

# 关于木星大红斑风场的动力学结构

岳曾元 张 彬

(北京大学地球物理系, 1983年5月3日收到)

## 摘 要

本文在地转近似下求出了木星大红斑和白卵形区 Oval BC 风场的二维动力学结构, 计算结果与观测的符合是令人满意的。于是, 对于观测到的沿同一水平流线的速度弥散给出了一个动力学解释, 造成这种速度弥散的主要物理机制是: 相邻二椭圆流线之间的距离是变化的, 导致法向压力梯度沿椭圆流线变化, 从而水平速度必须相应变化以保证科氏力与法向压力梯度间的近似平衡。本文中考虑了另一个较为次要的因素, 即科氏力参数  $f$  随纬度的变化。本文并进一步计算了大红斑和白卵形 Oval BC 的涡量分布。

## 一、引 言

木星是太阳系中最大的一颗行星, 其质量几乎等于所有其它行星质量总和的 2.5 倍。这使得它在太阳系九大行星中占有特殊的地位。木星有厚厚的大气层, 那里的风暴和大气环流方式与地球大气有许多相似之处, 但规模之大却是后者无法相比的。在木星大气运动形态中, 最引人注目的一个特征就是大红斑。自从 1665 年被卡西尼 (G. D. Cassini) 发现以来, 它至今至少已存在了三百多年<sup>[1]</sup>。对大红斑的连续观测也已有一百多年的历史<sup>[2]</sup>。长期以来, 对大红斑的地面观测只限于它的颜色、形状以及位置的变化。自从“先驱者”10号 and 11号 (1973年) 以及“旅行者”I号 and II号 (1979年) 飞过木星附近并取得了近距离观测资料<sup>[2, 3]</sup>之后, 才使得对大红斑细微结构的分析成为可能。最近, Mitchell 等<sup>[4]</sup>根据“旅行者”I号对大红斑可见小云块的观测资料, 将这些小云块作为水平流场的示踪物 (tracers), 画出了速度场水平分量的矢量图。他们并用等偏心率的同心椭圆族来表示大红斑的水平流线族, 并进一步假定水平速度  $V_T$  只是椭圆半主轴  $a$  的函数 (即略去沿流线的变化), 并用四次多项式

$$V_T(a) = C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + C_4 a^4 \quad (1.1)$$

来作为  $V_T(a)$  的近似表达式, 其中系数  $C_i$  根据观测数据用最小二乘法而定出。同样的作法也被用来描绘木星上的一个白卵形区 Oval BC。这样所得出的大红斑和 Oval BC 的  $C_i$  之值列于表 1。用表 1 中的  $C_i$  之值代入 (1.1) 式, 所得出的大红斑和白卵形区 Oval BC 的  $V_T(a)$  曲线如图 1 和图 2 所示。图 1 和图 2 中的圆点则是直接由可见小云块的观测而得到的速度分布。由这两个图可见, 沿同一椭圆 ( $a = \text{const.}$ ) 速度的弥散是很明显的, 对于大红斑则尤为显著。本文目的便是对观测到的这种速度弥散提供一个动力学解释。换句话说, 我们

表 1 用最小二乘法确定的大红斑和Oval BC的 $V_T(a)$ 表达式中的系数 $C_i$ 之值  
其中 $V_T$ 单位为米/秒,  $a$ 单位为  $10^6$  米 (取自文献[4])

	大 红 斑	白卵形区 Oval BC
$C_1$	9.664	8.334
$C_2$	-7.959	4.075
$C_3$	1.665	0.024
$C_4$	-0.0868	-0.046

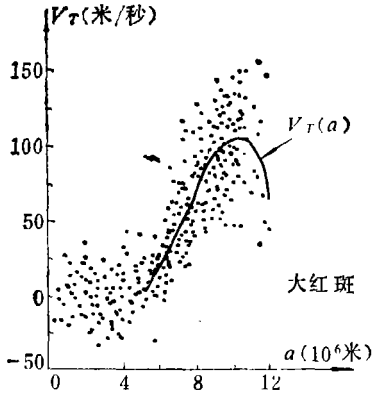


图 1 观测到的大红斑内切向速度( $V_T$ )及文献[4]中的函数 $V_T(a)$

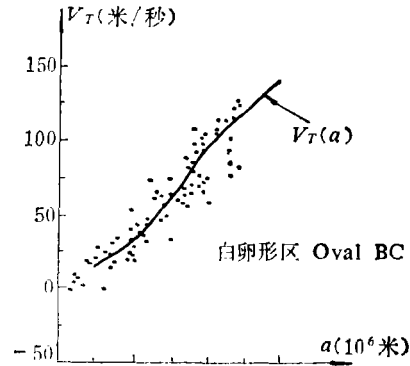


图 2 观测到的白卵形区 Oval BC 内的切向速度以及文献[4]中的函数 $V_T(a)$

将求得水平速度  $V_T$  的某种二元分布

$$V_T = V_T(a, \theta_*) \tag{1.2}$$

来代替文献[4]中的一元函数  $V_T(a)$ , 从而更准确地描述大红斑和 Oval BC 的水平速度场。在(1.2)式中,  $\theta_*$  为椭圆的偏近点角 (eccentric anomaly), 这里, 为了简单起见, 我们和文献[4]一样, 假定水平流线族为同心、等偏心率椭圆族。偏近点角  $\theta_*$  的定义见图 3。采用偏近点角  $\theta_*$  代替  $\theta = \text{tg}^{-1}y/x$  作为参数有两点好处: 第一, 椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.3}$$

可简单地表为参数方程

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \theta_* \\ y &= b \sin \theta_* \end{aligned} \right\} \tag{1.4}$$

第二,  $V_T$  对于  $\theta_*$  的平均值

$$\bar{V}_T(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_T(a, \theta_*) d\theta_* \tag{1.5}$$

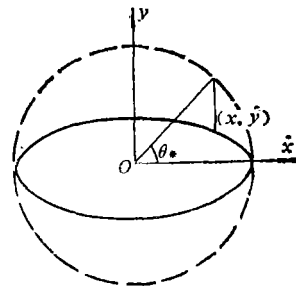


图 3 偏近点角  $\theta_*$  的几何意义

具有很清楚的物理意义 (详细的讨论见附录 A)。

## 二、风场结构的动力学分析

在略去粘性的情形下, 木星大气的运动方程可表为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} \quad (2.1)$$

其中  $\mathbf{V}$  为木星参考系中大气的相对速度,  $\rho$  为密度,  $p$  为压力,  $\boldsymbol{\Omega}$  为木星角速度,  $\mathbf{g}$  为木星表面的重力加速度. 如以下标  $h$  表任一向量的水平分量, 则(2.1)式的水平投影为

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_h = -\frac{1}{\rho}(\nabla p)_h - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})_h \quad (2.2)$$

对于大红斑, 有<sup>[4]</sup>

$$V \sim 10^2 \text{米/秒}, \quad a \sim 10^7 \text{米}$$

因此,

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_h \sim V^2/a \sim 10^{-3} \text{米/秒}^2 \quad (2.3)$$

另一方面, 对于科氏力的水平分量, 则有

$$|2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})_h| \sim |f|V \quad (2.4)$$

其中  $f$  为科氏力参数

$$|f| = 2\Omega |\sin\phi| \quad (2.5)$$

取大红斑中心纬度  $\phi_0 = -22.5^\circ$  估算, 有<sup>[4]</sup>

$$|f| \sim 13.5 \times 10^{-5} / \text{秒} \quad (2.6)$$

于是

$$|2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})_h| \sim 10^{-2} \text{米/秒}^2 \quad (2.7)$$

比较(2.3)和(2.7)式, 有

$$|(d\mathbf{V}/dt)_h| \ll |2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})_h| \quad (2.8)$$

于是, 在初级近似下, 我们可略去方程(2.2)中的加速度项, 而得到

$$\frac{1}{\rho}(\nabla p)_h - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})_h = 0 \quad (2.9)$$

在大红斑中心区域, 水平速度小且呈现不规则性<sup>[4]</sup>. 因此, 我们感兴趣的、呈现规则性椭圆水平流线的区域是不太靠近中心的区域. 在这里, 可以认为科氏力的水平分量主要由  $\boldsymbol{\Omega}$  的铅直分量  $\Omega_z$  与水平分速度  $\mathbf{V}_T$  所贡献<sup>1)</sup>

$$-2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})_h \approx -2\Omega_z \times \mathbf{V}_T \quad (2.10)$$

于是在不太靠近中心的区域, 近似有

$$-\frac{1}{\rho}(\nabla p)_h - 2\Omega_z \times \mathbf{V}_T = 0 \quad (2.11)$$

用水平流线上的单位向量

$$\mathbf{s}^\circ = \mathbf{V}_T / |\mathbf{V}_T| \quad (2.12)$$

点乘(2.11)式, 得到

$$\partial p / \partial s = 0 \quad (2.13)$$

也就是说, 在我们所讨论的初级近似下, 沿水平流线近似有

$$p = \text{const.} \quad (\text{沿水平流线}) \quad (2.14)$$

根据观测, 我们也和文献[4]一样, 用同心等偏心率椭圆族来近似代表水平流线族, 即设水

1) 这一近似以及前面略去加速度项  $\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_h$  的近似均可放宽, 见本文第四节.

平流线族为

$$x^2 + \lambda y^2 = a^2 \quad (2.15)$$

其中  $\lambda > 1$ , 它与偏心率  $e$  的关系为

$$\lambda = \frac{1}{1 - e^2} \quad (2.16)$$

而椭圆半副轴  $b$  为

$$b = a / \sqrt{\lambda} \quad (2.17)$$

$x$  指向东,  $y$  指向北, 于是  $a$  可作为水平流线的标号. 于是(2.14)式可更恰当地写为

$$p = p(a) \quad (2.18)$$

将方程(2.11)投影于水平流线族的水平法线  $n$  方向, 得

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + fV_{\tau} = 0 \quad (2.19)$$

其中

$$f = 2\Omega_z = 2\Omega \sin\phi < 0 \quad (2.20)$$

其中  $\phi$  为所考虑点的纬度. 注意大红斑中心处于南纬  $22.5^\circ$ , 而最北和最南两点的  $\phi$  值可有  $8^\circ$  之差, 因此在同一水平流线上  $f$  值的变化是应当考虑的.

由(2.18)式可知,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial p}{\partial n} \right| &= |(\nabla p)_n| = \left| \frac{dp}{da^2} \cdot \nabla a^2 \right| = \left| \frac{dp}{da^2} (2xi + 2\lambda yj) \right| = 2 \left| \frac{dp}{da^2} \right| (x^2 + \lambda^2 y^2)^{1/2} \\ &= 2 \left| \frac{dp}{da^2} \right| (a^2 \cos^2 \theta_* + \lambda^2 b^2 \sin^2 \theta_*)^{1/2} = 2a \left| \frac{dp}{da^2} \right| (\cos^2 \theta_* + \lambda \sin^2 \theta_*)^{1/2} \\ &= \left| \frac{dp}{da} \right| \eta(\theta_*) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\eta(\theta_*) = (\cos^2 \theta_* + \lambda \sin^2 \theta_*)^{1/2} = [1 + (\lambda - 1) \sin^2 \theta_*]^{1/2} \quad (2.22)$$

另一方面, 我们可将椭圆水平流线上任一点  $(x, y)$  的纬度  $\phi$  表为

$$\phi = \phi_0 + \frac{y}{R} \quad (2.23)$$

其中  $\phi_0$  为大红斑中心  $(x=y=0)$  处的纬度,  $R$  为木星半径. 于是

$$f = 2\Omega \sin\left(\phi_0 + \frac{y}{R}\right) \approx 2\Omega \left(\sin\phi_0 + \frac{y}{R} \cos\phi_0\right) = f_0 \left(1 + \frac{y}{R \operatorname{tg}\phi_0}\right) \quad (2.24)$$

其中

$$f_0 = 2\Omega \sin\phi_0 \quad (2.25)$$

为大红斑中心的科氏力参数. 并注意(2.24)式中  $\operatorname{tg}\phi_0$  为负值. 如用  $\theta_*$  表示, 并利用方程(1.4)和(2.17), 则有

$$f = f_0 \left(1 - \frac{a \sin\theta_*}{R \sqrt{\lambda} |\operatorname{tg}\phi_0|}\right) \quad (2.26)$$

将(2.21)和(2.26)式代入(2.19), 我们得到

$$V_{\tau} = \frac{1}{\rho |f|} \left| \frac{\partial p}{\partial n} \right| = \frac{\left| \frac{dp}{da} \right| \eta(\theta_*)}{\rho |f_0| \left(1 - \frac{a \sin\theta_*}{R \sqrt{\lambda} |\operatorname{tg}\phi_0|}\right)} \quad (2.27)$$

在我们的精确度下, 可进一步作近似,

$$\left(1 - \frac{a \sin \theta_*}{R \sqrt{\lambda} |\operatorname{tg} \phi_0|}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{a \sin \theta_*}{R \sqrt{\lambda} |\operatorname{tg} \phi_0|} \quad (2.28)$$

这是因为  $\frac{a}{R \sqrt{\lambda} |\operatorname{tg} \phi_0|}$  同 1 相比是个小参数. 于是便有

$$V_T = (\rho |f_0|)^{-1} \left| \frac{dp}{da} \right| \eta(\theta_*) \left(1 + \frac{a \sin \theta_*}{R \sqrt{\lambda} |\operatorname{tg} \phi_0|}\right) \quad (2.29)$$

在略去  $p$  沿水平流线变化的精度下 (见(2.14)或(2.18)式), 我们也有理由略去  $\rho$  沿水平流线的变化, 再注意到

$$\eta(0) = 1 \quad (2.30)$$

我们便可将(2.29)式改写成

$$V_T(a, \theta_*) = V_T(a, 0) \eta(\theta_*) \left(1 + \frac{a \sin \theta_*}{R \sqrt{\lambda} |\operatorname{tg} \phi_0|}\right) \quad (2.31)$$

其中  $\eta(\theta_*)$  由(2.22)式给出. 下面我们来求  $V_T$  沿水平流线按  $\theta_*$  的平均值

$$\bar{V}_T(a) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_T(a, \theta_*) d\theta_* \quad (2.32)$$

由  $V_T(a, \theta_*)$  关于  $\theta_*$  以  $2\pi$  为周期, 故(2.32)中的积分限可改为从  $-\pi$  到  $\pi$ , 于是易知(2.31)式中含  $\sin \theta_*$  一项对积分无贡献, 而有

$$\begin{aligned} \bar{V}_T(a) &= \frac{V_T(a, 0)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \eta(\theta_*) d\theta_* = \frac{V_T(a, 0)}{\pi} \int_0^{\pi} \eta(\theta_*) d\theta_* \\ &= \frac{V_T(a, 0)}{\pi} \int_0^{\pi} [1 + (\lambda - 1) \sin^2 \theta_*]^{1/2} d\theta_* \end{aligned} \quad (2.33)$$

记

$$F(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [1 + (\lambda - 1) \sin^2 \theta_*]^{1/2} d\theta_* \quad (2.34)$$

则有

$$\bar{V}_T(a) = V_T(a, 0) F(\lambda) \quad (2.35)$$

于是, (2.31)式可以改写为

$$V_T(a, \theta_*) = \frac{1}{F(\lambda)} \bar{V}_T(a) \eta(\theta_*) \left(1 + \frac{a \sin \theta_*}{R \sqrt{\lambda} |\operatorname{tg} \phi_0|}\right) \quad (2.36)$$

对于  $\bar{V}_T(a)$ , 我们采用文[4]中的公式<sup>1)</sup>,

$$\bar{V}_T(a) = \sum_{i=1}^4 C_i a^i \quad (2.37)$$

其中  $C_i$  之值由表 1 给出. 至于函数  $F(\lambda)$ , 我们容易将它用完全椭圆积分表出. 事实上,

$$F(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \int_0^{\pi} \left[1 - \frac{\lambda-1}{\lambda} \cos^2 \theta_*\right]^{1/2} d\theta_* \quad (2.38)$$

令  $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta_*$ , 得到

1) 这样作恰合理且简单.

$$F(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - \frac{\lambda-1}{\lambda} \sin^2 \phi\right)^{1/2} d\phi = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{\lambda-1}{\lambda} \sin^2 \phi\right)^{1/2} d\phi \quad (2.39)$$

由完全椭圆积分定义, 有

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi \quad (2.40)$$

于是

$$F(\lambda) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\right) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) \quad (2.41)$$

这里利用了(2.16)式,  $e$  是椭圆的偏心率. (2.36)式可改写成

$$V_T(a, \theta_*) = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)} \bar{V}_T(a) \eta(\theta_*) \left(1 + \frac{a \sin \theta_*}{R\sqrt{\lambda} |\operatorname{tg} \phi_0|}\right) \quad (2.42)$$

其中  $\eta(\theta_*)$  和  $\bar{V}(a)$  分别由(2.22)式和(2.37)式给出. 这就是我们所求得的大红斑在可见云所在高度上的二维风场的最终分析表达式<sup>1)</sup>. 式中完全椭圆积分  $E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$  可查表求出. 对于大红斑和 Oval BC, 有关数据见表 2.

表 2 大红斑和白卵形区 Oval BC 的  $\lambda$  和  $E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$  之值 ( $e$  之值取自文献[4])

	$\lambda$	$e$	$E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$
大红斑	4.69	0.887	1.19
Oval BC	2.79	0.801	1.28

由(2.42)式我们容易得出在  $\theta_* = 0, \pi/2$  和  $-\pi/2$  上  $V_T$  的表达式:

$$V_T(a, 0) = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)} \bar{V}_T(a) \quad (2.43)$$

$$V_T\left(a, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2 E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)} \bar{V}_T(a) \left(1 + \frac{a}{R\sqrt{\lambda} |\operatorname{tg} \phi_0|}\right) \quad (2.44)$$

$$V_T\left(a, -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2 E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)} \bar{V}_T(a) \left(1 - \frac{a}{R\sqrt{\lambda} |\operatorname{tg} \phi_0|}\right) \quad (2.45)$$

这三条曲线分别在图 4 和图 5 中画出. 由这些图可见, 计算结果与观测的符合是令人满意的. 由(2.42)~(2.45)以及图 4、图 5 易知,

$$V_T\left(a, \frac{\pi}{2}\right) = V_{T_{\max}}(a) > V_T\left(a, -\frac{\pi}{2}\right) > V_T(a, 0) \quad (2.46)$$

这一关系式也与文献[5]中根据完全不同的途径(由观测所得的温度场推算速度场)所得结论相一致. 还应指出, 由于(2.42)式中因子

1) 尽管这一结果是从近似方程(2.11)推得的, 我们将指出, 本结果的实际精度要比方程(2.11)的精度更好(详见第四节),

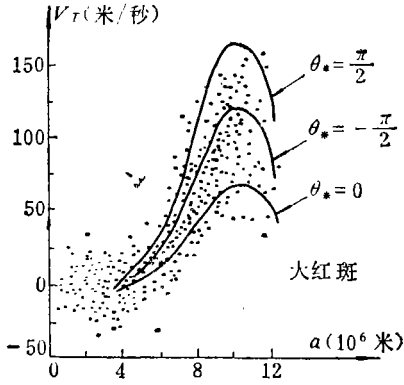


图4 计算结果  $V_T(a, \frac{\pi}{2}), V_T(a, -\frac{\pi}{2}), V_T(a, 0)$  及其与观测的比较 (大红斑)

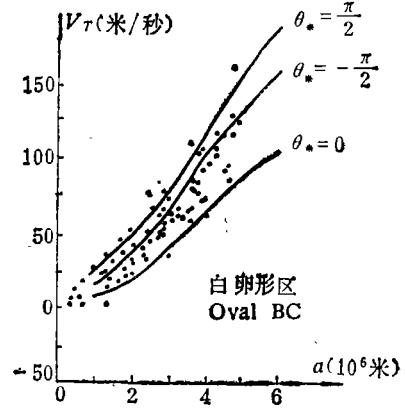


图5 计算结果  $V_T(a, \frac{\pi}{2}), V_T(a, -\frac{\pi}{2}), V_T(a, 0)$  及其与观测的比较 (白卵形区 Oval BC)

$$\left(1 + \frac{a \sin \theta_*}{R \sqrt{\lambda} |\operatorname{tg} \phi_0|}\right)$$

的存在 (它在物理上反映科氏力参数  $f$  随纬度的变化这一效应), 使得同一椭圆上  $V_T$  的最小值并不在  $\theta_* = 0$  达到, 而是在比主轴略微偏南的位置上达到. 并且每条流线上速度的最小值  $V_{T_{\min}}(a)$  也比  $V_T(a, 0)$  略小一点. 但容易看出这两个细微差别都是  $O(\epsilon^2)$  量级, 如果将

$\frac{a}{R \sqrt{\lambda} |\operatorname{tg} \phi_0|}$  看成  $\epsilon$  量级的话.

### 三、涡量分布

首先, 我们容易写出水平流线

$$x^2 + \lambda y^2 = a^2 \tag{3.1}$$

的外法线单位向量  $\mathbf{n}$  和流动方向的单位向量  $\mathbf{s}^\circ = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$  的直角坐标表达式:

$$\mathbf{n} = (xi + \lambda yj)(x^2 + \lambda^2 y^2)^{-1/2} \tag{3.2}$$

和

$$\mathbf{s}^\circ = (-\lambda yi + xj)(x^2 + \lambda^2 y^2)^{-1/2} \tag{3.3}$$

于是, 我们得到  $x$  和  $y$  方向的速度分量为

$$u = -V_T \cdot \lambda y (x^2 + \lambda^2 y^2)^{-1/2} \tag{3.4}$$

$$v = V_T \cdot x (x^2 + \lambda^2 y^2)^{-1/2} \tag{3.5}$$

将(2.42)式代入, 并注意到

$$\eta = (\cos^2 \theta_* + \lambda \sin^2 \theta_*)^{1/2} = \frac{1}{a} (x^2 + \lambda^2 y^2)^{1/2} \tag{3.6}$$

和

$$y = \frac{a}{\sqrt{\lambda}} \sin \theta_* \tag{3.7}$$

我们得到

$$u = -\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)} \frac{\bar{V}_T(a)}{a} y \left(1 + \frac{y}{R|\operatorname{tg}\phi_0|}\right) \quad (3.8)$$

$$v = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)} \frac{\bar{V}_T(a)}{a} x \left(1 + \frac{y}{R|\operatorname{tg}\phi_0|}\right) \quad (3.9)$$

其中  $a$  由(3.1)式给出, 于是, 涡量

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)} \left\{ \left(1 + \frac{y}{R|\operatorname{tg}\phi_0|}\right) \left[ \frac{\bar{V}_T(a)}{a} + x \frac{d}{da} \left( \frac{\bar{V}_T}{a} \right) \cdot \frac{x}{a} \right] \right. \\ &\quad \left. + \lambda \left[ \frac{\bar{V}_T(a)}{a} \left(1 + \frac{2y}{R|\operatorname{tg}\phi_0|}\right) + y \left(1 + \frac{y}{R|\operatorname{tg}\phi_0|}\right) \frac{d}{da} \left( \frac{\bar{V}_T}{a} \right) \cdot \frac{\lambda y}{a} \right] \right\} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)} \left\{ \frac{\bar{V}_T(a)}{a} \left[ 1 + \lambda + (1 + 2\lambda) \frac{y}{R|\operatorname{tg}\phi_0|} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} \frac{d}{da} \left( \frac{\bar{V}_T}{a} \right) \cdot \left(1 + \frac{y}{R|\operatorname{tg}\phi_0|}\right) (x^2 + \lambda^2 y^2) \right\} \quad (3.10) \end{aligned}$$

由此有

$$\begin{aligned} \zeta(a, \theta_*) &= \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) a} \left\{ \bar{V}_T(a) \left[ 1 + \lambda + (1 + 2\lambda) \frac{a \sin \theta_*}{R\sqrt{\lambda} |\operatorname{tg}\phi_0|} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{da} \left( \frac{\bar{V}_T}{a} \right) a^2 \eta^2(\theta_*) \left(1 + \frac{a \sin \theta_*}{R\sqrt{\lambda} |\operatorname{tg}\phi_0|} \right) \right\} \quad (3.11) \end{aligned}$$

如令

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} y/x \quad (3.12)$$

则易证  $\theta_*$  与  $\theta$  的关系为

$$\sin^2 \theta_* = \frac{\lambda \sin^2 \theta}{1 + (\lambda - 1) \sin^2 \theta} \quad (3.13)$$

因此, 对于  $\theta=0$  (从而  $\theta_*=0$ ) 有

$$\zeta \Big|_{\theta=0} = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) a} \left\{ \bar{V}_T(a) (1 + \lambda) + a^2 \frac{d}{da} \left( \frac{\bar{V}_T}{a} \right) \right\} \quad (3.14)$$

对于  $\theta=\pi/2$  (从而  $\theta_*=\frac{\pi}{2}$ ) 有

$$\begin{aligned} \zeta \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) a} \left\{ \bar{V}_T(a) \left[ 1 + \lambda + (1 + 2\lambda) \frac{a}{R\sqrt{\lambda} |\operatorname{tg}\phi_0|} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{da} \left( \frac{\bar{V}_T}{a} \right) a^2 \lambda \left(1 + \frac{a}{R\sqrt{\lambda} |\operatorname{tg}\phi_0|} \right) \right\} \quad (3.15) \end{aligned}$$



对于  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (从而  $\sin^2 \theta_* = \frac{\lambda}{\lambda+3}$ ,  $\eta^2(\theta_*) = \frac{\lambda^2+3}{\lambda+3}$ )

$$\xi \Big|_{\theta = \frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) a} \left\{ \bar{V}_T(a) \left[ 1 + \lambda + \frac{1+2\lambda}{\sqrt{\lambda+3}} \frac{a}{R|\operatorname{tg}\phi_0|} \right] + \frac{d}{da} \left( \frac{\bar{V}_T}{a} \right) a^2 \left( \frac{\lambda^2+3}{\lambda+3} \right) \left( 1 + \frac{a}{\sqrt{\lambda+3} R|\operatorname{tg}\phi_0|} \right) \right\} \quad (3.16)$$

对于大红斑和白卵形区 Oval BC, 我们算出了这些涡量曲线, 在图 6 和图 7 中画出。

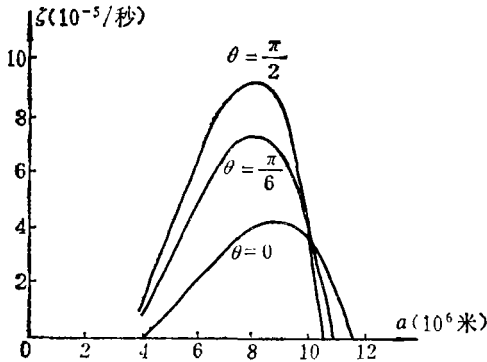


图 6 大红斑中的涡量分布

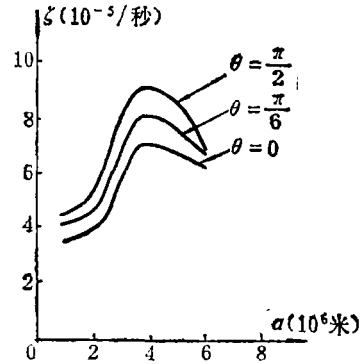


图 7 白卵形区 Oval BC 中的涡量分布

#### 四、讨 论

(i) 本文在地转近似下求出了大红斑和白卵形区 Oval BC 的二维风场, 求出了沿每一椭圆形流线速度随  $\theta_*$  的变化, 从而解释了观测上发现的沿每一流线的速度弥散. 由图 4 和图 5 可见, 理论与观测的符合是令人满意的. 这表明, 地转近似是一个较好的近似模型, 也表明, 由于二相邻同心相似椭圆之间距离随  $\theta_*$  的变化所导致的法向压力梯度的变化的确是造成风速  $V_T$  随  $\theta_*$  变化的主要物理因素.

(ii) 显然, 同一椭圆水平流线上  $V_T$  随  $\theta_*$  的变化对于涡量的计算是重要的. 而文[4]中忽略了这种变化. 因此, 本文和文[4]的涡量曲线的差异是很自然的.

(iii) 应当指出, 对于本文的目的而言, 地转近似可比对于其它目的而言更为准确. 事实上, 如果我们将动力学方程(2.1)的水平分量形式记为

$$-\frac{1}{\rho}(\nabla p)_h - 2\Omega_z \times \mathbf{V}_T = \alpha \quad (4.1)$$

其中  $\alpha$  为(2.11)式的误差. 对于我们所考虑的准定常流动, 我们有

$$\alpha = \alpha(x, y) \quad (4.2)$$

对于任一可微标量函数  $\psi(x, y)$ , 令

$$\alpha_* = \alpha - \frac{1}{\rho} \nabla \psi \quad (4.3)$$

则准确方程(4.1)可改写为

$$-\frac{1}{\rho}(\nabla p_*)_h - 2\Omega_z \times \mathbf{V}_T = \alpha_* \quad (4.4)$$

其中

$$p_* = p - \psi \tag{4.5}$$

如果选择  $\psi$  使例如  $\iint |\alpha_*|^2 dx dy$  在所讨论范围内达最小, 并记此  $\psi$  和对应的  $\alpha_*$ ,  $p_*$  分别为  $\psi_0$ ,  $\alpha_{*0}$  和  $p_{*0}$ , 则有

$$-\frac{1}{\rho}(\nabla p_{*0})_h - 2\Omega_z \times \mathbf{V}_T = \alpha_{*0} \tag{4.6}$$

显然, 在(4.6)中略去  $\alpha_{*0}$  所得之近似方程

$$-\frac{1}{\rho}(\nabla p_{*0})_h - 2\Omega_z \times \mathbf{V}_T = 0 \tag{4.7}$$

应比(2.11)式更准确. 然而, 从(4.7)出发, 重复第二节中的论证(用  $p_{*0}$  代替  $p$ ), 则导致同样结果  $V_T(a, \theta_*)$ . 由此可知, 本结果  $V_T(a, \theta_*)$  要比地转近似的通常意义更准确.

### 附 录 A

——关于  $V_T(a)$  的物理意义的进一步讨论

我们在文中曾定义 [见(2.32)式]

$$V_T(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_T(a, \theta_*) d\theta_* \tag{A.1}$$

现在我们来进一步讨论此平均的物理意义以及为什么我们可以将它与文[4]中用最小二乘法所得的结果看成一回事.

考虑两个半主轴分别为  $a_1$  和  $a_2$  ( $0 < a_1 < a_2$ ) 的同心、等偏心率椭圆, 使得其间的区域

$$D: a_1^2 < x^2 + \lambda y^2 < a_2^2 \tag{A.2}$$

复盖住我们所考虑的大红斑的主要区域, 其中水平速度场呈现出规则的椭圆形流线. 现在我们来寻求一个函数  $\bar{V}(a)$ , 使得泛函

$$I[\bar{V}] = \iint_D [V_T(a, \theta_*) - \bar{V}(a)]^2 dx dy \tag{A.3}$$

达最小值. 显然, 这正是最小二乘法的基本思想, 我们下面来证明, 使得泛函  $I[\bar{V}]$  达最小值的  $\bar{V}(a)$  正是我们在(A.1)式中定义的  $V_T(a)$ . 事实上, 由图 A.1 不难看出, 处于二相邻椭圆  $a$  到  $a+da$ 、偏近点角处于  $\theta_*$  到  $\theta_*+d\theta_*$  之间的面元为

$$adad\theta_* \cdot \frac{b}{a} = b da d\theta_* = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} ada d\theta_* \tag{A.4}$$

因此, (A.3)可改写成

$$I[V] = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{a_1}^{a_2} ada \int_0^{2\pi} [V_T(a, \theta_*) - V(a)]^2 d\theta_* \tag{A.5}$$

令

$$f(a) = \int_0^{2\pi} [V_T(a, \theta_*) - V(a)]^2 d\theta_* \tag{A.6}$$

则

$$I[\bar{V}] = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{a_1}^{a_2} a f(a) da \tag{A.7}$$

由于

$$f(a) > 0, a > 0 \tag{A.8}$$

因此, 如果我们对于每一固定的  $a$ , 选取  $\bar{V}$ , 使  $f(a)$  达最小, 则如此得到的  $\bar{V}(a)$  必使  $I[V]$  达最小. 将

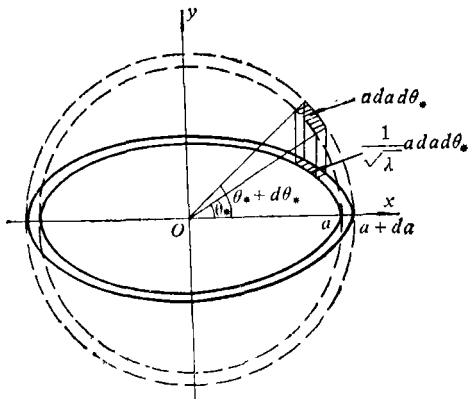


图 A.1

(A.6)式中 $\bar{V}$ 看成参量, 求 $f$ 对 $V$ 的偏导数, 得

$$\frac{\partial f}{\partial V} = -2 \int_0^{2\pi} [V_T(a, \theta_*) - V] d\theta_* \quad (\text{A.9})$$

令

$$\frac{\partial f}{\partial V} = 0 \quad (\text{A.10})$$

得到

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_T(a, \theta_*) d\theta_* \quad (\text{A.11})$$

与(A.1)式所定义之 $V_T(a)$ 相一致。这就证明了对这样定义的 $V_T(a)$ 采用由最小二乘法所得的表达式是合理的。

### 参 考 文 献

- [1] 萨根, C. 等, 《太阳系》, 张钰哲等译, 科学出版社(1981).
- [2] 《中国大百科全书, 天文学》, 中国大百科全书出版社(1980). 237.
- [3] NASA, *Voyager Encounters Jupiter*(1979).
- [4] Mitchell, J. L., R. F. Beebe, A. P. Ingersoll and G. W. Garneau, *Journal of Geophysical Research*, **86** (1981), 8751—8757.
- [5] Flasar, F. M., B. J. Conrath, J. A. Pirraglia, P. C. Clark, R. G. French and P. J. Gierasch. *Journal of Geophysical Research*, **86** (1981), 8759—8767.

## On the Dynamical Structure of the Wind Field of Jupiter's Great Red Spot

Yue Zeng-yuan Zhang Bin

(Department of Geophysics, Beijing University, Beijing)

### Abstract

Basing on the geostrophic approximation, the two-dimensional dynamical structure of the wind fields of Jupiter's Great Red Spot and White Oval BC is obtained. The results of calculation are in good agreement with the observations. Thus, an explanation of the observed dispersion of the velocities along the horizontal streamline is given. The major physical mechanism of this dispersion is as follows. The distance between two adjacent elliptical streamlines varies along the elliptical streamline, leading to the variance of the normal pressure gradient. Thus, the horizontal velocity  $V_T$  has to vary correspondingly so that the Coriolis force can approximately balance the normal pressure gradient. Another less important factor, i.e. the change of the Coriolis force parameter  $f$  with the latitude, is also taken into account.

The distributions of the vorticities of GRS and White Oval BC are also calculated.