应用数学和力学，第5卷第2期（1984年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

变厚度圆板大挠度理论的摄动法*

杨嘉实　谢志成

（清华大学，1982年12月11日收到）

摘　要

本文用对两个小参数的摄动法，对于轴对称圆薄板大挠度问题，在板厚按指数规律变化、载荷为均布的情况下，求出了三级摄动解．所得摄动解在特殊情况下与精确解的比较表明结果是较为理想的．

一、引　言

板的大挠度问题是个非线性问题，在变厚度板的情况下，精确解的寻求是比较困难的．钱伟长教授对等厚度板大挠度问题做过系统论述[1]并用摄动法成功地求解了这一问题[2][3]．叶开沅教授曾将摄动法用于变厚度板小挠度问题，也得到了理想的结果[5]．本文在导出了轴对称变厚度圆板大挠度理论的基本方程后，对板厚按指数规律变化的情况，用两个小参数的摄动法，选取一个表示挠度大小的参数 W_m 和一个表示板厚变化规律的参数 β，求出了均布载荷作用下变厚度圆板大挠度问题的三级摄动解，并对周边固支的情况进行了具体计算．由于这一问题目前尚无精确解，文中将所得摄动解退化到两个特殊情况，即等厚度板大挠度问题与变厚度板小挠度问题，与精确解进行了比较，结果是令人满意的．

二、轴对称变厚度圆板大挠度理论的基本方程

在图1所示的符号系统下，轴对称变厚度圆板大挠度理论的基本方程如下：

$$D\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\}=qr+\frac{d}{dr}\left(rN_r\frac{dw}{dr}\right)$$
$$-\left(r\frac{d^2w}{dr^2}+\mu\frac{dw}{dr}\right)\frac{d^2D}{dr^2}-\left[2r\frac{d^3w}{dr^3}+(2+\mu)\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right]\frac{dD}{dr} \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2N_r\right)\right]=-\frac{Eh}{r}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+\left[r\frac{dN_r}{dr}+(1-\mu)N_r\right]\frac{1}{h}\frac{dh}{dr} \tag{2.2}$$

式中 $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$，$h=h(r)$，$q=q(r)$．当$h$为常数时，方程(2.1)和(2.2)即为kármán 大

* 钱伟长推荐．

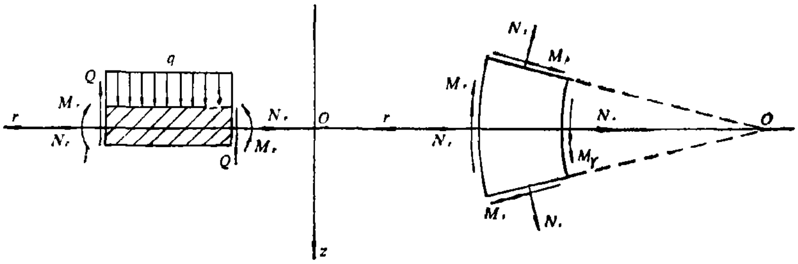

图1 内力符号及其正方向（位移与坐标轴同向为正）

挠度方程。

设h_0和λ是两个常数，当板厚变化规律为 $h=h_0\exp[\lambda r^2]$ 时，方程(2.1)和(2.2)变为：

$$\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\}=\frac{12(1-\mu^2)}{Eh_0^3}qr\exp[-3\lambda r^2]$$

$$+\frac{12(1-\mu^2)}{Eh_0^3}\exp[-3\lambda r^2]\frac{d}{dr}\left(rN_r\frac{dw}{dr}\right)-6\lambda\left[2r^2\frac{d^3w}{dr^3}\right.$$

$$\left.+(3+\mu)r\frac{d^2w}{dr^2}-(1-\mu)\frac{dw}{dr}\right]-36\lambda^2\left(r^3\frac{d^2w}{dr^2}+\mu r^2\frac{dw}{dr}\right) \tag{2.3}$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2N_r)\right]=-\frac{Eh_0}{2r}\exp[\lambda r^2]\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+2\lambda\left[r^2\frac{dN_r}{dr}+(1-\mu)rN_r\right] \tag{2.4}$$

$h=h_0\exp[\lambda r^2]$这一规律是Pichler所建议的[4]。在实际中某些变厚度板可以通过适当选取h_0和λ用这一规律来近似描述。函数 $y=\exp[\beta x^2]$的图形及其随β变化的情况(见图2)。

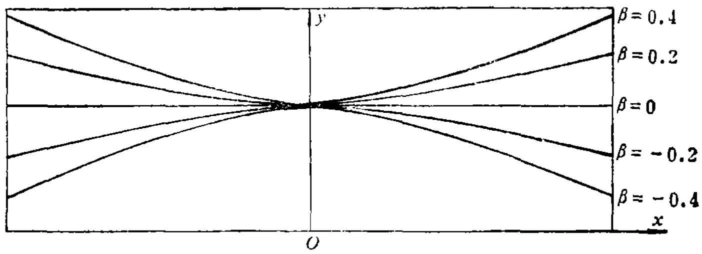

图2 $y=\exp[\beta x^2]$的图形

三、均布载荷变厚度圆板大挠度问题的摄动解

设a为圆板半径，在变量置换 $r=ax$，$w=h_0W$，$N_r=\frac{Eh_0^3}{a^2}N$ 及参数替换 $p=12(1-\mu^2)\cdot\frac{qa^4}{Eh_0^4}$，$\beta=\lambda a^2$之下，方程(2.3)和(2.4)变为下面的无量纲形式：

$$\frac{d}{dx}\left\{x\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dW}{dx}\right)\right]\right\}=px\exp[-3\beta x^2]$$

$$+12(1-\mu^2)\exp[-3\beta x^2]\frac{d}{dx}\left(xN\frac{dW}{dx}\right)-6\beta\left[2x^2\frac{d^3W}{dx^3}\right.$$

$$+(3+\mu)x\frac{d^2W}{dx^2}-(1-\mu)\frac{dW}{dx}\Big]-36\beta^2\left(x^3\frac{d^2W}{dx^2}+\mu x^2\frac{dW}{dx}\right) \tag{3.1}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x^2N)\right]=-\frac{1}{2x}\exp[\beta x^2]\left(\frac{dW}{dx}\right)^2+2\beta\left[x^2\frac{dN}{dx}+(1-\mu)xN\right] \tag{3.2}$$

下面用两个小参数的摄动法求解方程(3.1)和(3.2)，一个摄动参数取为 β，另一个摄动参数仿照钱伟长教授在等厚度板大挠度问题中的作法，取为中心挠度W_m。

在均布载荷作用下，视μ为已知量，则由方程(3.1)和(3.2)解出的W是自变量x和参量p，β的函数，即$W=W(x,\ p,\ \beta)$。对于圆板，最大挠度发生在$x=0$处，即$W_m=W(0,p,\beta)$，由此确定了p与W_m，β的关系$p=p(W_m,\beta)$。考虑到

$$p(-W_m,\beta)=-p(W_m,\beta)\text{及}p(0,\beta)=0$$

可设

$$p(W_m,\beta)=\alpha_0W_m+\alpha_1W_m\beta+\alpha_2W_m^3+\alpha_3W_m\beta^2+\cdots \tag{3.3}$$

类似地，对于$W(x,W_m,\beta)$，由于

$$W(x,-W_m,\beta)=-W(x,W_m,\beta)\text{及}W(x,0,\beta)=0$$

可设

$$W(x,W_m,\beta)=W_0(x)W_m+W_1(x)W_m\beta+W_2(x)W_m^3+W_3(x)W_m\beta^2+\cdots \tag{3.4}$$

对于$N(x,W_m,\beta)$，由于

$$N(x,-W_m,\beta)=N(x,W_m,\beta)\text{及}N(x,0,\beta)=0$$

可设

$$N(x,W_m,\beta)=N_0(x)W_m^2+N_1(x)W_m^2\beta+\cdots \tag{3.5}$$

其中$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为待定常数，$W_0(x)$，$W_1(x)$，$W_2(x)$，$W_3(x)$，$N_0(x)$，$N_1(x)$为待定函数。

在(3.4)式中代入$x=0$可得下面一组条件：

$$W_0(0)=1,\ W_1(0)=W_2(0)=W_3(0)=0 \tag{3.6}$$

将(3.3)，(3.4)，(3.5)三式代入(3.1)，(3.2)两式，展开因子$\exp[\beta x^2]$和$\exp[-3\beta x^2]$，收集等式两边关于W_m和β各次幂的系数到三次为止，可得下面一组方程：

$$LW_0=\alpha_0x \tag{3.7}$$

$$LW_1=\alpha_1x-3\alpha_0x^3-6\left[2x^2\frac{d^3W_0}{dx^3}+(3+\mu)x\frac{d^2W_0}{dx^2}-(1-\mu)\frac{dW_0}{dx}\right] \tag{3.8}$$

$$GN_0=-\frac{1}{2x}\left(\frac{dW_0}{dx}\right)^2 \tag{3.9}$$

$$LW_2=\alpha_2x+12(1-\mu^2)\frac{d}{dx}\left(xN_0\frac{dW_0}{dx}\right) \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}LW_3=\alpha_3x-3\alpha_1x^3+\frac{9}{2}\alpha_0x^5-6\left[2x^2\frac{d^3W_1}{dx^3}+(3+\mu)x\frac{d^2W_1}{dx^2}-(1-\mu)\frac{dW_1}{dx}\right]\\-36\left(x^3\frac{d^2W_0}{dx^2}+\mu x^2\frac{dW_0}{dx}\right)\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$GN_1=-\frac{1}{2x}\left[2\frac{dW_0}{dx}\frac{dW_1}{dx}+x^2\left(\frac{dW_0}{dx}\right)^2\right]+2\left[x^2\frac{dN_0}{dx}+(1-\mu)xN_0\right] \tag{3.12}$$

式中 $L=\frac{d}{dx}\left\{x\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\quad\right)\right]\right\}$, $G=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x^2\quad)\right]$

方程 (3.7) ～ (3.12) 也可由下面方式得到:

在方程 (3.1) 和 (3.2) 中先对 W_m 摄动得到一组小挠度变厚度板的方程，再对这组方程中的每一个方程对 β 摄动.

对于圆板，在板中心处有下列边界条件:

$$\left(\frac{1}{x}\frac{dW_0}{dx}\right)_{x=0},\left(\frac{1}{x}\frac{dW_1}{dx}\right)_{x=0},\left(\frac{1}{x}\frac{dW_2}{dx}\right)_{x=0},\left(\frac{1}{x}\frac{dW_3}{dx}\right)_{x=0} \text{有限} \tag{3.13}$$

$$N_0(0),\ N_1(0)\ \text{有限} \tag{3.14}$$

方程 (3.7) ～ (3.12) 在条件(3.6), (3.13), (3.14)下的解为:

$$W_0=\frac{a_0}{64}x^4+\frac{C_1}{4}x^2+1 \tag{3.15}$$

$$W_1=-\frac{21+3\mu}{1152}a_0x^6+\frac{a_1-6(1+\mu)C_1}{64}x^4+\frac{C_2}{2}x^2 \tag{3.16}$$

$$N_0=-\frac{a_0^2}{24576}x^6-\frac{a_0C_1}{768}x^4-\frac{C_1^2}{64}x^2+\frac{C_3}{2} \tag{3.17}$$

$$W_2=\frac{H_1}{1440}x^{12}+\frac{H_2}{800}x^{10}+\frac{H_3}{384}x^8+\frac{H_4}{144}x^6+\frac{H_5}{32}x^4+\frac{C_4}{4}x^2 \tag{3.18}$$

$$W_3=\frac{Q_1}{2048}x^8+\frac{Q_2}{576}x^6+\frac{Q_3}{64}x^4+\frac{C_5}{4}x^2 \tag{3.19}$$

$$N_1=\frac{M_1}{80}x^8+\frac{M_2}{48}x^6+\frac{M_3}{24}x^4+\frac{M_4}{8}x^2+\frac{C_6}{2} \tag{3.20}$$

式中 H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, Q_1, Q_2, Q_3, M_1, M_2, M_3, M_4 均为引入的记号，它们与十个需要由板边缘 ($x=1$) 处的边界条件确定的积分常数 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, 和待定常数 a_0, a_1, a_2, a_3 间有如下关系:

$$H_1=-\frac{1-\mu^2}{32768}a_0^3,\qquad H_2=-\frac{5}{4096}(1-\mu^2)a_0^2C_1$$

$$H_3=-\frac{5}{256}(1-\mu^2)a_0C_1^2,\qquad H_4=\frac{3}{32}(1-\mu^2)(4C_3a_0-C_1^3)$$

$$H_5=3(1-\mu^2)C_1C_3+\frac{a_2}{2},\qquad Q_1=\frac{a_0}{16}(9\mu^2+108\mu+531)$$

$$Q_2=-\frac{21+3\mu}{2}a_1+9(1+\mu)(3+\mu)C_1,\qquad Q_3=a_3-6(1+\mu)C_2$$

$$M_1=\frac{53+13\mu}{12288}a_0^2,\qquad M_2=-\frac{a_0a_1}{256}+\frac{13}{384}(1+\mu)a_0C_1$$

$$M_3=-\frac{1}{32}(a_0C_2+a_1C_1)+\frac{7\mu-1}{32}C_1^2,\qquad M_4=-\frac{C_1C_2}{4}+(1-\mu)C_3$$

四、周边固支时的计算结果及分析

利用周边固支的边界条件

$$W_0(1)=W_1(1)=W_2(1)=W_3(1)=0$$

$$\left(\frac{dW_0}{dx}\right)_{x=1}=\left(\frac{dW_1}{dx}\right)_{x=1}=\left(\frac{dW_2}{dx}\right)_{x=1}=\left(\frac{dW_3}{dx}\right)_{x=1}=0$$

$$\left[x\frac{dN_0}{dx}+(1-\mu)N_0\right]_{x=1}=\left[x\frac{dN_1}{dx}+(1-\mu)N_1\right]_{x=1}=0$$

可定出（3.15）～（3.20）式中的积分常数如下：

$$a_0=64,\qquad a_1=\frac{16}{3}(19-5\mu)$$

$$a_2=\frac{8}{45}(1+\mu)(173-73\mu),\qquad a_3=\frac{1}{9}(\mu^2-292\mu+715)$$

$$C_1=-8,\qquad C_2=-\frac{2}{3}(7+\mu)$$

$$C_3=\frac{5-3\mu}{3(1-\mu)},\qquad C_4=\frac{2}{45}(1+\mu)(29-19\mu)$$

$$C_5=-\frac{1}{72}(7\mu^2-28\mu+109),\qquad C_6=\frac{1}{720}(-69\mu^2+592\mu-219)$$

从而得到 p 与 W_m，β 的关系为：

$$p=64W_m+\frac{16}{3}(19-5\mu)W_m\beta+\frac{5}{48}(1+\mu)(173-73\mu)W_m^3$$
$$+\frac{1}{9}(\mu^2-292\mu+715)W_m\beta^2 \tag{4.1}$$

当 $\mu=0.3$ 时，（4.1）式成为：

$$\frac{a^4q}{h_0^4E}=5.861W_m+8.574W_m\beta+3.198W_m^3+6.385W_m\beta^2 \tag{4.2}$$

利用（4.2）式，对不同 β 值画出 $\frac{a^4q}{h_0^4E}$ 与 W_m 的关系如图 3 所示．由图中可见（4.2）式所反映的 β 对挠度的影响是合理的，并且 β 对挠度的影响也是比较大的．

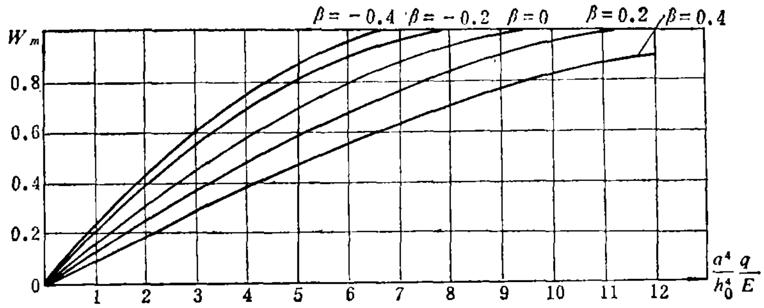

图 3

下面分析两个特殊情况．

1． $\beta=0$，即等厚度板的大挠度问题．这时（4.1）式成为

$$\frac{3}{16}(1-\mu^2)\frac{a^4q}{h_0^4E}=W_m+\frac{1}{360}(1+\mu)(173-73\mu)W_m^3 \tag{4.3}$$

这正是钱伟长教授的等厚度板大挠度问题的摄动解．

2． $W_m^n=0$ $(n\geqslant 2)$，即变厚度板小挠度问题，这时（4.1）式成为

$$6(1-\mu^2)\frac{a^3q}{h_0^3E}=32\left(\frac{h_0}{a}W_m\right)-7.778\left(\frac{h_0}{a}W_m\right)(-6\beta)+0.9684\left(\frac{h_0}{a}W_m\right)(-6\beta)^2 \tag{4.4}$$

（4.4）式与 Pichler 的精确解的比较结果如表 1 所示，由表中可见当 $-3<-6\beta<2$，即 $-\frac{1}{3}<\beta<\frac{1}{2}$ 时相对误差不超过 3%，这说明（4.4）式为较理想的摄动解．

表 1

-6β	-3	-2	-1	1	2
$\frac{h_0}{a}W_m$	0.0152	0.0192	0.0246	0.0398	0.0505
$6(1-\mu^2)\frac{a^3q}{h_0^3E}$（摄动解）	0.9735	0.9874	1.0024	1.0026	1.0261
$6(1-\mu^2)\frac{a^3q}{h_0^3E}$（精确解）	1	1	1	1	1

（4.1）式在两种特殊情况下的（4.3）和（4.4）式都具有较好的准确程度，从而可以指望（4.1）式本身也具有较好的准确程度．

五、结　语

用两个参数进行摄动，可以使摄动后的方程较原方程有较大简化，从而有可能处理较为复杂的问题．本文结果表明这一方法在变厚度圆板大挠度问题中是切实可行的．

本文的方法和结果不难推广和应用到板厚按其它规律变化，或载荷为其它形式，或环板的情况，它们的解可从方程（2.1）和（2.2）开始用类似的方法寻求．

对板厚按指数规律变化的圆板在均布载荷作用下的周边非固支情况，可直接应用(3.15)～(3.20)式根据具体边界条件确定积分常数，从而得到该问题的解．

如要提高精度，或要研究$|\beta|$较大的情况，继续计算 W_m 和 β 的高次幂项可能得到较好的结果，这一点在变厚度板小挠度问题的摄动法中已得到证实．

参 考 文 献

[1] 钱伟长，轴对称圆薄板在大挠度情形下的一般理论，钱伟长等编著《弹性圆薄板大挠度问题》，中国科学院 (1954).

[2] 钱伟长，圆板大挠度理论的摄动法，钱伟长等编著《弹性圆薄板大挠度 问 题》，中 国 科 学 院 (1954).

[3] Chien Wei-zang, Large deflection of a circular plate under uniform pressure, *Chinese Journal of Physics*, 7, 2(1947).

[4] 铁摩辛柯，S.，《板壳理论》，科学出版社 (1977).

[5] 钱伟长，《奇异摄动理论及其在力学中的应用》，科学出版社 (1981).

Perturbation Method in the Problem of Large Deflections of Circular Plates with Nonuniform Thickness

Yang Chia-shih　　Xie Zhi-cheng

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

In this paper the perturbation method about two parameters is applied to the problem of large deflections of a circular plate with exponentially varying thicknesses under uniform pressure. An asymtotic solution up to the third-order is derived. In comparison with the exact solutions in special cases, the asymtotic solution shows a precise accuracy.