应用数学和力学，第5卷第2期（1984年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

关于Lamé-Helmholtz方程的新解法和椭球波动函数

董 明 德

（中国科学院理论物理所，1982年12月10日收到）

摘 要

双周期系数方程虽在数理方法中具有重要意义，但Lamé-Helmholtz 方程的解至今仍未求出，因为Arscott和Möglich的双重级数展开法，Malurkar的非线性积分方程都无法进一步处理

本文的主要结果是由原方程导出一组线性微积分方程，利用积分变换，直接求得四类椭球波动函数，$\mathscr{E}_{ci}(\mathrm{sn}\alpha)$，$\mathscr{E}_{si}(\mathrm{sn}\alpha)$ $(i=1,2,3,4)$，它的特例就是熟知的Lamé函数$E_{ci}(\mathrm{sn}\alpha)$，$E_{si}(\mathrm{sn}\alpha)$．推广Riemann P函数思想，引进D函数来表示其变换规律．

一、引 言

如所周知，Picard于1880年证明双周期系数方程存在赝周期解，但是，这类方程至今尚未建立完善的解析理论．其中最简单的情况，即Lamé方程，研究相当详尽，并且得广泛的应用．然而较复杂的 Lamé-Helmholtz 方程至今并未得到相应的解析解[1-3]．显然，从数学物理观点考虑，Lamé-Helmhotz方程描述椭球坐标系中振动过程$\Delta\phi+\omega\phi=0$；Lamé 方程则限于表述椭球坐标系中静态分布$\Delta\phi=0$，后者只是前者的特例而已．

从解析理论的观点来考察，二阶单周期系数方程（Hill方程）

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+(a_0+a_1\cos2t+a_2\cos4t+\cdots+a_n\cos2nt)\varphi(t)=0 \tag{1.1}$$

的自然推广是双周期系数方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+(a_0+a_1\mathrm{sn}^2t+a_2\mathrm{sn}^4t+\cdots+a_n\mathrm{sn}^{2n}t)\varphi(t)=0 \tag{1.2}$$

式中Jacob函数$\mathrm{sn}t$具有实周期$2K$和虚周期$2iK'$．在非正则极点$t=iK'$，函数$\mathrm{sn}t$，$\mathrm{cn}t$，$\mathrm{dn}t$全为∞．当$a_n=0$ $(n\geqslant2)$时得Lamé方程．当$a_n=0$ $(n\geqslant3)$时得Lamé-Helmholtz方程．当$a_n\neq0$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ 时，则称一般双周期系数（二阶）方程，它在物理问题中也有应用．以下将清楚，我们的方法也适用于一般情况．

对于Lamé-Helmholtz方程，由于缺乏可供运算的级数解，这类方程在数学物理中的应用不能不受到很大的限制．解析解无法求得的根源是由于以往讨论中所采用方法的局限性．例如，根据Möglich [1]的方法，将解展开为球谐和函数

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} P_r^s P_{2r}^{2s}(\cos\theta)\cos 2\varphi \qquad (\cos\theta=k\,\mathrm{sn}\alpha\,\mathrm{sn}\beta) \tag{1.3}$$

或者按照Arscott[5]的讨论，将解表为两个椭球函数的无穷乘积

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} A_r^s\ {}_uE_{2r}^{s}(\alpha)\ {}_uE_{2r}^{s}(\beta) \tag{1.4}$$

这些双重级数形式解将导至三项递推关系式，而其中作为待定的系数是矩阵元。因此应用连分法就难以作进一步处理，显示解无法写出。

另一方面，对于Lamé方程可以导出Whittaker积分方程[2]；而对于 Lamé-Helmholtz方程，不能导出Whittaker类型的积分方程，只能得到Malurkar[6]非线性积分方程。Malurkar方程的求解更有原则性困难。

应该指出，最根本的问题是Lamé方程和Lamé-Helmholtz 方程的奇点性质截然不同。Lamé方程只具有四个正则极点，而 Lamé-Helmholtz 方 程是五个正则极点的合流形式，它除了三个正则极点外，还有一个非正则极点，要求出非正则积分需要克服原则性的困难。

本文的目的是求出Lamé-Helmholtz方程的解析解，简称椭球波动函数。

为此，方法的主要特点是不从形式解（包括各种双重级数展开）出发，而是从原方程导出一组等价的线性微积分方程。这类方程的明显优点，如和Whitttaker积分方程或Malurkar非线性积分方程相比较，是求解比较方便。利用积分变换可以统一讨论正则积分和非正则积分，并求出显示的解析解。非正则积分的实质性困难，只有引用树图法才能克服。根据求得的两个线性独立解，可以构成Green函数，从而解决第一类和第二类边值问题。

二、方 程 的 标 准 形 式

先讨论方程的标准形式。为了便于研究解（即方程）的变换性质，我们推广 Riemann P记号的思想。Riemann用P记号（或称P函数）表示方程的参数集及其变换规律性，这里对于Lamé-Helmholtz方程将引进相应的D记号。

Lamé-Helmholtz方程的通常形式为

$$\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}+(A_0+A_1\mathrm{sn}^2\alpha+A_2\mathrm{sn}^4\alpha)\varphi(\alpha)=0 \tag{2.1}$$

方程具有奇点$\alpha=iK'(\mathrm{mod}\ 2K,\ 2iK')$，系数具有实周期$4K$和纯虚周期$4iK'$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2\theta}},\qquad K'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\mathrm{sn}^2\theta}}$$

实数k是椭圆函数的模，$0\leqslant k\leqslant 1$，$k'=\pm\sqrt{1-k^2}$为余模。对于特征值问题，有时采用以下形式较便：

$$\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}-(a+bk^2\mathrm{sn}^2\alpha+qk^4\,\mathrm{sn}^4\alpha)\varphi(\alpha)=0 \tag{2.2}$$

$$A_0=-a,\quad A_1=-bk^2,\quad A_2=-qk^4$$

特例：

当$A_2=0$得Lamé方程

$$\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}+(A_0+A_1\mathrm{sn}^2\alpha)\varphi=0 \tag{2.3}$$

如果已知$A_1=n(n+1)k$中n不是正整数，这时解就较复杂称为广义Lamé函数(Erdelyi)。

Lamé-Helmholtz方程在应用上存在两类问题：

1. 当参数q为已知时，而a，b为待求时，则构成双参数本征值$a(q, k^2)$，$b(q, k^2)$问题.

2. 当参数A_0，A_1，A_2全是给定的，且其值不加限制，如$A_1=n(n+1)k$中n不限于正整数.

本文的目的是求方程的线性独立解系，然后由定解条件讨论上述两类问题。

为求方程的标准形式，先化为Stieljes代数形式．令$s=\mathrm{sn}^2\alpha$，得到

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-h}\right)\frac{d\varphi}{ds}-\frac{Js^2+n(n+1)s+H}{4s(s-1)(s-h)}\varphi(s)=0 \tag{2.4}$$

$$h=\frac{1}{k^2},\quad H=hA_0,\quad n(n+1)=hA_1,\quad hJ=hA_2$$

或者

$$4[s^3-(1+h)s^2+hs]\frac{d^2\varphi}{ds^2}+2[3s^2-2(1+h)s+h]\frac{d\varphi}{ds}$$
$$-[H+n(n+1)s+Js^2]\varphi=0 \tag{2.4a}$$

此方程含有三个正则极点$s=0$，1，h和一个非正则极点$s=\infty$。

如果表成Riemann P函数，有

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & h & \infty, & \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{n}{2}, & s \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & \frac{n+1}{2}, & \end{matrix}\right\}+K\{H, J\} \tag{2.5}$$

其中H，J是所谓Klein多余参数，记作$K\{H, J\}$它在Riemann P记号中无法表示．也就是说，这类函数的变换规律P记号不能反映．以下讨论如何推广。

为此，采用变换

$$s=e^{\zeta}\qquad \left(s\frac{d}{ds}=\frac{d}{d\zeta}=\vartheta\right) \tag{2.6}$$

方程(2.4)化为以下形式

$$L(\vartheta)\varphi(\zeta)=\sum_{r=1}^{3}e^{r\zeta}M_r(\vartheta)\varphi \tag{2.7}$$

其中

$$L(\vartheta)=(\vartheta-\beta_1)(\vartheta-\beta_2)\qquad \beta_1=0,\ \beta_2=\frac{1}{2}$$

$$M_r(\vartheta)=\alpha_r(\vartheta-\gamma_{r,1})(\vartheta-\gamma_{r,2})\qquad (r=1, 2, 3)$$

$$\begin{cases} M_1(\vartheta)=(1+h)\left(\vartheta^2+\dfrac{H}{1+h}\right), & \alpha_1=1+h,\ \gamma_{1,(\frac{1}{2})}=\pm i\sqrt{\dfrac{H}{1+h}} \\ M_2(\vartheta)=-\dfrac{1}{h}\left(\vartheta-\dfrac{n}{2}\right)\left(\vartheta+\dfrac{n+1}{2}\right), & \alpha_2=-\dfrac{1}{h},\ \gamma_{2,1}=\dfrac{n}{2},\ \gamma_{2,2}=-\dfrac{n+1}{2} \\ M_3(\vartheta)=J\dfrac{1+h}{h}=\alpha_3 & \end{cases}$$

我们称方程（2.7）为标准形式．约定：M_3为常数时，仅记上系数α_3。现引进D记号，将所有方程系数纳入统一表示如下：

$$D\left\{\begin{array}{c|c} s=\mathrm{sn}^2\alpha & \beta_1,\ \beta_2 \\ \hline 1,\quad \alpha_1 & \gamma_{1,1},\ \gamma_{1,2} \\ 2,\quad \alpha_2 & \gamma_{2,1},\ \gamma_{2,2} \\ 3,\quad \alpha_3 & \diagup \end{array}\right\} \text{即}\ D\left\{\begin{array}{cc|cc} & s & 0, & 1/2 \\ \hline 1, & \dfrac{1+h}{h} & i\sqrt{\dfrac{H}{1+h}}, & -i\sqrt{\dfrac{H}{1+h}} \\ 2, & -\dfrac{1}{h} & \dfrac{n}{2}, & -\dfrac{n+1}{2} \\ 3, & J\dfrac{1+h}{h} & \diagup & \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

花括号内分四象限．第二象限记上自变量s，第一象限记上算子$L(\vartheta)$的零点$\beta_{1,2}$，第三、四象限分别填写右边算子$e^{r\zeta}\alpha_r M_r(\vartheta)$的指标、系数（$r$，$\alpha_r$）及算子$M_r$的零点$\gamma_{r,1}$，$\gamma_{r,2}$。或简单记为

$$D_\sigma\{s|\alpha,\ \beta,\ \gamma\}\qquad(\sigma=1,\ 2) \tag{2.9}$$

（α，β，γ）是方程的参数集．以下将求出级数解，即$D_\sigma\{s|\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$的具体形式，这时，参数集在级数解中的填写规律具有确定性．由于级数解具有收敛性，则得D函数的表述．

三、求解新方法

微积分方程

已知方程$L\varphi=0$的线性独立解为$\varphi_\sigma^0(\zeta)$　（$\sigma=1$，2）．

显见，标准方程（2.7）的线性独立解$\varphi_\sigma(\zeta)$满足下列变系数微积分方程　（$\sigma=1$，2）

$$\varphi_\sigma(\zeta)-\int_0^\zeta H(\zeta-\zeta',\ \zeta')\varphi_\sigma(\zeta')d\zeta'=\varphi_\sigma^0(\zeta) \tag{3.1}$$

其中核算子

$$H(\zeta-\zeta',\ \zeta')=G(\zeta-\zeta')\sum_{r=1}^{3}e^{r\zeta'}M_r\left(\frac{d}{d\zeta'}\right)$$

$G(\zeta-\zeta')$是相应于算子$L\left(\dfrac{d}{d\zeta}\right)$的Green函数．由于非齐次项$\varphi_\sigma^0(\zeta)$恒不为零，上述方程存在非零解．

线性独立解

利用积分变换，原函数$\varphi_\sigma(\zeta)$的映象$\tilde{\varphi}_\sigma(p)$为

$$\tilde{\varphi}_\sigma(p)=\int_0^\infty\varphi_\sigma(\zeta)e^{-p\zeta}d\zeta \tag{3.2}$$

根据积分变换的基本定理，有

$$\varphi_\sigma(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\tilde{\varphi}_\sigma(p)e^{-p\zeta}dp \tag{3.3}$$

泛函方程（3.1）经积分变换后给出

$$\tilde{\varphi}_\sigma(p)=[1-\tilde{H}(p)\cdot]^{-1}\tilde{\varphi}_\sigma^0(p) \tag{3.4}$$

其中

$$\tilde{H}(p)\cdot=\frac{1}{\tilde{L}(p)}\sum_r\tilde{M}_r(p-r)\exp[-r\partial_p]\cdot$$

$$\tilde{L}(p)=(p-\beta_1)(p-\beta_2)$$

$$\tilde{M}_1(p)=(1+h)\left(p^2+\frac{H}{1+h}\right)$$

$$\tilde{M}_2(p)=-\frac{1}{h}\left(p-\frac{n}{2}\right)\left(p+\frac{n+1}{2}\right)$$

$$\tilde{M}_3(p)=\frac{1+h}{h}J$$

算子∂_p定义如下：

$$\exp[\pm k\partial_p]\tilde{\varphi}(p)=\tilde{\varphi}(p\pm k)$$

根据反演公式有

$$\varphi_\sigma(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{p\zeta}\left[1-\frac{1}{\tilde{L}(p)}\sum_r\tilde{M}_r(p-r)\exp[-r\partial_p]\right]^{-1}\frac{1}{p-\beta_\sigma}dp \tag{3.5}$$

留数定理给出

$$\varphi_\sigma(\zeta)=\{1+\tau_\sigma(\zeta)\}\exp[\beta_\sigma\zeta] \tag{3.6}$$

$$\tau_\sigma(\zeta)=\sum_{r_1}M_{r_1}(\beta_\sigma)\exp[-\beta_\sigma\zeta]\left[1-\sum_{r_2}\frac{M_{r_2}(\beta_\sigma+r_1)}{L(\beta_\sigma+r_1)}\exp[r_2\partial_\beta]\right]^{-1}\frac{\exp[(\beta_\sigma+r_1)\zeta]}{L(\beta_\sigma+r_1)}$$

$$=\sum_{r_1}\frac{M_{r_1}(\beta_\sigma)}{L(\beta_\sigma+r_1)}\exp[r_1\zeta]+\sum_{r_1}\sum_{r_2}\frac{M_{r_1}(\beta_\sigma)M_{r_2}(\beta_\sigma+r_1)}{L(\beta_\sigma+r_1)L(\beta_\sigma+r_{(2)})}\exp[r_{(2)}\zeta]+\cdots$$

$$+\sum_{r_1}\sum_{r_2}\cdots\sum_{r_\lambda}\frac{M_{r_1}(\beta_\sigma)M_{r_2}(\beta_\sigma+r_1)\cdots M_{r_\lambda}(\beta_\sigma+r_{(\lambda-1)})}{L(\beta_\sigma+r_1)L(\beta_\sigma+r_{(2)})\cdots L(\beta_\sigma+r_{(\lambda)})}\exp[r_{(\lambda)}\zeta]+\cdots$$

（记号：　$r_{(\lambda)}=r_1+r_2+\cdots+r_\lambda$）

容易验证，$\varphi_\sigma(\zeta)$满足方程，代入左端

$$\mathrm{L.\ S.}=L\varphi_\sigma=\left\{\sum_{r_1}M_{r_1}(\beta_\sigma)\exp[r_1\zeta]+\sum_{r_1}\sum_{r_2}\frac{M_{r_1}(\beta_\sigma)M_{r_2}(\beta_\sigma+r_1)}{L(\beta_\sigma+r_1)}\exp[r_{(2)}\zeta]\right.$$

$$+\cdots+\sum_{r_1}\sum_{r_2}\cdots\sum_{r_\lambda}\frac{M_{r_1}(\beta_\sigma)M_{r_2}(\beta_\sigma+r_1)\cdots M_{r_\lambda}(\beta_\sigma+r_{(\lambda-1)})}{L(\beta_\sigma+r_1)L(\beta_\sigma+r_{(2)})\cdots L(\beta_\sigma+r_{(\lambda-1)})}\exp[r_{(\lambda)}\zeta]$$

$$+\cdots\Big\}\exp[\beta_\sigma\zeta]\equiv\Sigma e^{r\zeta}M_r\varphi_\sigma=\mathrm{R.S}.$$

重新整理幂次，得到基本解如下：

$$D_\sigma(\mathrm{sn}^2\alpha)=\varphi_\sigma(\mathrm{sn}^2\alpha)=\Big\{1+\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\beta_\sigma)(\mathrm{sn}\alpha)^{2k}\Big\}(\mathrm{sn}\alpha)^{\beta_\sigma} \tag{3.7}$$

$$c_1=\frac{M_1(\beta_\sigma)}{L(\beta_\sigma+1)}$$

$$c_2=\frac{1}{L(\beta_\sigma+2)}\{c_1M_1(\beta_\sigma+1)+M_2(\beta_\sigma)\}$$

$$c_3=\frac{1}{L(\beta_\sigma+3)}\{c_2M_1(\beta_\sigma+2)+c_1M_2(\beta_\sigma+1)+M_3(\beta_\sigma)\}$$

$$c_4=\frac{1}{L(\beta_\sigma+4)}\{c_3M_1(\beta_\sigma+3)+c_2M_2(\beta_\sigma+2)+c_1M_3(\beta_\sigma)\}$$

……

$$c_{k+1}=\frac{1}{L(\beta_\sigma+k)}\{c_kM_1(\beta_\sigma+k)+c_{k-1}M_2(\beta_\sigma+k-1)+c_{k-2}M_3(\beta_\sigma)\}$$

$$(k\geqslant3)$$

容易验证：Wronski式不恒等于零

$$W(\varphi_1,\ \varphi_2)\neq0$$

即φ_1，φ_2是两个线性独立解．又根据D_σ函数的显式，容易证明级数解的收敛性．

结论：上述变系数线性微积分方程组（3.1）的优点是比 Whittaker 方程和 Malurkar 方程简单，容易求出级数解．

四、四类椭球波动函数

1． 第一类椭球波动函数

根据上节的D记号及其相应的级数表式，得到第一类椭球波动函数如下：

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{E}_{c1}(\alpha)=1+a_1\mathrm{sn}^2\alpha+a_2\mathrm{sn}^4\alpha+\cdots+a_k(\mathrm{sn}\alpha)^{2k}+\cdots\\&\mathscr{E}_{s1}(\alpha)=\mathrm{sn}\alpha\{1+b_1\mathrm{sn}^2\alpha+b_2\mathrm{sn}^4\alpha+\cdots+b_k(\mathrm{sn}\alpha)^{2k}+\cdots\}\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

其中系数a_m，b_m具有形式

$$a_1=\frac{1}{1\cdot\frac{1}{2}}\frac{H}{4}$$

$$a_2=\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\left\{\left(\frac{H}{4}+\frac{1+h}{h}\right)a_1+\frac{n(n+1)}{4h}\right\}$$

$$a_3=\frac{1}{3\cdot\frac{5}{2}}\left\{\left(\frac{H}{4}+4\frac{1+h}{h}\right)a_2-\frac{1}{h}\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{n+1}{2}\right)a_1+\frac{J}{4h}\right\}$$

……

$$a_m=\frac{1}{m\cdot\frac{2m-1}{2}}\left\{\left(\frac{H}{4}+(m-1)^2\frac{1+h}{h}\right)a_{m-1}-\frac{1}{h}\left(m-2-\frac{n}{2}\right)\left(m-2+\frac{n+1}{2}\right)a_{m-2}\right.$$

$$\left.+\frac{J}{4h}a_{m-3}\right\}$$

和

$$b_1=\frac{1}{1\cdot\frac{3}{2}}\left\{\left(\frac{H}{4}+\frac{1}{4}\frac{1+h}{h}\right)\right\}$$

$$b_2=\frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}}\left\{\left(\frac{H}{4}+\frac{9}{4}\frac{1+h}{h}\right)b_1-\frac{1}{4h}(1-n)(n+2)\right\}$$

$$b_3=\frac{1}{3\cdot\frac{7}{2}}\left\{\left(\frac{H}{4}+\frac{25}{4}\frac{1+h}{h}\right)b_2-\frac{1}{4h}(3-n)(n+4)b_1+\frac{J}{4h}\right\}$$

……

$$b_m=\frac{1}{m\left(\frac{2m+1}{2}\right)}\left\{\left(\frac{H}{4}+\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\frac{1+h}{h}\right)b_{m-1}-\frac{1}{4h}(m-n)(n+m+1)b_{m-2}\right.$$

$$\left.+\frac{J}{4h}b_{m-3}\right\}$$

注意，对于椭球函数，当n是正整数时，可以适当选择H，所得的解不是无穷级数，而是多项式。对于椭球波动函数，不论n，H取什么值，解总是无穷级数。

2. 第二类椭球波动函数

为求第二类椭球波动函数$\mathrm{cn}\alpha\,\phi(\mathrm{sn}^2\alpha)$，令

$$\varphi(s)=\sqrt{1-s}\,\phi(s) \tag{4.2}$$

代入原方程，则得

$$[s^3-(1+h)s^2+hs]\frac{d^2\phi}{ds^2}+\frac{1}{2}[5s^2-2(1+2h)s+hs]\frac{d\phi}{ds}$$

$$-\frac{1}{4}[(n-1)(n+2)s+(H+h)+Js^2]\phi(s)=0 \tag{4.3}$$

化为标准形式

$$L(\vartheta)\phi=\sum_{r=1}^{3}e^{r\xi}M_r(\vartheta)\phi \tag{4.4}$$

$$L(\vartheta)=\vartheta\left(\vartheta-\frac{1}{2}\right)$$

$$M_1(\vartheta)=\frac{1+h}{h}\left[\vartheta^2+\frac{h}{1+h}\vartheta+\frac{H+h}{4(1+h)}\right]$$

$$M_2(\vartheta)=-\frac{1}{h}\left(\vartheta-\frac{n-1}{2}\right)\left(\vartheta+\frac{n+2}{2}\right)$$

$$M_3(\vartheta)=\frac{J}{4}$$

因此有D函数表示

$$D\left\{\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\operatorname{sn}^2\alpha} & 0, & \frac{1}{2} \\ \hline 1, & \frac{1+h}{h} & \gamma_1, & \gamma_2 \\ 2, & -\frac{1}{h} & \frac{n-1}{2}, & -\frac{n-2}{2} \\ 3, & \frac{J}{4} & & \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

$$\gamma_{\binom{1}{2}}=-\frac{h}{2(1+h)}\left[1\pm i\sqrt{H(1+h)+h}\right]$$

按照上节的一般公式，得到第二类椭球波动函数：

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{E}_{c2}(\alpha)=\operatorname{cn}\alpha(1+c_1\operatorname{sn}^2\alpha+c_2\operatorname{sn}^4\alpha+\cdots+c_m\operatorname{sn}^{2m}\alpha+\cdots) \\ \mathscr{E}_{s2}(\alpha)=\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha(1+d_1\operatorname{sn}^2\alpha+d_2\operatorname{sn}^4\alpha+\cdots+d_m\operatorname{sn}^{2m}\alpha+\cdots)\end{array}\right\} \tag{4.6}$$

$$c_1=\frac{1}{1\cdot\frac{1}{2}}\frac{H+h}{4h}$$

$$c_2=\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\left\{\left(\frac{H+h}{4h}+\frac{1+2h}{h}\right)c_1-\frac{1}{4h}(n-1)(n+2)\right\}$$

$$c_3=\frac{1}{3\cdot\frac{5}{2}}\left\{\left(\frac{H+h}{4h}+\frac{4+6h}{h}\right)c_2-\frac{1}{4h}(3-n)(n+4)c_1+\frac{J}{4}\right\}$$

……

$$c_m=\frac{1}{m\cdot\frac{2m-1}{2}}\left\{\left(\frac{H+h}{4h}+\frac{(m-1)^2}{h}+2m\right)c_{m-1}-\frac{1}{4h}(2m-n-3)(2m+n-2)c_{m-2}\right.$$

$$\left.+\frac{J}{4}c_{m-3}\right\}$$

$$d_1=\frac{1}{1\cdot\frac{3}{2}}\left(\frac{H+h}{4h}+\frac{1+h}{4h}+\frac{1}{2}\right)$$

$$d_2=\frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}}\left\{\left(\frac{H+h}{4h}+\frac{9}{4}\frac{1+h}{h}+\frac{3}{2}\right)d_1-\frac{1}{4h}(2-n)(n+3)\right\}$$

$$d_3=\frac{1}{3\cdot\frac{7}{2}}\left\{\left(\frac{H+h}{4h}+\frac{25}{4}\,\frac{1+h}{h}+\frac{5}{2}\right)d_2-\frac{1}{4h}(4-n)(n+5)d_1+\frac{J}{4}\right\}$$

……

$$d_m=\frac{1}{m\cdot\frac{2m+1}{2}}\left\{\left(\frac{H+h}{4h}+\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\frac{1+h}{h}+\frac{2m-1}{2}\right)d_{m-1}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4h}(2m-2-n)(2m-1+m)\,d_{m-2}+\frac{J}{4}d_{m-3}\right\}$$

3. 第三类椭球波动函数

为求第三类椭球波动函数 $\mathrm{dn}\alpha\,\psi(\mathrm{sn}\alpha)$，令

$$\varphi=\sqrt{1-h}\,\psi(s)\qquad(s=\mathrm{sn}^2\alpha)\tag{4.7}$$

则得

$$[s^3-(1+h)s^2+hs]\frac{d^2\psi}{ds^2}+\frac{1}{2}\,[5s^2-2(2+h)s+\ hs]\frac{d\psi}{ds}$$

$$-\frac{1}{4}\,[(n-1)(n+2)s+(1+H)+Js^2]\psi=0\tag{4.8}$$

化为标准形式

$$L(\vartheta)\psi=\sum_{r=1}^{3}e^{r\xi}M_r(\vartheta)\psi\tag{4.9}$$

$$L(\vartheta)=\vartheta\left(\vartheta-\frac{1}{2}\right),\quad M_1(\vartheta)=\frac{1+h}{h}\left[\vartheta^2+\frac{1}{1+h}\vartheta+\frac{1+H}{4(1+h)}\right]$$

$$M_2(\vartheta)=-\frac{1}{h}\left(\vartheta-\frac{n-1}{2}\right)\left(\vartheta+\frac{n+2}{2}\right),\quad M_3(\vartheta)=\frac{J}{4}$$

因此有 D 函数表示

$$D\left\{\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{s} & 0, & \frac{1}{2}\\ \hline 1, & \frac{1+h}{h} & \gamma_1, & \gamma_2\\ 2, & -\frac{1}{h} & \frac{n-1}{2}, & -\frac{n+2}{2}\\ 3, & \frac{J}{4} & \multicolumn{2}{c}{/} \end{array}\right\}\tag{4.10}$$

$$\gamma_{\binom{1}{2}}=-\frac{1}{2(1+h)}\,(1\pm i\sqrt{H+h+Hh})$$

由一般公式，得第三类椭球波动函数

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{E}_{c3}(\alpha)=\mathrm{dn}\alpha(1+e_1\mathrm{sn}^2\alpha+e_2\mathrm{sn}^4\alpha+\cdots+e_m\mathrm{sn}^{2m}\alpha+\cdots)\\&\mathscr{E}_{s3}(\alpha)=\mathrm{dn}\alpha\,\mathrm{sn}\alpha(1+f_1\mathrm{sn}^2\alpha+f_2\mathrm{sn}^4\alpha+\cdots+f_m\mathrm{sn}^{2m}\alpha+\cdots)\end{aligned}\right\}\tag{4.11}$$

$$e_1=\frac{1}{1\cdot\frac{1}{2}}\frac{H+1}{4h}$$

$$e_2=\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\left\{\left(\frac{H+1}{4h}+\frac{1+h}{4h}+\frac{1}{2h}\right)e_1+\frac{(n-1)(n+2)}{4h}\right\}$$

$$e_3=\frac{1}{3\cdot\frac{5}{2}}\left\{\left(\frac{H+1}{4h}+\frac{9}{4}\frac{1+h}{h}+\frac{3}{2h}\right)e_2+\frac{1}{4h}(n+4)(n-3)e_1+\frac{J}{4}\right\}$$

......

$$e_m=\frac{1}{m\cdot\frac{2m-1}{2}}\left\{\frac{H+1}{4h}+\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\frac{1+h}{h}+\frac{2m-1}{h}\right)e_{m-1}$$

$$+\frac{1}{4h}(n-2m+3)(2m+n-2)\ e_{m-2}-\frac{J}{4}e_{m-3}\Big\}$$

$$f_1=\frac{1}{1\cdot\frac{3}{2}}\frac{H+1}{4h}$$

$$f_2=\frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}}\left\{\left(\frac{H+1}{4h}+\frac{9}{4}\frac{1+h}{h}+\frac{3}{2}\right)f_1+\frac{1}{4h}(n-2)(n+3)\right\}$$

$$f_3=\frac{1}{3\cdot\frac{7}{2}}\left\{\left(\frac{H+1}{4h}+\frac{25}{4}\frac{1+h}{h}+\frac{5}{2}\right)f_2+\frac{1}{4h}(n-4)(n+5)f_1+\frac{J}{4}\right\}$$

......

$$f_m=\frac{1}{m\cdot\frac{2m+1}{2}}\left\{\left(\frac{H+1}{4h}+\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\frac{1+h}{h}+\frac{2m-1}{2}\right)f_{m-1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4h}(n-2m+2)(2m-1+n)f_{m-2}+\frac{J}{4}f_{m-3}\right\}$$

4. 第四类椭球波动函数

当求第四类椭球波动函数 $\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\ \chi(\operatorname{sn}^2\alpha)$时，须令

$$\varphi(s)=\sqrt{(s-1)(s-h)}\ \chi(s) \tag{4.12}$$

方程具有形式

$$(s^3-(1+h)s^2+hs)\frac{d^2\chi}{ds^2}+\frac{1}{2}(7s^2-4(1+h)s+h)\frac{d\chi}{ds}$$

$$-\frac{1}{4}[(n-2)(n+3)s+(H+h+1)+Js^2]\chi=0 \tag{4.13}$$

由此得标准形式

$$L(\vartheta)\chi=\sum_{r=1}^{3}e^{r\xi}M_r(\vartheta)\chi \tag{4.14}$$

$$L(\vartheta)=\vartheta\left(\vartheta-\frac{1}{2}\right),\quad M_1(\vartheta)=\frac{1+h}{h}\left\{\vartheta^2+\vartheta+\frac{H+h+1}{4(1+h)}\right\}$$

$$M_2(\vartheta)=\frac{1}{h}\left(\frac{n-2}{2}-\vartheta\right)\left(\vartheta+\frac{n+3}{2}\right),\quad M_3(\vartheta)=\frac{J}{4}$$

相应的 D 函数是

$$D\left\{\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\mathrm{sn}^2\alpha} & 0, & \frac{1}{2} \\ \hline 1, & \frac{1+h}{h} & \gamma_1, & \gamma_2 \\ 2, & -\frac{1}{h} & \frac{n-2}{2}, & -\frac{n+3}{2} \\ 3, & \frac{J}{4} & & \end{array}\right\} \tag{4.15}$$

$$\gamma_{\binom{1}{2}}=-\frac{1}{2}\left[1\pm i\sqrt{\frac{H}{1+h}}\right]$$

从而得到第四类椭球波动函数

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{E}_{c4}(\alpha)=\mathrm{cn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha\{1+g_1\mathrm{sn}^2\alpha+g_2\mathrm{sn}^4\alpha+\cdots+g_m\mathrm{sn}^{2m}\alpha\} \\ \mathscr{E}_{s4}(\alpha)=\mathrm{sn}\alpha\,\mathrm{cn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha\{1+h_1\mathrm{sn}^2\alpha+h_2\mathrm{sn}^4\alpha+\cdots+h_m\mathrm{sn}^{2m}\alpha\} \end{array}\right\} \tag{4.16}$$

$$g_1=\frac{1}{1\cdot\frac{1}{2}}\;\frac{1}{4h}(H+h+1)$$

$$g_2=\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\;\frac{1}{4h}\{(H+9h+1)g_1+(n-2)(n+3)\}$$

$$g_3=\frac{1}{3\cdot\frac{5}{2}}\;\frac{1}{4h}\{(H+25h+1)g_2+(n-4)(n+5)g_1+Jh\}$$

……

$$g_m=\frac{1}{m\left(\frac{2m-1}{2}\right)}\;\frac{1}{4h}\{(H+[4(m-1)m+1]h+1)g_{m-1}$$
$$+(n-2m+2)(n+2m-1)g_{m-2}+Jhg_{m-3}\}\qquad(m\geqslant4)$$

$$h_1=\frac{1}{\frac{3}{2}\cdot1}\;\frac{1}{4h}(H+4h+1)$$

$$h_2=\frac{1}{\frac{5}{2}\cdot2}\;\frac{1}{4h}\{(H+16h+1)h_1+(n-3)(n+4)\}$$

$$h_3=\frac{1}{\frac{7}{2}\cdot3}\;\frac{1}{4h}\{(H+36h+1)h_2+(n-5)(n+6)h_1+Jh\}$$

……

$$h_m=\frac{1}{\frac{2m+1}{2}\cdot m}\;\frac{1}{4h}\{(H+[(2m+1)(2m+3)+1]h+1)h_{m-2}$$
$$+(n-2m-1)(n+2m+4)h_{m-2}+Jh\,h_{m-3}\}\qquad(m\geqslant4)$$

五、讨 论

(1) 为了推广Riemann P函数的思想，本文引进 D 函数表示，其优点是宜于表述四类椭球波动函数，便于研究函数的变换性质。

(2) 求得四类椭球波动函数 $\mathscr{E}_{ci}(\text{sn}\alpha)\mathscr{E}_{si}(\text{sn}\alpha)(i=1,2,3,4)$，包括四类椭球(Lamé)函数$E_{ci}(\text{sn}\alpha)E_{si}(\text{sn}\alpha)$作为特例。

(3) 本法可以直接推广到高阶一般双周期系数方程，其系数是$\text{sn}\alpha,\text{cn}\alpha,\text{dn}\alpha$的展开式或多项式。

(4) 利用树图法可以求出非正则积分的级数形式。再者，根据得出的级数解，可以直接讨论函数的解析性质，包括 Picard 赝周期乘子σ,σ'的表式。这些问题过去难以处理，我们将另行讨论。

参 考 文 献

[1] Erdelyi, *Higher Transcendental Functions* (Bateman Manuscript Project). Vol. I—III (1953—1955).

[2] Whittaker, Watson, *Modern Analysis*, Cambridge University Press(1940).

[3] Hobson, E. W., *Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Cambridge University Press, (1931).

[4] Möglich, Beugunserscheinungen an Körpern von Ellipsoidischer Gestalt, *Ann. d. Phys.*, 83(1927), 609—734.

[5] Arscott, F M., (a) *Periodic Differential Equations*, Pergamon Press(1964). (b) A new treatment of the ellipsoidal wave equations, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 33 (1959), 21—50.

[6] Malurkar, Ellipsoidal wave functions, *Ind. J Phys.*, 9(1935), 45—80.

[7] Dong Ming-de, *Poincarés Problem of Irregular Integrals* (Lecture Notes, unpublished (1981))

New Method of Solving Lamé-Helmholtz Equation and Ellipsoidal Wave Functions

Dong Ming-de

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

Despite the great significance of equations with doubly-periodic coefficients in the methods of mathematical physics, the problem of solving Lamé-Helmholtz equation still remains to be tackled; Arscott and Möeglich's method of double-series expansion as well as Malurkar's non-linear integral equation are unable to reach the final solution.

Our main result consists in obtaining analytic expression for ellipsoidal wave functions of four species $\mathscr{E}_{ci}(\text{sn}\alpha)$, $\mathscr{E}_{si}(\text{sn}\alpha)$ $(i=1,2,3,4)$ by deriving a couple of linear integral equations and solving these by integral transform, including the well-known Lamé function $E_{ci}(\text{sn}\alpha)$, $E_{si}(\text{sn}\alpha)$ as special case. Generalizing Riemann's idea of P-function, we introduce D-function to express their transformation properties.