应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

刚体有限位移螺旋张量的存在性与唯一性定理

余 桑

（华南工学院，1983年1月4日收到）

摘　要

本文提出并用旋量算法证明了刚体有限位移螺旋张量的存在性与唯一性定理．而且由此获得了以刚体有限位移数据来求这种螺旋张量的公式．

一、引　言

Chasle定理(1830)有着不可低估的重要性，它表明：刚体的任意有限位移都可化为有限螺旋运动．正如Dimentberg[1]和Roth及其合作者[2,3,4,11]所显示的那样，它除了使刚体有限位移在概念上得到简化外，在空间机构的分析和综合方面也有着重要的应用．尽管在经典性论文中（如Whittaker[5]和Pars[6]的文章），Chasle定理已得到直观的证明，但螺旋张量却是最近才有的，它可使整个Chasle定理具体化．Gibbs[7]首先给出了形如

$$\mathbf{R}=(1-\cos A)\mathbf{aa}+\cos A\mathbf{U}+\sin A\mathbf{U}\wedge\mathbf{a} \tag{1.1}$$

的转动张量，其中，$\mathbf{a}$ 为转轴，A 为转角，$\mathbf{U}$ 为单位张量．最近，Dimentberg[1]和Yu[8]独立地把它推广，从而得到“螺旋张量”

$$\boldsymbol{\psi}=(1-\cos\theta)\boldsymbol{\alpha\alpha}+\cos\theta\mathbf{I}+\sin\theta\mathbf{I}\wedge\boldsymbol{\alpha} \tag{1.2}$$

其中

$\boldsymbol{\alpha}$＝单位对偶线矢量＝$\mathbf{a}+\epsilon\mathbf{m}$，$\mathbf{m}=\mathbf{r}\wedge\mathbf{a}$，$\epsilon^2=0$；

θ＝对偶转角＝$A+\epsilon s$，s＝“垂直距离”；

$\mathbf{I}$＝单位对偶张量．

[1]中获得(1.2)式的方法充其量只有启发性的意义，它没表明怎样才可以由刚体位移求得 $\boldsymbol{\psi}$ 以及这样得到的螺旋张量是否唯一．下面第二节中将要讨论到在某些情况下，螺旋张量也可能并不唯一．在本文中，我们要证明螺旋张量的基本理论，建立它的存在性和唯一性，并在这过程中获得由刚体位移数据求螺旋张量的公式．我们将利用对偶矢量李代数与Gibbs矢量李代数的同构性，所用的符号与[8]～[10]中的符号相同，附录中给出了一些符号的说明．

二、螺旋张量的形式

由定义，两条直线 λ_1 和 λ_2 的旋量积

$$\lambda_1\wedge\lambda_2=\sin\theta\,\alpha \tag{2.1}$$

给出了它们间的公法线 α. 现由 $\lambda_1\wedge$(2.1)，得

$$\lambda_2=\cos\theta\,\lambda_1+\sin\theta\,\alpha\wedge\lambda_1 \tag{2.2}$$

利用单位对偶张量 I，可把(2.2)写为

$$\lambda_2=(\cos\theta\mathsf{I}+\sin\theta\,\mathsf{I}\wedge\alpha)\cdot\lambda_1 \tag{2.3}$$

对偶张量

$$\psi=\cos\theta\,\mathsf{I}+\sin\theta\mathsf{I}\wedge\alpha \tag{2.4}$$

可称为螺旋轴为 α 的螺旋张量，它使 λ_1 绕 α 旋进了对偶角 θ，使之移到位置 λ_2上.

(2.4)式所示的螺旋张量只使与螺旋轴正交的线 λ 旋进 θ，这时

$$\lambda\cdot\alpha=0 \tag{2.5}$$

对于不满足(2.5)式的线，它就失效了. 因此我们有下面的命题：

命题 能把任意直线绕 α 转过对偶角 θ 的一般螺旋张量为

$$\psi(\alpha,\theta)=(1-\cos\theta)\alpha\alpha+\cos\theta\mathsf{I}+\sin\theta\mathsf{I}\wedge\alpha \tag{2.6}$$

这时不管(2.5)式满足与否上式都有效.

证 任意直线 λ 都可分解为两条直线，一条与 α 共轴，一条垂直于 α，即

$$\lambda=(\alpha\cdot\lambda)\alpha+v\wedge\alpha \tag{2.7}$$

其中

$$v=\alpha\wedge\lambda \tag{2.8}$$

把(2.8)代入(2.7)，就可看到(2.7)是一恒等式. 这样，

$$\psi\cdot\lambda=(\alpha\cdot\lambda)\alpha+\cos\theta v\wedge\alpha+\sin\theta v=\mu \tag{2.9}$$

根据(2.7)与(2.8)显然可见：在变换 ψ 下，λ中与α共轴的分量保持不变，但与α垂直的分量$v\wedge\alpha$却绕α旋进了对偶角θ.此外还可证明

$$\mu\cdot\mu=1 \tag{2.10}$$

因此ψ就是所求的螺旋张量. 证毕.

要注意，上面的命题仅仅建立了图象性地描述螺旋运动的螺旋张量的形式，它既没表明如何才能由刚体位移求得这种张量，也没建立它的唯一性. 假定上述的 λ 是刚体中的一条线，经过有限位移后，刚体把 λ 带到了 μ 的位置上. 这样，如果 ψ_1 是相应于这有限位移的螺旋张量，则必有

$$\psi_1\cdot\lambda=\mu \tag{2.11}$$

另一方面，可能存在也满足(2.11)式的另一螺旋张量ψ_2，即

$$\psi_2\cdot\lambda=\mu \tag{2.12}$$

因而就必有

$$(\psi_1-\psi_2)\cdot\lambda=0 \tag{2.13}$$

然而(2.13)式并不能保证

$$\psi_1-\psi_2=0 \tag{2.14}$$

因而满足(2.11)式的张量不一定唯一. 其主要原因如下：

我们可以绕λ与μ的相互垂线把λ旋进到μ，也可构造一个如Tsai和 Roth[11]所给出的“纯转动旋量”以达到同一目的。在以上两种情况下，由于一条直线并不能唯一地确定刚体的位形，因此导至了不能构造出唯一的螺旋张量，而要达到此目的需要有两条直线。这是因为一条直线需要4个实数来确定，而刚体中的两条直线间的关系为

$$\lambda_1\cdot\lambda_2=\text{常数}$$

所以它们给出了六个无关的实数（相应于刚体的六个自由度）。

三、基 本 原 理

定理 令刚体中两条互不平行的直线λ和μ随刚体移到了它们的新位置λ_1和μ_1上。这时，存在着唯一的螺旋张量

$$\psi=(1-\cos\theta)\alpha\alpha+\cos\theta\mathbf{I}+\sin\theta\mathbf{I}\wedge\alpha \tag{3.1}$$

它能完成这一巳知的刚体位移。(3.1)式中的转动对偶角θ和螺旋轴α由下面两式求得，

$$1+2\cos\theta=\mathrm{Tr}\psi=\frac{1}{(\lambda\wedge\mu)^2}[\lambda_1\cdot(\mu\wedge\nu)+\mu_1\cdot(\nu\wedge\lambda)+\nu_1\cdot(\lambda\wedge\mu)] \tag{3.2}$$

$$-\frac{1}{2}\sin\theta\alpha=\mathrm{Scr}\psi=\frac{1}{2(\lambda\wedge\mu)^2}[\lambda_1\wedge(\mu\wedge\nu)+\mu_1\wedge(\nu\wedge\lambda)+\nu_1\wedge(\lambda\wedge\nu)] \tag{3.3}$$

其中

$$\nu=\lambda\wedge\mu,\qquad \nu_1=\lambda_1\wedge\mu_1 \tag{3.4}$$

此外，如果β和γ是其它任意两条互不平行的直线，β_1和γ_1是它们位移后各自的位置，那么θ与α也可由下面两式求得，

$$1+2\cos\theta=\frac{1}{(\beta\wedge\gamma)^2}[\beta_1\cdot(\gamma\wedge\zeta)+\gamma_1\cdot(\zeta\wedge\beta)+\zeta_1\cdot(\beta\wedge\gamma)] \tag{3.5}$$

$$-\frac{1}{2}\sin\theta\,\alpha=\frac{1}{2(\beta\wedge\gamma)^2}[\beta_1\wedge(\gamma\wedge\zeta)+\gamma_1\wedge(\zeta\wedge\beta)+\zeta_1\wedge(\beta\wedge\gamma)] \tag{3.6}$$

其中

$$\zeta=\beta\wedge\gamma,\qquad \zeta_1=\beta_1\wedge\gamma_1 \tag{3.7}$$

在以上的意义上，表达式(3.1)与两条直线的选择无关。

要证明以上定理，就需要下面的引理。

引理1 给出对偶张量ψ和3条直线(λ_i)，$i=1,\ 2,\ 3$，并且使$\lambda_1\wedge\lambda_2\cdot\lambda_3\neq0$，这样就有

$$(\psi\cdot\lambda_1)\wedge(\psi\cdot\lambda_2)\cdot(\psi\cdot\lambda_3)=(\det\psi)\lambda_1\wedge\lambda_2\cdot\lambda_3 \tag{3.8}$$

证 令

$$\psi\cdot\lambda_i=\mu_i\qquad(i=1,\ 2,\ 3) \tag{3.9}$$

用λ^i从右边张量乘(3.9)式，得

$$\psi\cdot\lambda_i\lambda^i=\mu_i\lambda^i \tag{3.10}$$

但$\lambda_i\lambda^i=\mathbf{I}$，因此

$$\psi=\mu_i\lambda^i \tag{3.11}$$

所以由定义得

$$\det\psi=(\mu_1\wedge\mu_2\cdot\mu_3)(\lambda^1\wedge\lambda^2\cdot\lambda^3) \tag{3.12}$$

把(3.9)代入(3.12)并注意到

$$\lambda^1\wedge\lambda^2\cdot\lambda^3=(\lambda_1\wedge\lambda_2\cdot\lambda_3)^{-1} \tag{3.13}$$

这就证明了此引理.

引理 2 对一个非奇异的对偶张量ψ和任意两条不平行的直线λ_1和λ_2，有

$$[(\det\psi)(\psi_c)^{-1}]\cdot(\lambda_1\wedge\lambda_2)=(\psi\cdot\lambda_1)\wedge(\psi\cdot\lambda_2) \tag{3.14}$$

证 令

$$\psi\cdot\lambda_i=\mu_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{3.15}$$

则

$$\psi^{-1}\cdot\mu_i=\lambda_i \tag{3.16}$$

因而

$$\psi^{-1}\cdot\mu_i\mu^i=\lambda_i\mu^i \tag{3.17}$$

这等价于

$$\psi^{-1}=\frac{1}{v}[\lambda_1(\mu_2\wedge\mu_3)+\lambda_2(\mu_3\wedge\mu_1)+\lambda_3(\mu_1\wedge\mu_2)] \tag{3.18}$$

其中

$$v=\mu_1\wedge\mu_2\cdot\mu_3$$

由$\lambda_1\wedge\lambda_2\cdot(3.18)$，得

$$(\lambda_1\wedge\lambda_2)\cdot\psi^{-1}=\frac{\lambda_1\wedge\lambda_2\cdot\lambda_3}{v}(\mu_1\wedge\mu_2) \tag{3.19}$$

再由(3.17)式得

$$\psi=\mu_i\lambda^i$$

因而

$$\det\psi=(\mu_1\wedge\mu_2\cdot\mu_3)(\lambda^1\wedge\lambda^2\cdot\lambda^3) \tag{3.20}$$

把(3.15)和(3.20)代进(3.19)，就得到(3.14)式.

引理 3 对偶张量ψ保持刚性的充要条件为

$$\psi_c=\psi^{-1} \tag{3.21}$$

证 令λ和μ是刚体中的任意两条直线，把ψ作用于它们，其结果为

$$\psi\cdot\lambda=\lambda_1, \qquad \psi\cdot\mu=\mu_1$$

这样

$$(\psi\cdot\lambda)\cdot(\psi\cdot\mu)=\lambda_1\cdot\mu_1$$

即

$$\lambda\cdot(\psi_c\cdot\psi)\cdot\mu=\lambda_1\cdot\mu_1 \tag{3.22}$$

如果刚性始终保持，则必有

$$\lambda\cdot\mu=\lambda_1\cdot\mu_1 \tag{3.23}$$

因而由(3.22)和(3.23)得

$$\psi_c\cdot\psi=I \tag{3.24}$$

它等价于(3.21)式. 因此(3.21)式的条件显然是必要的.

另一方面，假定(3.24)式成立，则必有

$$\lambda\cdot\psi_c\cdot\psi\cdot\mu=\lambda\cdot\mu$$

由此得

$$\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\mu} \tag{3.25}$$

因而条件是充分的.

引理 4 给出任意对偶张量$\boldsymbol{\psi}$和三条直线$(\boldsymbol{\lambda}_i)$，$i=1$，2，3，使$\boldsymbol{\lambda}_1\wedge\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\boldsymbol{\lambda}_3\neq 0$. 如果

$$\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{\lambda}_i=0 \qquad \forall i, \tag{3.26}$$

则

$$\boldsymbol{\psi}=0$$

证 令$\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\alpha}_k\boldsymbol{\beta}_k$，那么如果(3.26)式成立则必有

$$\boldsymbol{\alpha}_k(\boldsymbol{\beta}_k\cdot\boldsymbol{\lambda}_i)=0 \tag{3.27}$$

在 (3.27) 式中，如果 $\boldsymbol{\beta}_k\cdot\boldsymbol{\lambda}_i\neq 0$，则有 $\boldsymbol{\alpha}_k=0$，因而 $\boldsymbol{\psi}=0$. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_k\neq 0$，则 $\boldsymbol{\beta}_k\cdot\boldsymbol{\lambda}_i=0$；但是$\boldsymbol{\lambda}_1\wedge\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\boldsymbol{\lambda}_3\neq 0$，因而$\boldsymbol{\beta}_k=0$，所以还是有$\boldsymbol{\psi}=0$. 于是在所有情况下都有 $\boldsymbol{\psi}=0$.

下面证明基本定理.

令$\boldsymbol{\psi}$为对偶张量，它使

$$\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_1 \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_1 \tag{3.29}$$

现令

$$\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\lambda}\wedge\boldsymbol{\mu} \tag{3.30}$$

如果刚性得到保持，那么共法线$\boldsymbol{\nu}$必然被移到它的新位置$\boldsymbol{\nu}_1$，使

$$\boldsymbol{\nu}_1=\boldsymbol{\lambda}_1\wedge\boldsymbol{\mu}_1 \tag{3.31}$$

它与

$$(\boldsymbol{\lambda}\wedge\boldsymbol{\mu})^2=(\boldsymbol{\lambda}_1\wedge\boldsymbol{\mu}_1)^2 \tag{3.32}$$

一道构成了刚性条件.

如果$\boldsymbol{\psi}$是一“螺旋张量”，就必有

$$\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\nu}_1 \tag{3.33}$$

显然，对偶张量

$$\boldsymbol{\psi}=u[\boldsymbol{\lambda}_1(\boldsymbol{\mu}\wedge\boldsymbol{\nu})+\boldsymbol{\mu}_1(\boldsymbol{\nu}\wedge\boldsymbol{\lambda})+\boldsymbol{\nu}_1(\boldsymbol{\lambda}\wedge\boldsymbol{\mu})] \tag{3.34}$$

满足(3.28)、(3.29)、(3.33)式，这里

$$u=(\boldsymbol{\lambda}\wedge\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\nu})^{-1}=(\boldsymbol{\lambda}\wedge\boldsymbol{\mu})^{-2}$$

为了保证(3.34)式中的$\boldsymbol{\psi}$是螺旋张量（即，能保持刚性的对偶张量），根据引理 3，必须证明

$$\boldsymbol{\psi}_c=\boldsymbol{\psi}^{-1} \tag{3.35}$$

现由(3.28)$\wedge$(3.29)$\cdot$(3.33)，得

$$(\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{\lambda})\wedge(\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{\mu})\cdot(\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{\nu})=\boldsymbol{\lambda}_1\wedge\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\nu}_1 \tag{3.36}$$

因而由引理 1 得

$$(\det\boldsymbol{\psi})\boldsymbol{\lambda}\wedge\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\lambda}_1\wedge\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\nu}_1 \tag{3.37}$$

考虑到(3.32)式，有

$$\det\boldsymbol{\psi}=1 \tag{3.38}$$

再由(3.30)、(3.31)、(3.33)，得

$$\boldsymbol{\psi}\cdot(\boldsymbol{\lambda}\wedge\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{\lambda}_1\wedge\boldsymbol{\mu}_1$$

即

$$\psi\cdot(\lambda\wedge\mu)=(\psi\cdot\lambda)\wedge(\psi\cdot\mu) \tag{3.39}$$

但由引理2，有

$$(\psi\cdot\lambda)\wedge(\psi\cdot\mu)=[(\det\psi)(\psi_o)^{-1}]\cdot(\lambda\wedge\mu) \tag{3.40}$$

这样，由(3.38)、(3.39)、(3.40)就导出(3.35)式，因而(3.34)式所表达的ψ是螺旋张量。

现在，我们希望把ψ表达为

$$\psi=(1-\cos\theta)\alpha\alpha+\cos\theta\mathrm{I}+\sin\theta\mathrm{I}\wedge\alpha \tag{3.41}$$

其中θ称为对偶转角，α称为ψ的螺旋轴．如果(3.41)式存在的话（即如果$\psi(\alpha,\ \theta)$存在），就必然有

$$(1-\cos\theta)\alpha\alpha+\cos\theta\mathrm{I}+\sin\theta\mathrm{I}\wedge\alpha=u[\lambda_1(\mu\wedge\nu)+\mu_1(\nu\wedge\lambda)+\nu_1(\lambda\wedge\mu)] \tag{3.42}$$

由Tr(3.42)，得

$$1+2\cos\theta=u[\lambda_1\cdot(\mu\wedge\nu)+\mu_1\cdot(\nu\wedge\lambda)+\nu_1\cdot(\lambda\wedge\mu)] \tag{3.43}$$

由Scr(3.42)，得

$$-\frac{1}{2}\sin\theta\alpha=\frac{u}{2}[\lambda_1\wedge(\mu\wedge\nu)+\mu_1\wedge(\nu\wedge\lambda)+\nu_1\wedge(\lambda\wedge\mu)] \tag{3.44}$$

由(3.43)和(3.44)完全可求得α和θ，因而就证明了(3.41)式所表示的螺旋张量的存在性．

为了证明ψ的唯一性，令ψ'是另一对偶张量，而且也能完成相同的刚体位移．这样，就必有

$$\psi'\cdot\lambda=\lambda_1 \tag{3.45}$$

$$\psi'\cdot\mu=\mu_1 \tag{3.46}$$

$$\psi'\cdot\nu=\nu_1 \tag{3.47}$$

结合(3.28)、(3.29)、(3.33)，得

$$(\psi-\psi')\cdot\lambda=0,\ (\psi-\psi')\cdot\mu=0,\ (\psi-\psi')\cdot\nu=0 \tag{3.48}$$

由于$\lambda\wedge\mu\cdot\nu\neq0$，因而由引理4可见(3.48)式意味着

$$\psi-\psi'=0$$

可见ψ是唯一的．

为了证明(3.41)式所表达的螺旋张量与所选择的两条互不平行直线无关，让我们研究另外两条互不平行的直线l和m．它们被螺旋张量

$$\psi'=(1-\cos\phi)\beta\beta+\cos\phi\ \mathrm{I}+\sin\phi\ \mathrm{I}\wedge\beta \tag{3.49}$$

移到新位置l_1和m_1．用与前面相同的推证可得

$$1+2\cos\phi=\mathrm{Tr}\psi=v[\mathrm{l}_1\cdot(\mathrm{m}\wedge\mathrm{n})+\mathrm{m}_1\cdot(\mathrm{n}\wedge\mathrm{l})+\mathrm{n}_1\cdot(\mathrm{l}\wedge\mathrm{m})] \tag{3.50}$$

$$-\frac{1}{2}\sin\phi=\mathrm{Scr}\psi=v[\mathrm{l}_1\wedge(\mathrm{m}\wedge\mathrm{n})+\mathrm{m}_1\wedge(\mathrm{n}\wedge\mathrm{l})+\mathrm{n}_1\wedge(\mathrm{l}\wedge\mathrm{m})] \tag{3.51}$$

其中

$$\mathrm{n}=\mathrm{l}\wedge\mathrm{m},\ \mathrm{n}_1=\mathrm{l}_1\wedge\mathrm{m}_1,\ v=\mathrm{l}\wedge\mathrm{m}\cdot\mathrm{n}$$

由于螺旋张量是唯一的，因而必有

$$\psi=\psi'$$

即

$$\mathrm{Tr}\psi=\mathrm{Tr}\psi' \tag{3.52}$$

$$\mathrm{Scr}\psi=\mathrm{Scr}\psi' \tag{3.53}$$

因而

$$\theta=\phi,\ \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}$$

可见各种选择的l，m都确定同一螺旋张量。证毕。

四、讨 论

上述定理除了其内蕴的意义外，还提供了由两条非平行直线的初始位置和最终位置计算螺旋张量的方法。当已知任意三个非共线点的位移后，由于我们可以把这三个点连接而得到三条互不平行的直线，所以这些直线位移后的位置也可求得，因而也一样能计算其螺旋张量。

与等价于螺旋张量的矩阵表达方式相比，(3.1)式中螺旋张量的形式在应用上显得特别简单。例如，螺旋张量的逆表示在相反方向上的螺旋运动，因而只需用$-\theta$取代θ和用$-\boldsymbol{\alpha}$取代$\boldsymbol{\alpha}$后就得到

$$\boldsymbol{\psi}^{-1}=(1-\cos\theta)\boldsymbol{\alpha\alpha}+\cos\theta\,\mathbf{I}-\sin\theta\,\mathbf{I}\wedge\boldsymbol{\alpha}$$

而矩阵的逆运算就往往复杂得多。

附 录

使用符号说明

对偶张量$\boldsymbol{\psi}$常用以下形式表达：

$$\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}_i,\qquad \boldsymbol{\psi}_C=\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\alpha}_i \tag{1}$$

其中$\boldsymbol{\alpha}_i$和$\boldsymbol{\beta}_i$是对偶矢量．“求迹”运算表为“Tr”，“求行列式”运算表为“det”，它们通过公式

$$\mathrm{Tr}\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\beta}_i \tag{2}$$

$$\det\boldsymbol{\psi}=(\boldsymbol{\alpha}_1\wedge\boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{\alpha}_3)(\boldsymbol{\beta}_1\wedge\boldsymbol{\beta}_2\cdot\boldsymbol{\beta}_3) \tag{3}$$

把对偶张量变换为对偶数．“旋”运算表为“Scr”，它通过公式

$$\mathrm{Scr}\ \boldsymbol{\psi}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_i\wedge\boldsymbol{\beta}_i \tag{4}$$

把对偶张量变换为轴对偶矢量．与$(\boldsymbol{\alpha}_i)$互逆的量$(\boldsymbol{\alpha}^i)$由下式计算：

$$\boldsymbol{\alpha}^1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2\wedge\boldsymbol{\alpha}_3}{v},\quad \boldsymbol{\alpha}^2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3\wedge\boldsymbol{\alpha}_1}{v},\quad \boldsymbol{\alpha}^3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1\wedge\boldsymbol{\alpha}_2}{v} \tag{5}$$

其中$v=\boldsymbol{\alpha}_1\wedge\boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{\alpha}_3$．这样，单位张量就可表为

$$\mathbf{I}=\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}^i=\boldsymbol{\alpha}^i\boldsymbol{\alpha}_i \tag{6}$$

本文原文用英文写成，由梁礼平译成中文。

参 考 文 献

[1] Dimentberg, F., *The Theory of Screws and Its Applications*(in Russian), Nauka, Moscow, (1978).

[2] Roth, B., The kinematics of motion through finitely separated positions, *J Appl. Mech.*, 34, 3, *Trans. ASME*, *Series* E., 89, (1967), 591—598.

[3] Roth, B., Finite position theory applied to mechanism synthesis, *J. Appl. Mech.*, 34, 3, *Trans. ASME*, *Series* E., 89, (1967), 599—605.

[4] Roth, B., On the screw axis and other special lines associated with spatial displacements of a rigid body, *J. Eng. for Ind.*, *Trans. ASME*, *Series* B., 89, 1(1967),

102—110.
[5] Whittaker, E. T., *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press, (1937).
[6] Pars, L. A., *A Treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, (1965).
[7] Gibbs, J. W. and E. B. Wilson, *Vector Analysis*, Charles Scribner's Son, (1909) (Dover Publication, 1960).
[8] Yu Xin, *Foundations of Rigidbody Mechanics*, South China Institute of Technology, (1981)
[9] Yu Xin, On the application of screw calculus to the mechanics of spatial mechanisms, (An analysis of the general five-link mechanism with screw pairs). (To be published in *The Symposium of Applied Mathematics and Mechanics*).
[10] Yu Xin, The mechanics of mechanical manipulators with six degrees of freedom——An analysis by means of the screw calculus. (To be published).
[11] Tsai, W. L. and B. Roth, Incompletely specified displacements; Geometry and spatial linkage synthesis, *J. Eng. for Ind., Trans. ASME, Series* B., 95(1973)603—611.

The Existence and Uniqueness Theorem of the Screw Tensor for the Finite Displacement of a Rigidbody

Yu Xin

(South China Institute of Technology, Guangzhou)

Abstract

The existence and uniqueness theorem of the screw tensor for the finite displacement of a rigidbody is proposed and then proved using the screw calculus. As a consequence, formulae are obtained for determining the screw tensor in terms of the finite displacement data of the rigidbody.