

万因斯坦-钱伟长法的应用——简支与固支混合边界矩形板基频上下限*

陈 政 清

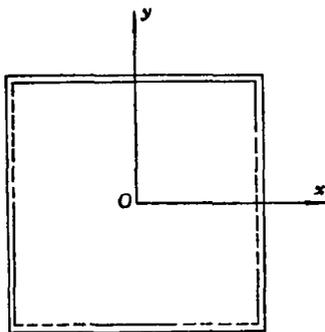
(湖南大学, 1983年5月15日收到)

摘 要

本文将边界条件放松法^{[1][2]}应用于简支与固支混合边界矩形板, 求得此类板的基频下限值. 文中还设计了一种能满足位移边界条件的多项式作为振型试函数, 从而用里兹法得到相应的上限值. 具体算例得到了满意的结果. 最后本文指出, 通常用力法迭加法得到的此类板的所谓精确解, 若考虑实际计算的级数截断误差, 本质上是一种下限解.

一、放 松 边 界 下 限 法

图1表示一块各向同性均厚(h)匀质(ρ)矩形薄板, 抗弯刚度为 D , 边界由固支段 C_1 与简支段 C_2 任意混合组成(如果周边固定板的边界支承有某些缺陷, 就化归为图1的力学模型). 此板的固有频率 ω 归结为如下特征值问题的解:



— 固支 - - - 简支

图 1

$$\begin{cases} \nabla^2 \nabla^2 w - \mu^2 w = 0 & (\mu^2 = \rho h \omega^4 / D) & (1.1) \\ w|_{c_1+c_2} = 0 & (1.2) \\ \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{c_1} = 0 & (1.3) \\ M_n \Big|_{c_2} = -D \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \Big|_{c_2} = 0 & (1.4) \end{cases}$$

如果 w 能事先满足条件(1.2), 则上述特征值问题可转化为下列泛函的驻值问题:

$$\Pi^* = \frac{1}{2} D \iint_{\sigma} (\nabla^2 w)^2 dx dy - \mu^2 \iint_{\sigma} w^2 dx dy - \int_{c_1} D \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial n} ds \quad (1.5)$$

设能找到 \tilde{w} 事先满足条件(1.1) (从而 \tilde{w} 一定是 μ 的显函数), (1.2)和(1.4), 将它代入(1.5)式, 由 $\delta \Pi^* = 0$ 可以导出

* 钱伟长推荐.

$$\int_{c_1} \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \delta \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial n^2} ds = 0 \quad (1.6)$$

由(1.6)式可以确定基频 μ_1 的近似值 $\bar{\mu}_1$ 。它必是 μ_1 的一个下限,这是因为 \bar{w} 只是放松了位移边界条件(1.3)。

现在问题归结为构造系列 $\{\bar{w}^{(N)}\}$,使得相应的 $\{\mu_1^{(N)}\}$ 是单调递增数列,能逐步逼近 μ_1 。从力学分析可知,如果 $\bar{w}^{(N)}$ 除满足条件(1.1), (1.2)和(1.4)外,还能在原来的固支段上,产生一个反抗力矩 $M_n^{(N)} \left(= -D \frac{\partial^2 w^{(N)}}{\partial n^2} \right)$, 它被事先指定为 N 个具有待定系数的三角多项式的和(每段分别指定),则由式(1.6)可以确定 $\mu_1^{(N)}$ 及相应的待定系数,于是振型 $\bar{w}^{(N)}$ 及反抗力矩 $M_n^{(N)}$ 也得以完全确定。由变分原理,式(1.6)确定的 $M_n^{(N)}$ 的分布近似于原固支段真实的弯矩分布,这相当于条件(1.3)近似满足。于是随着 N 的增加,条件(1.3)被逐步逼近,自然相应的 $\mu_1^{(N)}$ 也会逼近 μ_1 。至此,问题全部得以解决。

以上构造 $\{\bar{w}^{(N)}\}$ 的方法,与文献[1]引进权函数系列 $\{P_m\}$ 相比,数学本质相同,只是力学背景较为直观,容易导致一个十分有用的结论(见第三节)。

二、四边简支,每边中部固定的方板基频上下限

为简便计,我们选取这个具有对称性的例子(见图2)来说明我们的方法。

1. 放松边界法求基频下限值

以下是本文第一节所述方法的具体化。

a. 构造 $\bar{w}^{(N)}$

$$\text{令} \quad \bar{w}^{(N)} = w_1^{(N)} + w_2^{(N)} \quad (2.1)$$

其中 $w_1^{(N)}$ 相当于将板的所有固支段改为简支,再在 $x = \pm \frac{a}{2}$ 两边原固支段上加上某种分布弯矩(见图3)

$$M_x^{(N)} \Big|_{x=\pm a/2} = -D \frac{\partial^2 \bar{w}_1^{(N)}}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm a/2} = -D \sum_{m=1,3,5,\dots}^{2N-1} \alpha_m \phi_m \quad (2.2)$$

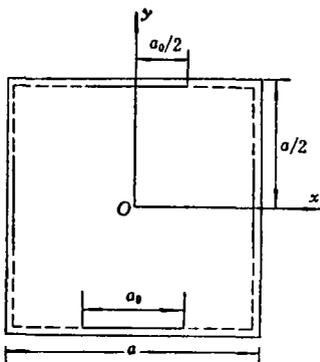


图 2

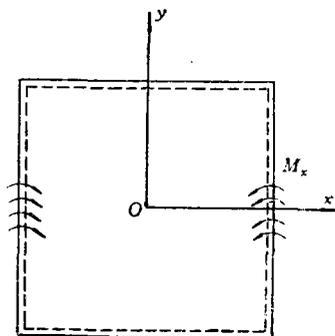


图 3

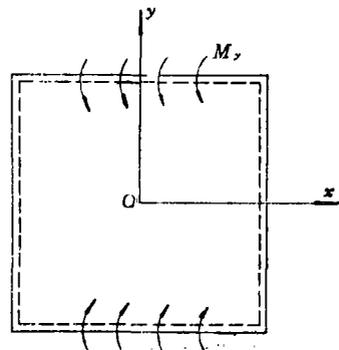


图 4

后板的振型函数。这里 a_m 是一组待定常数，而 ϕ_m 用分段函数表示

$$\phi_m = \begin{cases} 0, & -\frac{a}{2} \leq y \leq -\frac{a_0}{2} \\ \cos \frac{m\pi}{a_0} y, & -\frac{a_0}{2} < y < \frac{a_0}{2} \\ 0, & \frac{a_0}{2} \leq y \leq \frac{a}{2} \end{cases} \quad (2.3)$$

m 只取奇数是出于对称性的考虑。

$w_i^{(N)}$ 与 $w_i^{(N)}$ 类似，只是改在 $y = \pm \frac{a}{2}$ 的两边原固支段上加上同样的分布弯矩(见图4)

$$M_y^{(N)} \Big|_{y=\pm a/2} = -D \frac{\partial^2 w_i^{(N)}}{\partial y^2} = -D \sum_{m=1,3,5,\dots}^{2N-1} a_m \phi_m \quad (2.4)$$

这里

$$\phi'_m = \begin{cases} 0, & -\frac{a}{2} \leq x \leq -\frac{a_0}{2} \\ \cos \frac{m\pi x}{a_0}, & -\frac{a_0}{2} < x < \frac{a_0}{2} \\ 0, & \frac{a_0}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \end{cases} \quad (2.5)$$

现在令振型函数 $w_i^{(N)} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{2N-1} a_m f_m$ ，容易看出， f_m 要满足下列方程和边界条件

$$\nabla^2 \nabla^2 f_m - \mu^2 f_m = 0 \quad (2.6)$$

$$f_m \Big|_{x=\pm a/2} = f_m \Big|_{y=\pm a/2} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 f_m}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm a/2} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 f_m}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm a/2} = \phi_m \quad (2.9)$$

由于 m 为奇数， ϕ_m 是连续的且分段光滑，可以展成三角级数

$$\phi_m = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} B'_{mk} \cos \frac{k\pi}{a} y \quad -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2} \quad (2.10)$$

那末

$$B'_{mk} = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a_0}{2}}^{\frac{a_0}{2}} \cos \frac{m\pi y}{a_0} \cos \frac{k\pi y}{a} dy \quad (2.11)$$

经如此处理后，可以用 Levy 解法求出 f_m (过程较繁，见附录)。从而有

$$w_1^{(N)} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{2N-1} a_m f_m = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{2N-1} a_m \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} B'_{mk} \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda_k x}{\operatorname{ch} \lambda_k a} - \frac{\operatorname{ch} \lambda'_k x}{\operatorname{ch} \lambda'_k a} \right) \cos \alpha_k y \quad (2.12)$$

其中

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{a}, \quad \lambda_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \mu}, \quad \lambda'_k = \sqrt{\alpha_k^2 - \mu}$$

再交换式(2.12)中 x 与 y 的位置, 即得 $w_2^{(N)}$

$$w_2^{(N)} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{2N-1} a_m \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} B'_{mk} \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda_k y}{\operatorname{ch} \lambda_k a} - \frac{\operatorname{ch} \lambda'_k y}{\operatorname{ch} \lambda'_k a} \right) \cos \alpha_k x \quad (2.13)$$

将 $w_1^{(N)}$ 与 $w_2^{(N)}$ 迭加得 $\bar{w}^{(N)}$, 它完全合乎本文第一节提出的要求。

b. 由式(1.6)确定 $\mu^{(N)}$

式(1.6)中积分本应取遍所有固支段, 但现由对称性, 只需考虑 $x = \frac{a}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{a_0}{2}$ 的一段即可。于是式(1.6)简化为

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial \bar{w}^{(N)}}{\partial x} \delta \frac{\partial^2 w^{(N)}}{\partial x^2} \right)_{x=a/2} dy = 0 \quad (2.14)$$

由式(2.12), (2.13)有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}^{(N)}}{\partial x} \Big|_{x=a/2} &= \left(\frac{\partial w_1^{(N)}}{\partial x} + \frac{\partial w_2^{(N)}}{\partial x} \right)_{x=a/2} \\ &= \frac{1}{2\mu} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{2N-1} a_m \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} B'_{mk} \left[\left(\lambda_k \operatorname{th} \frac{\lambda_k a}{2} - \lambda'_k \operatorname{th} \frac{\lambda'_k a}{2} \right) \cos \alpha_k y \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda_k y}{\operatorname{ch} \lambda_k a} - \frac{\operatorname{ch} \lambda'_k y}{\operatorname{ch} \lambda'_k a} \right) \alpha_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}^{(N)}}{\partial x^2} \Big|_{x=a/2} = \frac{\partial^2 w_1^{(N)}}{\partial x^2} \Big|_{x=a/2} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{2N-1} a_m \frac{\partial^2 f_m}{\partial x^2} \Big|_{x=a/2} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{2N-1} \alpha_m \phi_m \quad (2.16)$$

将式(2.15), (2.16)代入(2.14)后, 化为关于 a_m 的线性方程组

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{2N-1} a_m \int_0^{\frac{a_0}{2}} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} B'_{mk} \left[\left(\lambda_k \operatorname{th} \frac{\lambda_k a}{2} - \lambda'_k \operatorname{th} \frac{\lambda'_k a}{2} \right) \cos \alpha_k y \right. \\ \left. - \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda_k y}{\operatorname{ch} \lambda_k a} - \frac{\operatorname{ch} \lambda'_k y}{\operatorname{ch} \lambda'_k a} \right) \alpha_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \right] \cdot \phi_i dy = 0 \quad (i=1, 3, 5, \dots, 2N-1) \end{aligned} \quad (2.17)$$

其系数矩阵的一般项(舍去因子 $\frac{1}{2\mu}$)是

$$\begin{aligned}
 A'_{im} &= \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} B'_{mk} \int_0^{a_0} \left[\left(\lambda_k \operatorname{th} \frac{\lambda_k a}{2} - \lambda'_k \operatorname{th} \frac{\lambda'_k a}{2} \right) \cos \alpha_k y \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda_k y}{\operatorname{ch} \frac{\lambda_k a}{2}} - \frac{\operatorname{ch} \lambda'_k y}{\operatorname{ch} \frac{\lambda'_k a}{2}} \right) \alpha_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \right] \cdot \phi_i dy \\
 &= \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} B'_{mk} C'_{ik} \left(\lambda_k \operatorname{th} \frac{\lambda_k a}{2} - \lambda'_k \operatorname{th} \frac{\lambda'_k a}{2} \right) \\
 &\quad - \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} B'_{mk} \alpha_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left(\frac{D'_{ik}(\mu)}{\operatorname{ch} \frac{\lambda_k a}{2}} - \frac{E'_{ik}(\mu)}{\operatorname{ch} \frac{\lambda'_k a}{2}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

这里已定义

$$C'_{ik} = \int_0^{a_0} \cos \alpha_k y \cdot \phi_i dy \tag{2.19}$$

$$D'_{ik} = \int_0^{a_0} \operatorname{ch} \lambda_k y \cdot \phi_i dy \tag{2.20}$$

$$E'_{ik} = \int_0^{a_0} \operatorname{ch} \lambda'_k y \cdot \phi_i dy \tag{2.21}$$

基频 $\tilde{\mu}^{(1)}$ 由系数行列式

$$|A'_{im}| = 0 \tag{2.22}$$

的最小特征值确定，这是一个关于 μ 的超越方程。又每个行列式元素均为无穷级数，这是放松边界下限法应用于混合边界问题的一个特点。

c. $a_0 = a/3$ 时的数值结果

将 $a_0 = a/3$ 代入(2.18)式，并引进无量纲频率

$$\mu' = \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \mu = \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \cdot \omega$$

则上述下标变量的具体表达式如下

$$B'_{mk} = \frac{12m}{\pi} (-1)^{\frac{m-1}{2}} B_{mk}; \quad B_{mk} = \begin{cases} \frac{\pi}{36m} (-1)^{\frac{m-1}{2}} & \text{当 } k=3m \text{ 时} \\ \frac{\cos \frac{k\pi}{6}}{9m^2 - k^2} & \text{当 } k \neq 3m \text{ 时} \end{cases} \tag{2.11}'$$

$$C'_{ik} = \frac{3ia}{\pi} (-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{ik}; \quad C_{ik} = \begin{cases} \frac{\pi}{36i} (-1)^{\frac{i-1}{2}} & \text{当 } k=3i \text{ 时} \\ \frac{\cos \frac{k\pi}{6}}{9i^2 - k^2}, & \text{当 } k \neq 3i \text{ 时} \end{cases} \tag{2.19}'$$

$$\left. \begin{aligned} D'_{ik}(\mu) &= \frac{3ia}{\pi} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{k^2+\mu'}}{2} D_{ik}(\mu'); \\ D_{ik}(\mu') &= \frac{1}{9i^2+k^2+\mu'} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{k^2+\mu'}}{6}}{\operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{k^2+\mu'}}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)'$$

$$\left. \begin{aligned} E'_{ik}(\mu) &= \frac{3ia}{\pi} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{k^2-\mu'}}{2} E_{ik}(\mu'); \\ E_{ik}(\mu') &= \frac{1}{9i^2+k^2-\mu'} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{k^2-\mu'}}{6}}{\operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{k^2-\mu'}}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.21)'$$

代回到(2.18)式, 可得

$$A'_{im} = \frac{12m}{\pi} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{3ia}{\pi} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \frac{a}{\pi} \cdot A_{im} \quad (2.18)'$$

其中

$$\begin{aligned} A_{im} &= \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} B_{mk} C_{ik} \left(\sqrt{k^2+\mu'} \operatorname{th} \frac{\pi\sqrt{k^2+\mu'}}{2} - \sqrt{k^2-\mu'} \operatorname{th} \frac{\pi\sqrt{k^2-\mu'}}{2} \right) \\ &\quad - \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} B_{mk} (D_{ik}(\mu') - E_{ik}(\mu')) k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \\ &= A_{im}^{(1)} - A_{im}^{(2)} \end{aligned}$$

由行列式性质易知 $|A'_{im}|=0$ 等价于

$$|A_{im}|=0 \quad (2.22)'$$

由(2.11)', (2.18)' ~ (2.22)' 就可以排出程序上机计算。

参考周边固定板的 μ'_1 值 (=3.646), 我们以 $\mu'_1=3.4$ 与 $\mu'_1=3.6$ 作为初始近似值, 用割线法求关于 μ' 的超越方程(2.22)' 的根。迭代过程中用高斯主元消去法求行列式的值。 A_{im} 分为两部分计算, 其中 $A_{im}^{(1)}$ 收敛较慢 ($o(k^{-5})$), 所取项数要多一些。又 $k=1$ 时出现复变量 $\sqrt{1-\mu'}$, 可利用尤拉公式化为实变量 $\sqrt{\mu'-1}$ 。采用双精度型数在 M-150 型机上计算, 结果如表1。

表 1

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
项数 k	(41.21)	(41.21)	(41.21)	(41.21)	(41.21)	(41.21)	(41.21)	(101.51)	(101.51)
μ'_1	3.2920	3.3820	3.4113	3.4257	3.4343	3.4402	3.4452	3.4467	3.4489

注 (41.21) 表示 $A_{im}^{(1)}$ 算到 $k=41$; $A_{im}^{(2)}$ 算到 $k=21$ 。

若要进一步提高精度, 我们必须取更高阶的行列式计算, 这样计算每个元素 A_{im} 所取的项数还要大大增加, 否则将导致 μ'_1 值严重偏移, 如图 6 中虚线所示。这反映了高阶行列式的

病态性质，因此使用本法 N 不宜太大，好在 $N=4, 5$ 时已有相当好的近似。

2. 里兹法求基频上限值

因拟采用多项式的试函数，故先将问题无量纲化。令

$$\hat{w} = w/a, \quad \hat{x} = x/a, \quad \hat{y} = y/a, \quad \hat{a}_0 = a_0/a, \quad \hat{\lambda} = \mu^2 a^4/16$$

对于图2矩形板，特征值问题的最小势能原理给出如下的泛函（也用无量纲量表示）：

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint (\nabla^2 \hat{w})^2 d\hat{x}d\hat{y} - \hat{\lambda} \iint \hat{w}^2 d\hat{x}d\hat{y} \quad (2.23)$$

这里要求 \hat{w} 事先满足位移边界条件式(1.2)和(1.3)。

对于周边固定方板，人们早已发现如下满足位移边界条件的试函数

$$\hat{w}_1 = (\hat{x}^2 - 1)^2 (\hat{y}^2 - 1)^2 (A_1 + A_2 \hat{x}^2 + A_3 \hat{y}^2 + \dots)$$

但图2板四角已改为简支，这些边界上转角不再为零，为此我们再在 \hat{w}_1 的基础上迭加如下试函数

$$\hat{w}_2 = \begin{cases} 0, & |\hat{x}| \leq \hat{a}_0 \text{ 或 } |\hat{y}| \leq \hat{a}_0 \\ (\hat{x}^2 - \hat{a}_0^2)^2 (\hat{y}^2 - \hat{a}_0^2)^2 (\hat{x}^2 - 1) (\hat{y}^2 - 1) (B_1 + B_2 \hat{x}^2 + B_3 \hat{y}^2 + \dots), & \text{其它情况下} \end{cases}$$

\hat{w}_2 是图5所示板的可能挠度。此板中 $|\hat{x}| \leq \hat{a}_0$ 或 $|\hat{y}| \leq \hat{a}_0$ 的区域被全部刚化（图5阴影区），而它剩下的边界段是被简支的。

于是 $\hat{w} = \hat{w}_1 + \hat{w}_2$ 就刚好满足了全部位移边界条件。而且 \hat{w}_2 在 $|\hat{x}| = |\hat{y}| = \hat{a}_0$ 的几条线上保证了挠度、转角连续，从而 \hat{w} 在整个板上连续且有连续的一阶导数，即 $\hat{w} \in H^2$ (Sobolev 空间)，它代入式(2.23)，能保证泛函有意义。

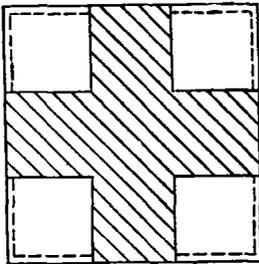


图 5

设 \hat{w}_1 与 \hat{w}_2 分别取 M, N 项，即是取

$$\hat{w}_1 = \sum_{i=1}^M A_i \varphi_i, \quad \hat{w}_2 = \sum_{j=1}^N B_j \psi_j$$

代入式(2.23)，由 $\delta \Pi = 0$ 得到线性方程组

$$K \vec{C} = \hat{\lambda} D \vec{C} \quad (2.24)$$

其中， K 是刚度矩阵， D 是质量矩阵， \vec{C} 是待定常数构成的向量。

它们的表达式如下

$$K = \begin{bmatrix} K_{MM} & K_{MN} \\ K_{MN}^T & K_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\iint \nabla^2 \varphi_p \nabla^2 \varphi_i \right)_{M \times M} & \left(\iint \nabla^2 \varphi_p \nabla^2 \psi_j \right)_{M \times N} \\ \left(\iint \nabla^2 \psi_q \nabla^2 \varphi_i \right)_{N \times M} & \left(\iint \nabla^2 \psi_q \nabla^2 \psi_j \right)_{N \times N} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{MM} & D_{MN} \\ D_{MN}^T & D_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\iint \varphi_p \varphi_i \right)_{M \times M} & \left(\iint \varphi_p \psi_j \right)_{M \times N} \\ \left(\iint \psi_q \varphi_i \right)_{N \times M} & \left(\iint \psi_q \psi_j \right)_{N \times N} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\vec{C} = \{A_1, A_2, \dots, A_M, B_1, B_2, \dots, B_N\}^T$$

1) 积分元 $d\hat{x}d\hat{y}$ 省略未写。

式(2.24)是广义特征值问题, 解法甚多. 现只求基频, 且矩阵阶数不高, 我们将(2.24)化为

$$K^{-1}D\vec{C} = \frac{1}{\lambda} \cdot \vec{C}$$

再用幂法求解. 主要计算量在形成 K, D 上. 当 $a_0 = \frac{a}{3}$ 时, 所得结果如表 2.

表 2

近似级数	1	2	3	4
$M=N=$	1	3	5	7
$\hat{\lambda}$	80.3017	79.8803	78.7111	78.0445
$\mu' (=4\sqrt{\hat{\lambda}}/\pi^2)$	3.6318	3.6223	3.5957	3.5804

又文献[3]给出实验值 $\mu' = 3.556$. 将上述结果集中绘于图 6. 可以看到上下限值逐步靠近, 平均值稳定在 3.50, 而实验值较平均值偏高.

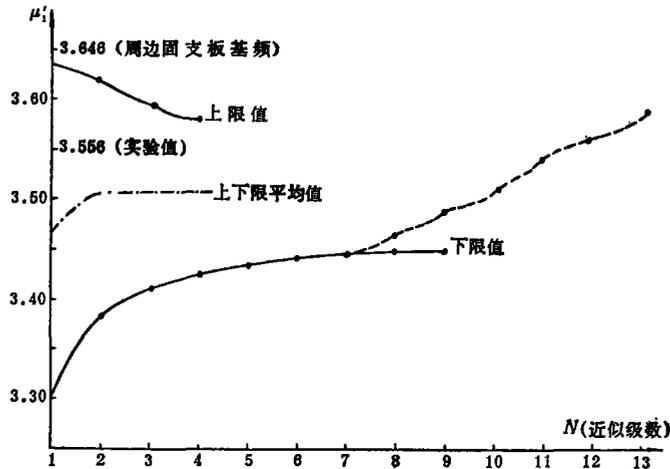


图 6

----- 表示下限法用(41, 21)项计算 A_{1m} 时, μ_1' 偏离正确值的情况

三、考虑截断误差后力法迭加法的解实质是一种下限解

现在我们来讨论求解矩形板常用的力法迭加法^[4], 对于简支与固支的矩形板, 以四边简支板为基本系, 假定它的固支段上分布弯矩为具有待定系数的无穷级数, 找出相应的试函数(一般用 Levy 法), 然后按固定段上转角为零条件确定这些系数, 得到问题的解. 这种方法是结构力学中力法的推广. 它与本文第一节提出的放松边界下限法相比, 有两点不同. 首先, 它假定分布弯矩完全逼近真实弯矩, 因而分布弯矩必然表为无穷级数, 相应的解也是无穷级数, 这相当于将本文第一节中的 N 改为 $+\infty$; 其次, 它使用固支段转角为零的判据来确定待定系数(从这个意义上讲, 它是一种精确解法), 而本文第一节是由式(1.6)来确定. 一般情况下, 力法迭加法得到的确定待定系数的线性方程组, 是无穷维且相互耦合的. 实际

求解时总是取级数的前 N 项, 将相应的方程组化为有穷维后求解. 经这样截断处理后, 这种方法实质上与第一节的方法完全相同. 于是我们得到一个有实际应用价值的结论: 考虑级数截断误差后的力法迭加法的数值解实质上是一种下限解. 由于 N 并不能取得太高, 这个结论是很值得注意的.

作为例证, 我们指出, 文献[3]曾用力法迭加法(由边界上作用单个集中弯矩的解出发迭加)求解图2($a_0 = a/3$)板的基频, 导出的计算基频的最后方程([3]中式(33b))¹⁾与我们的公式(2.22)'完全一致²⁾, 具体数值结果也仅在第三位小数上有所区别($N=8$ 时, [3]算得 $\mu_1' = 3.442$).

与[3]比较, 本文推导方法简捷一些. 虽然本文第二节只就对称情况提出计算公式, 但所用的求上下限的两种方法原则上都适用于图1所示的固支与简支任意混合的情况.

致谢: 衷心感谢王磊教授对本文工作的支持.

附录 Levy 法求 f_m

$$\text{令 } f_m = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} X_k^{(m)}(x) \cos \frac{k\pi}{a} y \quad (\text{a})$$

则 $y = \pm \frac{a}{2}$ 上的边界条件(2.7), (2.8)已满足. 再代入(2.6)得关于 X_k (暂略去上标 m)的方程

$$X_k^{(4)} - 2\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 X_k'' + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^4 X_k - \mu^2 X_k = 0 \quad (\text{b})$$

由(2.7), (2.9)导出相应的边界条件(ϕ_m 已用式(2.10)表示)是

$$X_k \Big|_{x=\pm a/2} = 0 \quad (\text{c})$$

$$X_k' \Big|_{x=\pm a/2} = B_{m,k} \quad (\text{d})$$

令 $\frac{k\pi}{a} = \alpha_k$, 再设 $X_k = A \exp(\lambda_k x)$, 代入(b)有

$$\lambda_k^4 - 2\alpha_k^2 \lambda_k^2 - (\mu^2 - \alpha_k^4) = 0$$

解之得 $\lambda_k^2 = \alpha_k^2 \pm \mu$. 于是若令 $\lambda_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \mu}$, $\lambda_k' = \sqrt{\alpha_k^2 - \mu}$ 则(b)的解为

$$X_k = A \operatorname{ch} \lambda_k x + B \operatorname{sh} \lambda_k x + C \operatorname{ch} \lambda_k' x + D \operatorname{sh} \lambda_k' x \quad (\text{e})$$

由对称性可知

$$B = D = 0$$

由条件(c)得

$$A \operatorname{ch} \frac{\lambda_k a}{2} + C \operatorname{ch} \frac{\lambda_k' a}{2} = 0$$

所以

$$C = -A \operatorname{ch} \frac{\lambda_k a}{2} / \operatorname{ch} \frac{\lambda_k' a}{2}$$

于是可记

$$X_k^{(m)} = A_{m,k} \left(\operatorname{ch} \frac{\lambda_k a}{2} \operatorname{ch} \lambda_k x - \operatorname{ch} \frac{\lambda_k' a}{2} \operatorname{ch} \lambda_k' x \right) \quad (\text{f})$$

1) [3]发表的(33b)式有错, 系数18应改为9, 最后一项中 $\sqrt{k^2 + \mu}$ 应改为 $\sqrt{k^2 - \mu}$, 这一点, 已用计算机试算证明. 从[3]计算结果看, 实际计算公式还是正确的.

2) 作适当初等变换, 可以化为一致.

由(f)式及条件(d)可得

$$A_{mk} (\lambda_k^2 - \lambda'_k{}^2) \operatorname{ch} \frac{\lambda_k a}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda'_k a}{2} = B'_{mk}$$

注意 $\lambda_k^2 - \lambda'_k{}^2 = 2\mu$, 便得

$$A_{mk} = \frac{B'_{mk}}{2\mu \operatorname{ch} \frac{\lambda_k a}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda'_k a}{2}}$$

代入(f)式后再代入(a)式, 得到

$$f_m = \frac{1}{2\mu} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} B'_{mk} \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda_k x}{\operatorname{ch} \frac{\lambda_k a}{2}} - \frac{\operatorname{ch} \lambda'_k x}{\operatorname{ch} \frac{\lambda'_k a}{2}} \right) \cos \alpha_k y \quad (g)$$

由式(g)容易得到式(2.12).

参 考 文 献

- [1] Weinstein, A. and W. Z. Chien (钱伟长), On the vibrations of a clamped plate under tension, *Quart. Appl. Math.*, 1(1943), 61—68.
- [2] 钱伟长, 《变分法与有限元》(上册), 科学出版社(1980).
- [3] Kurata, M. and H. Okamura, Natural vibrations of partially clamped plates, *ASCE, EM.*, (1963), 3561.
- [4] 徐芝纶, 《弹性力学》(下册), 人民教育出版社(1979), 28.

The Application of Weinstein-Chien's Method—The Upper and Lower Limits of Fundamental Frequency of Rectangular Plates with Edges Which Are a Mixture of Simply Supported Portions and Clamped Portions

Cheng Zheng-qing

(Hunan University, Changsha)

Abstract

In this paper, the method of relaxed boundary condition is applied to rectangular plates with edges which are a mixture of simply supported portions and clamped portions, so that the lower limit of fundamental frequency of such plates is evaluated. A kind of polynomial satisfying the displacement boundary conditions is designed, which makes it possible to evaluate the upper limit of fundamental frequency by Ritz method. The practical calculation examples solved by these methods have given the satisfactory results. At the end of this paper, it is pointed out that the so-called exact solution of such plates usually evaluated by the force superposition method is essentially a kind of the lower limit of solution, if the truncated error of series which rises in actual calculation is considered.