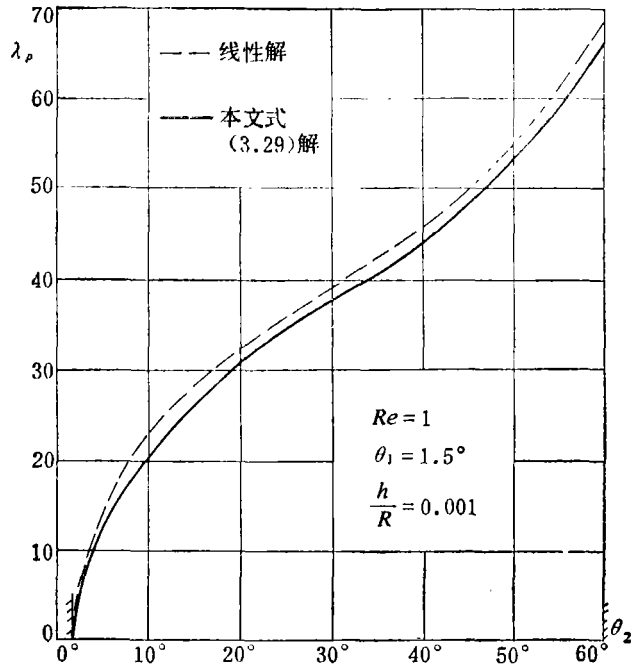


图 4

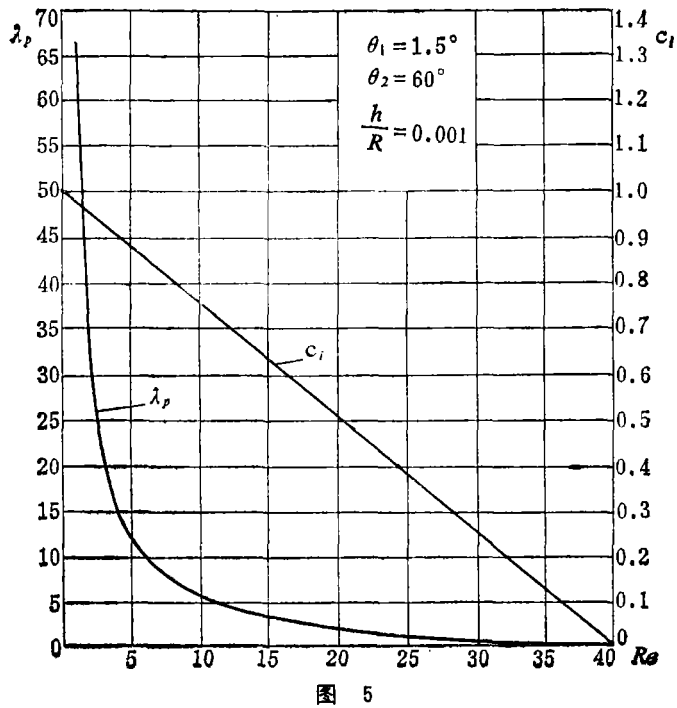


图 5

#### 四、间距型球面间流动的迭代近似解

在这种场合下，边界条件变为：

当  $r=R$  和  $r=R+h$  时， $u=0$

(4.1)

有关压力边界条件与跑合型的表示相同。

采用与跑合型流动相类似的计算方法, 经过繁杂的运算, 可以求出间距型球面间流动的迭代近似解。其二级近似压力分布表达式

$$p - p_2 = \frac{6\mu Q}{\pi h^3} \ln\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}}\right) + \frac{27}{140} \frac{\rho Q^2}{\pi^2 h^2 R^2} F\left(\frac{h}{R}\right) \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta_2} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta_1}\right) \quad (4.2)$$

两端的压力降

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{6\mu Q}{\pi h^3} \ln\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}}\right) + \frac{27}{140} \frac{\rho Q^2}{\pi^2 h^2 R^2} F\left(\frac{h}{R}\right) \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta_2} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta_1}\right) \quad (4.3)$$

式中

$$F\left(\frac{h}{R}\right) = 1 - \left(\frac{h}{R}\right) + \frac{5}{6} \left(\frac{h}{R}\right)^2 + \frac{25}{3} \left(\frac{h}{R}\right)^3 + \frac{805}{6} \left(\frac{h}{R}\right)^4 + \frac{140}{3} \left(\frac{h}{R}\right)^5 + \dots \quad (4.4)$$

其压力损失系数

$$\lambda_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v_1^2} = \frac{12}{Re} \ln\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}}\right) + \alpha_1 \quad (4.5)$$

式中进口修正雷诺数

$$Re = \frac{\rho v_1 h}{\mu} \left(\frac{h}{\sin \theta_1 (2R+h)}\right) \quad (4.6)$$

流动惯性效应压力损失修正系数

$$\alpha_1 = \frac{54}{35} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{R}\right) \right]^2 \sin^2 \theta_1 F\left(\frac{h}{R}\right) \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta_2} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta_1}\right) \quad (4.7)$$

而流量表达式

$$Q = v_1 \pi h \sin \theta_1 (2R+h) = \frac{\pi h^3 \Delta p}{c_1 6\mu \ln\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}}\right)} \quad (4.8)$$

这里流动惯性效应流量修正系数

$$c_1 = 1 + \alpha_1 / \frac{12}{Re} \ln\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}}\right) = \lambda_p / \frac{12}{Re} \ln\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}}\right) \quad (4.9)$$

## 五、讨 论

1. 两平行圆板间径向流动近似解, 是平行球面间流动迭代近似解的极限情况。只要当球半径  $R \rightarrow \infty$  时, 球变成了圆板, 参见图 6 所示。此时  $\theta$ ,  $\theta_1$  和  $\theta_2 \rightarrow 0$ ,  $\frac{h}{R} \rightarrow 0$ , 而且有:

$$\left. \begin{aligned} R \operatorname{tg} \theta \\ R \sin \theta \end{aligned} \right\} \rightarrow r, \quad \left. \begin{aligned} R \operatorname{tg} \theta_1 \\ R \sin \theta_1 \end{aligned} \right\} \rightarrow R_1, \quad \left. \begin{aligned} R \operatorname{tg} \theta_2 \\ R \sin \theta_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow R_2$$

$$R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \rightarrow \frac{r}{2}, \quad R \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \rightarrow \frac{R_1}{2}, \quad R \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} \rightarrow \frac{R_2}{2}$$

只要将前述有关表达式中的余弦和余切, 通过简单三角函数变换为正弦和正切的函数关系, 则不论是跑合型的, 还是间距型球面间流动, 其各表达式均可转化为平行圆板间径向流动的相应表达式. 其压力分布规律转化为

$$p - p_2 = \frac{6\mu Q}{\pi h^3} \ln \frac{R_2}{r} + \frac{27}{140} \frac{\rho Q}{\pi^2 h^2} \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

这式与文献[3,4]中所给出的圆板间径向层流流动的理论计算结果是完全一致的. 与实验数据[6]相比, 除了进口附近外, 是很相符合的.

2. 本文提供的压力降表达式(3.26), 在式中第一项是文献[1]中求得的线性解, 是由粘性摩擦引起的压力损失. 第二项揭示了流动惯性引起的压力损失部份. 这部份计算为负值, 它表示由于过流断面沿流程扩大, 速度减小, 因而压力引起增量.

3. 本文考虑流动惯性后得到的结果, 为计算球面间层流流动的压力分布、压力损失和流量提供了新的计算方法. 计算简便, 适于工程上应用.

4. 当间距值很小时或者是当进口修正雷诺数  $Re$  很小时, 如在润滑中的缓慢流动, 计算表明, 可变过流断面的球面间层流流动阻力是具有线性型的, 因在公式(3.29)中, 第一项计算值远远大于第二项计算值. 但是随着间距值增大或者是进口修正雷诺数  $Re$  较大时, 如在球阀开度较大情形中, 其流动阻力是呈现非线性型的, 即惯性影响占主导地位, 必须加以考虑.

本文提供的计算式虽未能直接与实验数据作比较, 但它间接地通过圆板情形而得到了检验.

5. 如果将文献[1]中线性解的速度规律作为一级近似代入方程(2.5)中的左端惯性项中, 然后求解此方程式, 所得到的结果与本文采用的方法所得到的二级近似解的结果是完全相同的.

注: 本文是中国科学院科学基金资助的研究课题部份理论内容.

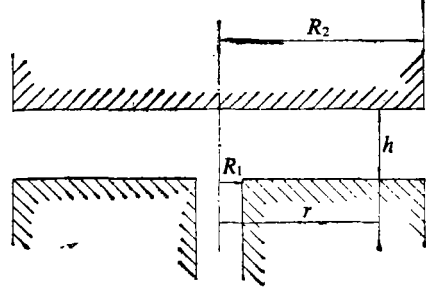


图 6

## 参 考 文 献

- [1] 川崎义人, 空气轴受に就て, 精密机械, Ⅷ 5,6,7 (昭和 22 年, 5, 6, 7), №.152, 153, 154, p39—44.
- [2] Goldstein, S., *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Oxford University Press, Amen House, London, Vol. I, (1938), 105.
- [3] Savage, S. D., Laminar radial flow between parallel plates, *Trans. of the ASME, J. Appl. Mech.*, 86, Ser. c-4 (Dec., 1964), 594—596.
- [4] 郭金基, 平行平板间径向气流的 Navier-Stokes 方程的近似解, 力学学报, 3(1980), 306—310.
- [5] 平克斯, O., B. 斯德因李希, (英), 《流体动力学润滑理论》, 机械工业出版社 (1980).
- [6] Moller, P. S., *Radial Flow without Swirl between Parallel Disks*, M. Sc. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Megill University, Montreal, Canada (1961).

## An Approximate Solution Considered Flow Inertia between Spherical Surfaces

Wang Zhi-qing Liu Zhen-bei

(Harbin Institute of Technology, Harbin)

### Abstract

In this paper, the analytical expressions of the pressure distribution, velocity distribution and volume flux of the flow between spherical surfaces are found by using the method of iterative approximate solution when the inertia terms in Navier-Stokes equation of the spherical coordinates are taken into consideration. Furthermore, using these expressions, we may directly obtain the corresponding analytical expressions of the radial laminar flow between parallel disks, which are fully unified with corresponding results presented from references [3,4].