

# 粘弹流体的定常等温纺丝

陈文芳 范 椿

(北京大学力学系) (中国科学院力学研究所)

(周光垌推荐, 1983年4月28日收到)

## 摘 要

本文考虑了粘弹流体的定常等温纺丝的流动问题, 采用的本构方程是修改的 Maxwell 模型. 得到了纺线方程的数值解和分析 (近似) 解, 上述二种方法所得到的结果符合得很好. 这就证明了我们采用的摄动法有较好的准确性.

## 一、引 言

聚合物熔体的熔化纺丝是纺织工业的主要过程之一. 这是一个包括材料、热传递和结晶的复杂过程. Ziabicki<sup>[1]</sup>已经考虑了这一问题的某些方面.

这里我们将考虑一个比较简单的问题, 这是为了弄清这个复杂过程所必须的第一步. 我们研究了粘弹流体的定常等温纺丝问题. Denn等人<sup>[2]</sup>已经考虑了这一问题, 但他们外加了一个不是十分好的边界条件. 鉴于此流动的工业重要性我们认为重新考虑这一问题是有价值的.

## 二、运 动 方 程

熔体流出喷丝孔后会胀大, 如图1所示. 我们选柱坐标系  $(r, \theta, z)$ , 坐标原点在纤维的中心, 此处纤维的横截面最大. 纤维的自由表面为  $r=R(z)$ . 纤维的卷绕点在  $z=L$  处.

根据文献[3]、[4], 我们可以作下列假设:

(1) 速度分布是:

$$v_{(r)} = v(r, z), \quad v_{(\theta)} = 0, \quad v_{(z)} = w(z) \quad (2.1)$$

从连续方程我们可以推出

$$v(r, z) = -\frac{r}{2} dw/dz \quad (2.2)$$

(2) 忽略表面张力, 空气阻力和惯性.

(3) 设有流体通过自由表面, 也就是:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.3)$$

这里  $\mathbf{n}$  是垂直于自由表面, 方向向外的单位向量,  $\mathbf{v}$  是速度.

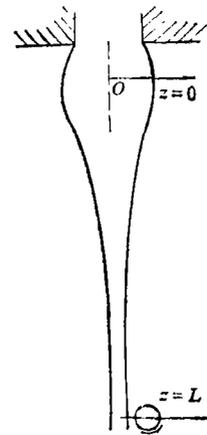


图1 纺丝简图

(4)  $R \ll L$ ,  $dR/dz$  是很小的, 它们的平方项和更高阶幂次项可以忽略.

通过纤维的横截面进行积分可以推出:

$$(a) \quad 2\pi \int_0^R r S_{(zz)} dr = F \quad (\text{常数}) \quad (2.4)$$

这里  $S_{(zz)}$  是轴向应力.

(b) 径向应力  $S_{(rr)}$  是零, 所以

$$p = T_{(rr)} \quad (2.5)$$

这里  $p$  是各向同性压力,  $T_{(rr)}$  是径向偏应力.

利用(2.5), (2.4)可写成:

$$2\pi \int_0^R r (T_{(zz)} - T_{(rr)}) dr = F \quad (2.6)$$

$$(c) \quad \pi R^2 w(z) = Q \quad (\text{常数}) \quad (2.7)$$

现在我们引入下列无量纲量:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{w(z)}{w(0)}, \quad T = \frac{\bar{T}_{(zz)} Q}{F w(0)}, \quad P = \frac{\bar{T}_{(rr)} Q}{F w(0)} \\ \xi &= z/L, \quad a = \pi R^2 / \pi [R(0)]^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

在一个量上面加一横表示它的面积平均, 方程(2.6)和(2.7)现在可写成:

$$T - P = u, \quad au = 1 \quad (2.9)$$

相应的边界条件是:

$$\text{在 } \xi = 0 \text{ 处, } u = 1 \quad (2.10)$$

### 三、本构方程

我们选用修改的 Maxwell 流体作为我们流体的本构方程. 这方程可写成:

$$T^{ij} + \lambda \frac{\delta T^{ij}}{\delta t} = 2\eta D^{ij} \quad (3.1)$$

这里  $T^{ij}$ ,  $D^{ij}$  分别是偏应力张量和应变率张量的逆变分量,  $\delta/\delta t$  是 Oldroyd 随动导数<sup>[4]</sup>,  $\lambda$  和  $\eta$  是材料函数, 它们是  $\mathbf{D}$  的第二不变量  $\mathbb{I}$  的函数. 我们选  $\mathbb{I}$  为:

$$\mathbb{I} = \sqrt{2 \operatorname{tr} \mathbf{D}^2} \quad (3.2)$$

由文献[5]可知, 在测粘流动和单轴拉伸流动中用方程(3.1)描绘某些聚合物溶液和熔体是相当好的. 如此我们可以指望(3.1)对于我们考虑的流动也是合适的. 我们选  $\lambda$  和  $\eta$  是:

$$\eta = \eta_0 |\mathbb{I}|^{n-1}, \quad \lambda = \lambda_0 |\mathbb{I}|^{n-1-m} \quad (3.3)$$

这里  $\eta_0$ ,  $\lambda_0$  是常数.

对于普通的 Maxwell 流体,  $n=1$ ,  $m=0$ , 对于幂律流体  $\lambda_0=0$ .

### 四、对于 Maxwell 流体的纺丝方程

将(3.3)代入(3.1), 通过纤维的横截面进行积分, 并假定  $T$  和  $P$  只是  $z$  的函数, 则

$$T + \alpha \left( \frac{du}{d\xi} \right)^{n-m-1} \left[ u \frac{dT}{d\xi} - 2T \frac{du}{d\xi} \right] = 2\epsilon \left( \frac{du}{d\xi} \right)^n \quad (4.1)$$

$$P + \alpha \left( \frac{du}{d\xi} \right)^{n-m-1} \left[ u \frac{dP}{d\xi} + P \frac{du}{d\xi} \right] = - \left( \frac{du}{d\xi} \right)^n \quad (4.2)$$

这里

$$\alpha = \lambda_0(3) \frac{n-m-1}{2} \left( \frac{w(0)}{L} \right)^{n-m}$$

$$\epsilon = \eta_0(3) \frac{n-1}{2} \left( \frac{w(0)}{L} \right)^n \frac{Q}{Fw(0)}$$

将 (2.9) 代入 (4.2) 并利用 (4.1), 则

$$T = \frac{u + 2\alpha u \left( \frac{du}{d\xi} \right)^{n-m} - 3 \frac{\epsilon}{\alpha} \left( \frac{du}{d\xi} \right)^n}{3\alpha \left( \frac{du}{d\xi} \right)^{n-m}} \quad (4.3)$$

将 (4.3) 式中的  $T$  代入 (4.1), 则

$$u \left( \frac{du}{d\xi} \right)^{m-n} + \alpha u - 3\epsilon \left( \frac{du}{d\xi} \right)^m + 3\alpha \frac{d^2u}{d\xi^2} \left[ \frac{m-n}{3} u^2 \left( \frac{du}{d\xi} \right)^{n-2} - \epsilon mu \left( \frac{du}{d\xi} \right)^{n-2} \right] - 2\alpha^2 u \left( \frac{du}{d\xi} \right)^{n-m} = 0 \quad (4.4)$$

从方程 (4.4) 可以看出: 对于一个牛顿流体 ( $\alpha=0$ ) 它是  $u$  的一阶方程, 所以只要一个边界条件 (条件 (2.10)) 就足以确定其解了. 但对于一个非牛顿流体 ( $\alpha \neq 0$ ) 它是二阶方程, 所以需要另加一个边界条件. Denn 等人<sup>[2]</sup>外加的边界条件  $T(0)=1$  与  $\alpha$  无关 (是一常数). 从 (4.3) 和 (4.4) 可以看出对于一个牛顿流体  $T(0)=2/3$ , 所以 Denn 等人<sup>[2]</sup>实际上已经假定了  $T(0)$  有一个跳跃 (不连续点), 但并没有给出一个物理上的解释来证明这一假定. 那么为什么会出现高阶导数呢? 这是由于我们所考虑的材料是有记忆的, 所以必须考虑它过去的历史. 如此需要考虑喷丝孔上面的流动情况, 但那是极端复杂的问题, 它包含从测粘流动到伸长流动的转变. 因此我们只能找一个近似方法去解这一问题.

## 五、摄 动 法

我们对  $\xi$  作变量替换如下:

$$x = \alpha^s \xi \quad (5.1)$$

利用 (5.1),  $T$  可写作

$$T = \frac{u + 2u \left( \frac{du}{dx} \right)^{n-m} \alpha^{1+s(n-m)} - 3\epsilon \alpha^{ns} \left( \frac{du}{dx} \right)^n}{3\alpha^{1+s(n-m)} \left( \frac{du}{dx} \right)^{n-m}} \quad (5.2)$$

作为一阶近似, 我们选择方程 (5.2) 右边的分子只保留前面二项, 即选  $s$  如下:

$$s(n-m) = -1 \quad (5.3)$$

利用 (5.3),  $T$  可写作

$$T = \frac{u + 2u \left( \frac{du}{dx} \right)^{n-m} - 3\gamma \left( \frac{du}{dx} \right)^n}{3 \left( \frac{du}{dx} \right)^{n-m}} \quad (5.4)$$

这里  $\nu (= \epsilon \alpha^{n/(m-n)})$  假定是很小的.

现在将  $T$  和  $u$  展成  $\nu$  的幂级数如下:

$$T = T_0 + \nu T_1 + \dots, \quad u = u_0 + \nu u_1 + \dots \quad (5.5)$$

将 (5.5) 代入 (5.4) 和 (4.4), 并比较  $\nu$  的幂, 则:

$$T_0 = \frac{2}{3} u_0 + \frac{u_0}{3} \left( \frac{du_0}{dx} \right)^{m-n} \quad (5.6)$$

$$u_0 \left[ \left( \frac{du_0}{dx} \right)^{m-n} + 1 + (m-n) u_0 \frac{d^2 u_0}{dx^2} \left( \frac{du_0}{dx} \right)^{-2} - 2 \left( \frac{du_0}{dx} \right)^{n-m} \right] = 0 \quad (5.7)$$

方程 (5.7) 和边界条件 (2.10) 的一个解是:

$$u_0 = 1 + x \quad (5.8)$$

将 (5.8) 代入 (5.6) 可得:

$$T_0 = 1 + x \quad (5.9)$$

对于  $\nu$  的一阶项有下列等式:

$$T_1 = u_1 + \frac{m-n}{3} (1+x) \frac{du_1}{dx} - 1 \quad (5.10)$$

$$(1+x)^2 \frac{d^2 u_1}{dx^2} + 3(1+x) \frac{du_1}{dx} = \frac{3}{m-n} \quad (5.11)$$

方程 (5.11) 满足边界条件 (2.10) 的解是:

$$u_1 = \frac{3}{2(m-n)} \ln(1+x) \quad (5.12)$$

类似地我们可以得到二阶项. 如此:

$$\begin{aligned} u = & 1 + \xi \alpha^{\frac{1}{m-n}} + \frac{3\nu}{2(m-n)} \ln \left( 1 + \xi \alpha^{\frac{1}{m-n}} \right) - \frac{9(n-m+1)\nu^2}{8(m-n)^2} \\ & + \frac{9\nu^2}{4(1 + \alpha^{\frac{1}{m-n}} \xi)} \left[ \frac{n-m+1}{2} + \ln \left( 1 + \alpha^{\frac{1}{m-n}} \xi \right) \right] + O(\nu^3) \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} T = & 1 + \xi \alpha^{\frac{1}{m-n}} + \nu \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2(m-n)} \ln \left( 1 + \xi \alpha^{\frac{1}{m-n}} \right) \right] \\ & + \nu^2 \left[ \frac{1}{1 + \alpha^{\frac{1}{m-n}} \xi} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{3m}{2(m-n)} + \left( \frac{3}{2(m-n)} \right)^2 \left[ \frac{n-m+1}{2} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \ln \left( 1 + \alpha^{\frac{1}{m-n}} \xi \right) \right] \right\} - \frac{9(n-m+1)}{8(m-n)^2} \right] + O(\nu^3) \end{aligned} \quad (5.14)$$

从 (5.14) 可得:

$$T(0) = 1 - \frac{\nu}{2} + \nu^2 \left[ \frac{3}{4} - \frac{3m}{2(m-n)} \right] + O(\nu^3) \quad (5.15)$$

如此, Denn 等人<sup>(2)</sup>外加的边条界件可被认为是一阶近似.

滞留时间  $t$  的定义是:

$$t = \int_0^{\xi} \frac{1}{u(\beta)} d\beta \quad (5.16)$$

将 (5.13) 代入 (5.14) 可得:

$$\begin{aligned}
 t = & \alpha^{\frac{1}{n-m}} \left\{ \ln \left( 1 + \alpha^{\frac{1}{m-n}} \xi \right) - \frac{3\gamma}{2(m-n)} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \alpha^{\frac{1}{m-n}} \xi} \left[ 1 + \ln \left( 1 + \alpha^{\frac{1}{m-n}} \xi \right) \right] \right\} \right\} \\
 & + \frac{9\gamma^2}{16(m-n)} \left\{ n-m + \frac{1}{2} - \frac{2(n-m+1)}{1 + \alpha^{\frac{1}{m-n}} \xi} + \left( \frac{1}{1 + \alpha^{\frac{1}{m-n}} \xi} \right)^2 (n-m \right. \\
 & \left. + \frac{3}{2} + \ln \left( 1 + \alpha^{\frac{1}{m-n}} \xi \right) - \left[ \ln \left( 1 + \alpha^{\frac{1}{m-n}} \xi \right) \right]^2 \right\} \right\} + O(\gamma^3) \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

## 六、数值计算

我们用 Runge-Kutta 法对方程 (4.4) 进行数值计算。如前面所说：只用一个边界条件 (2.10) 来决定方程 (4.4) 的解是不够的。需要再外加一个边界条件。和 Denn 等人<sup>[2]</sup>一样，我们假定  $T(0)$  是已知的。从 (4.3) 式可知，上述假定等价于假定：在  $\xi=0$  处， $du/d\xi$  是已知的。但与 Denn 等人<sup>[2]</sup>不同，我们假定  $T(0)$  是一  $\gamma$  的连续函数而不是一个常数。

为了说明起见我们选了  $m=0.53$ ,  $n=0.93$ ，如此，我们的模型在测粘流中将预示出一个几乎是常数的粘度以及第一法向应力差几乎线性比例于剪切速率。

在表 1 和 2 中给出了在不同  $\gamma$  值的情况下， $u$ ,  $T$ ,  $t$  的数值计算值及分析计算值。

## 七、结 论

从表 1 和 2 可以看出：如果适当地选取  $T(0)$  值，则数值计算值和分析计算值是很一致的。这就证实了我们的摄动法有较好的准确性。

从表 2 可以看出： $T(0)$  值的选择在小  $\xi$  处影响  $u$  和  $T$  的值，在大  $\xi$  处对  $u$  和  $T$  的值没

$u$ ,  $T$ ,  $t$  的数值计算值及分析计算值

表 1

$\alpha=0.33$   $n=0.93$   $m=0.53$   $\epsilon\alpha^{n/(m-n)}=0.08777$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u$ 数值	1	2.313	3.747	5.232	6.744	8.273	9.812	11.36	12.92	14.48	16.05
$u$ 分析	1	2.277	3.704	5.187	6.699	8.226	9.770	11.32	12.89	14.44	16.00
$T$ 数值	0.9651	2.276	3.707	5.191	6.703	8.232	9.773	11.32	12.88	14.44	16.00
$T$ 分析	0.9772	2.242	3.665	5.147	6.658	8.187	9.727	11.28	12.83	14.39	15.96
$t$ 数值	0	0.0645	0.0982	0.1207	0.1375	0.1509	0.1620	0.1714	0.1797	0.1870	0.1936
$t$ 分析	0	0.0650	0.0989	0.1215	0.1383	0.1517	0.1628	0.1722	0.1805	0.1878	0.1944

表 2

$\alpha=0.33$   $n=0.93$   $m=0.53$   $\epsilon\alpha^{n/(m-n)}=0.2194$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u$ 数值	1	2.069	3.282	4.593	5.967	7.323	8.828	10.30	11.78	13.28	14.78
$u$ 分析	1	1.770	2.887	4.163	5.521	6.929	8.371	9.836	11.32	12.82	14.32
$u$ 数值	1	1.829	2.944	4.208	5.554	6.954	8.388	9.847	11.33	12.82	14.32
$T$ 数值	0.8976	1.983	3.193	4.501	5.872	7.286	8.730	10.19	11.68	13.18	14.68
$T$ 分析	1.022	1.711	2.809	4.076	5.429	6.834	8.273	9.737	11.22	12.71	14.22
$T$ 数值	1.022	1.782	2.873	4.125	5.466	6.861	8.292	9.750	11.23	12.72	14.22
$t$ 数值	0	0.0686	0.1068	0.1325	0.1515	0.1666	0.1790	0.1894	0.1985	0.2065	0.2136
$t$ 分析	0	0.0736	0.1146	0.1415	0.1613	0.1767	0.1894	0.2001	0.2093	0.2175	0.2247
$t$ 数值	0	0.0746	0.1176	0.1459	0.1666	0.1826	0.1957	0.2067	0.2162	0.2245	0.2319

有多少影响。

从方程 (5.8) 可以看出在  $\gamma=0$  的情况, 速度剖面是线性的, 这和实验数据相一致。

可以把小  $\gamma$  解释为: 它相当于大  $F$ , 也就是快速纺丝。今日之生产正是在快速纺丝的条件下进行的。

### 参 考 文 献

- [1] Ziabicki, A., *Fundamentals of Fibre Formation*, Wiley-Interscience, New York (1976).
- [2] Denn, M. M., C. J. S. Petrie and P. Avenas, *A. I. Ch. E. Journal*, 21, (1975), 791.
- [3] Pearson, J. R. A. and M. A. Matovich, *Ind. Eng. Chem. Fund.*, 8, (1969), 605.
- [4] 陈文芳, 《非牛顿流体力学》, 科学出版社 (即将出版)。
- [5] Agrawal, R. K., W. K. Lee, J. M. Lornston, C. I. Richardson, K. F. Wissbrun and A. B. Metzner, *Trans. Soc. Rheol.*, 21, (1977), 355.

## The Steady Isothermal Spinning of Viscoelastic Fluids

C. F. Chan Man Fong

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Fan Chun

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

### Abstract

The flow problem given in the title has been considered for a modified Maxwell fluid. The resulting spin line equation is solved both numerically and analytically. It has been found that the results obtained by the above two methods are in agreement. This confirms the accuracy of the perturbation method which we adopted.