应用数学和力学，第5卷第3期（1984年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

弹性地基上的自由矩形板

张福范　　黄晓梅

（清华大学，1983年7月26日收到）

摘　　要

在弹性地基上的自由矩形板的弯曲，在弹性薄板理论中也是个难题。本文以叠加法提供一个精确解。它满足微分方程，自由边界的条件以及自由角点条件。这样将导致一系列无穷联立方程。所解的问题为在板的中点作用一集中力这问题。我们并以地基反力应与这集中力相平衡，校核所作的计算是否正确。

一、引　　言

在 Kirchhoff 的薄板理论中，在 Winkler 的弹性地基上的、具有自由边自由角点的矩形板，尚未有它的精确解。这解应满足微分方程

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}+k\frac{W}{D}=\frac{q(x,y)}{D} \tag{1.1}$$

以及自由边界条件 $M=0$，$V=0$，及自由角点条件 $R=0$。这解是由叠加法得到的。为简单计，解在板中点作用一集中力的矩形板（图1）。但解这问题的想法，可以推广到更复杂的情形。我们得到了板的挠度与弯矩。最后，以地基的反力与作用在板上的荷载的平衡，对解的可靠性作校核。

二、分　　析

要得到这问题的解，叠加以下这五个部分：

（1）在弹性地基上的矩形板，其边界条件为：$x=\pm\frac{a}{2}$为简支边，沿 $y=\pm\frac{b}{2}$两边的挠度为：

$$\sum_{m=1,3,\cdots} a_m \sin\frac{m\pi}{2}\cos\frac{m\pi x}{a}$$

（2）同一矩形板，它的$y=\pm\frac{b}{2}$两边为简支边，而$x=\pm\frac{a}{2}$这两边的挠度为：

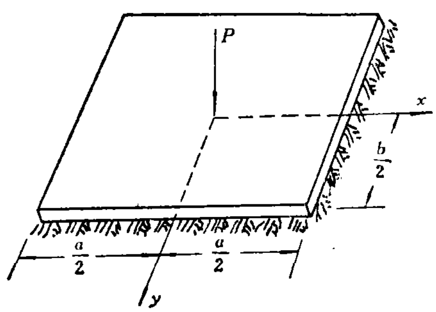

图 1

$$\sum_{i=1,3,\cdots} b_i \sin\frac{i\pi}{2}\cos\frac{i\pi y}{b}$$

（3）要使四个角点有相同的位移，引入均匀挠度 $W=c$。由（1.1）式得到 $q=ck$。这表明：要产生这均匀挠度 c，须加以均布荷载 $q=ck$。

（4）要除去这向下的均布荷载，用一在弹性地基上而四边为简支边的矩形板，而作用着向上的均布荷载 $-ck$。

（5）同一在弹性地基上的矩形板，其四边为简支边，而有一集中力作用在板的中点。

由消除沿板边界的横向力（剪力）以及板角点的集中力，我们就可决定系数 a_m 与 b_i 以及常数 c 的值。

现将求解所须的算式列出。

（a）自叠加的第一部分，将 $q(x,y)$ 等于零自方程式（1.1）得到：

$$W=\sum_{m=1,3,\cdots}\left\{A_m \mathrm{ch}\,\beta_m y\cos\gamma_m y+B_m\,\mathrm{sh}\,\beta_m y\sin\gamma_m y\right\}\sin\frac{m\pi}{2}\cos\frac{m\pi x}{a} \tag{2.1}$$

$$A_m=\frac{a_m}{\sqrt{\frac{k}{D}}\left(\mathrm{th}^2\frac{\beta_m b}{2}\tan^2\frac{\gamma_m b}{2}+1\right)\mathrm{ch}\frac{\beta_m b}{2}\cos\frac{\gamma_m b}{2}}\left[\frac{m^2\pi^2}{a^2}(1-\mu)\,\mathrm{th}\frac{\beta_m b}{2}\tan\frac{\gamma_m b}{2}+\sqrt{\frac{k}{D}}\right]$$

$$B_m=\frac{-a_m}{\sqrt{\frac{k}{D}}\left(\mathrm{th}^2\frac{\beta_m b}{2}\tan^2\frac{\gamma_m b}{2}+1\right)\mathrm{ch}\frac{\beta_m b}{2}\cos\frac{\gamma_m b}{2}}\left[\frac{m^2\pi^2}{a^2}(1-\mu)-\sqrt{\frac{k}{D}}\mathrm{th}\frac{\beta_m b}{2}\tan\frac{\gamma_m b}{2}\right]$$

$$\beta_m=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\frac{m^4\pi^4}{a^4}+\frac{k}{D}}+\frac{m^2\pi^2}{a^2}},\qquad \gamma_m=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\frac{m^4\pi^4}{a^4}+\frac{k}{D}}-\frac{m^2\pi^2}{a^2}}$$

沿 $x=\frac{a}{2}$ 及 $y=\frac{b}{2}$ 这两边上作用的剪力各为：

$$\begin{aligned}(V_y)_{y=\frac{b}{2}}=-D\sum_{m=1,3,\cdots}\Bigg[\Bigg\{&A_m\left[-(1-\mu)\beta_m\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\sqrt{\frac{k}{D}}\gamma_m\right]+B_m\left[-(1-\mu)\gamma_m\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right.\\&\left.+\sqrt{\frac{k}{D}}\beta_m\right]\Bigg\}\mathrm{sh}\frac{\beta_m b}{2}\cos\frac{\gamma_m b}{2}+\Bigg\{A_m\left[(1-\mu)\gamma_m\frac{m^2\pi^2}{a^2}-\sqrt{\frac{k}{D}}\beta_m\right]\\&+B_m\left[-(1-\mu)\beta_m\frac{m^2\pi^2}{a^2}-\sqrt{\frac{k}{D}}\gamma_m\right]\Bigg\}\mathrm{ch}\frac{\beta_m b}{2}\cos\frac{\gamma_m b}{2}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{2}\cos\frac{m\pi x}{a}\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}(V_x)_{x=\frac{a}{2}}=-D\sum_{m=1,3,\cdots}\Bigg\{&\left[-A_m(1-\mu)\frac{m^3\pi^3}{a^3}-B_m\frac{m\pi}{a}(2-\mu)\sqrt{\frac{k}{D}}\right]\\&\cdot\mathrm{ch}\beta_m y\cos\gamma_m y+\left[A_m\frac{m\pi}{a}(2-\mu)\sqrt{\frac{k}{D}}\right.\\&\left.-B_m(1-\mu)\frac{m^3\pi^3}{a^3}\right]\mathrm{sh}\beta_m y\sin\gamma_m y\Bigg\}\end{aligned} \tag{2.3}$$

将以上这剪力算式展成余弦级数，得到：

$$(V_x)_{x=\frac{a}{2}}=-D\sum_{m=1,3,\cdots}\left[-A_m(1-\mu)\frac{m^3\pi^3}{a^3}-B_m\frac{m\pi}{a}(2-\mu)\sqrt{\frac{k}{D}}\right]$$

$$\cdot \sum_{i=1,3,\cdots} \frac{2}{b}\Big[\frac{1}{\beta_m^2+\left(\gamma_m-\frac{i\pi}{b}\right)^2}\Big\{\mathrm{ch}\frac{\beta_m b}{2}\Big[\left(\gamma_m-\frac{i\pi}{b}\right)\sin\frac{b}{2}\left(\gamma_m-\frac{i\pi}{b}\right)\Big]+\mathrm{sh}\frac{\beta_m b}{2}\Big[\beta_m\cos\left(\gamma_m-\frac{i\pi}{b}\right)\frac{b}{2}\Big]\Big\}$$

$$+\frac{1}{\beta_m^2+\left(\gamma_m+\frac{i\pi}{b}\right)^2}\Big\{\mathrm{ch}\frac{\beta_m b}{2}\Big[\left(\gamma_m+\frac{i\pi}{b}\right)\sin\left(\gamma_m+\frac{i\pi}{b}\right)\frac{b}{2}\Big]$$

$$+\mathrm{sh}\frac{\beta_m b}{2}\Big[\beta_m\cos\left(\gamma_m+\frac{i\pi}{b}\right)\frac{b}{2}\Big]\Big\}\Big]\cos\frac{i\pi y}{b}$$

$$-D\sum_{m=1,3,\cdots}\Big[A_m\frac{m\pi}{a}(2-\mu)\sqrt{\frac{k}{D}}-B_m(1-\mu)\frac{m^3\pi^3}{a^3}\Big]$$

$$\cdot\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{2}{b}\Big[\frac{1}{\beta_m^2+\left(\gamma_m-\frac{i\pi}{b}\right)^2}\Big\{\mathrm{ch}\frac{\beta_m b}{2}\beta_m\sin\left(\gamma_m-\frac{i\pi}{b}\right)\frac{b}{2}-\mathrm{sh}\frac{\beta_m b}{2}\left(\gamma_m-\frac{i\pi}{b}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\gamma_m-\frac{i\pi}{b}\right)\frac{b}{2}\Big\}+\frac{1}{\beta_m^2+\left(\gamma_m+\frac{i\pi}{b}\right)^2}\Big\{\beta_m\,\mathrm{ch}\frac{\beta_m b}{2}\sin\left(\gamma_m+\frac{i\pi}{b}\right)\frac{b}{2}$$

$$-\left(\gamma_m+\frac{i\pi}{b}\right)\mathrm{sh}\frac{\beta_m b}{2}\cos\left(\gamma_m+\frac{i\pi}{b}\right)\frac{b}{2}\Big\}\Big]\cos\frac{i\pi y}{b} \tag{2.4}$$

在角点$\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$的地基反作用力为：

$$R=2D(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=a/2\\y=b/2}}=-2D(1-\mu)\frac{\pi}{a}\sum_{m=1,3,\cdots}\Big\{A_m m\Big[\beta_m\,\mathrm{sh}\frac{\beta_m a}{2}\cos\frac{\gamma_m a}{2}$$

$$-\gamma_m\,\mathrm{ch}\frac{\beta_m a}{2}\sin\frac{\gamma_m a}{2}\Big]+B_m m\Big[\beta_m\mathrm{ch}\frac{\beta_m a}{2}\sin\frac{\gamma_m a}{2}+\gamma_m\mathrm{sh}\frac{\beta_m a}{2}\cos\frac{\gamma_m a}{2}\Big]\Big\} \tag{2.5}$$

(b) 由叠加的第二部分，得到：

$$W=\sum_{i=1,3,\cdots}[C_i\,\mathrm{ch}\,\beta_i x\cos\gamma_i x+D_i\,\mathrm{sh}\,\beta_i x\sin\gamma_i x]\cos\frac{i\pi y}{b}\sin\frac{i\pi}{2} \tag{2.6}$$

$$C_i=\frac{b_i}{\sqrt{\frac{k}{D}}\left(\mathrm{th}^2\frac{\beta_i a}{2}\tan^2\frac{\gamma_i a}{2}+1\right)\mathrm{ch}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}}\Big[\frac{i^2\pi^2}{b^2}(1-\mu)\mathrm{th}\frac{\beta_i a}{2}\tan\frac{\gamma_i a}{2}+\sqrt{\frac{k}{D}}\Big]$$

$$D_i=\frac{-b_i}{\sqrt{\frac{k}{D}}\left(\mathrm{th}^2\frac{\beta_i a}{2}\tan^2\frac{\gamma_i a}{2}+1\right)\mathrm{ch}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}}\Big[\frac{i^2\pi^2}{b^2}(1-\mu)-\sqrt{\frac{k}{D}}\mathrm{th}\frac{\beta_i a}{2}\tan\frac{\gamma_i a}{2}\Big]$$

$$\beta_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\frac{i^4\pi^4}{b^4}+\frac{k}{D}}+\frac{i^2\pi^2}{b^2}},\qquad \gamma_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\frac{i^4\pi^4}{b^4}+\frac{k}{D}}-\frac{i^2\pi^2}{b^2}}$$

沿 $x=\frac{a}{2}$这边作用的剪力为：

$$(V_x)_{x=\frac{a}{2}}=-D\sum_{i=1,3,\cdots}\left[\left\{C_i\left[-(1-\mu)\beta_i\frac{i^2\pi^2}{b^2}-\sqrt{\frac{k}{D}}\gamma_i\right]+D_i\left[-(1-\mu)\frac{i^2\pi^2}{b^2}\gamma_i\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sqrt{\frac{k}{D}}\beta_i\right]\right\}\mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}+\left\{C_i\left[(1-\mu)\frac{i^2\pi^2}{b^2}\gamma_i-\sqrt{\frac{k}{D}}\beta_i\right]\right.$$
$$\left.\left.+D_i\left[-(1-\mu)\frac{i^2\pi^2}{b^2}\beta_i-\sqrt{\frac{k}{D}}\gamma_i\right]\right\}\mathrm{ch}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}\right]\cos\frac{i\pi y}{b}\sin\frac{i\pi}{2}\tag{2.7}$$

在角点$\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$的地基反作用力为：

$$R=-2D(1-\mu)\frac{\pi}{b}\sum_{i=1,3,\cdots}\left\{C_i i\left[\beta_i\,\mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}-\gamma_i\,\mathrm{ch}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}\right]\right.$$
$$\left.+D_i i\left[\beta_i\,\mathrm{ch}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}+\gamma_i\,\mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}\right]\right\}\tag{2.8}$$

（c）对于叠加的第四部分，须解一在弹性地基上的四边简支的矩形板，而均布荷载 ck 为向上．我们得到：

$$W=-\frac{4ckb^4}{\pi^5 D}\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{\sin\frac{i\pi}{2}\cos\frac{i\pi y}{b}}{i^5\left(1+\frac{kb^4}{i^4\pi^4 D}\right)}\left\{1+E_i\,\mathrm{ch}\,\beta_i x\cos\gamma_i x+F_i\,\mathrm{sh}\,\beta_i x\sin\gamma_i x\right\}\tag{2.9}$$

$$E_i=-\frac{\frac{i^2\pi^2}{b^2}\mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}+\sqrt{\frac{k}{D}}\mathrm{ch}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}}{\sqrt{\frac{k}{D}}\left(\mathrm{sh}^2\frac{\beta_i a}{2}+\cos^2\frac{\gamma_i a}{2}\right)}$$

$$F_i=\frac{\frac{i^2\pi^2}{b^2}\mathrm{ch}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}-\sqrt{\frac{k}{D}}\mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}}{\sqrt{\frac{k}{D}}\left(\mathrm{sh}^2\frac{\beta_i a}{2}+\cos^2\frac{\gamma_i a}{2}\right)}$$

β_i，γ_i 与（b）部分中的相同．沿 $x=\frac{a}{2}$这边的剪力为：

$$(V_x)_{x=\frac{a}{2}}=-\frac{4ckb^4}{\pi^5}\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{\sin\frac{i\pi}{2}\cos\frac{i\pi y}{b}}{i^5\left(1+\frac{kb^4}{i^4\pi^4 D}\right)}\left\{\left[\frac{i^2\pi^2}{b^2}(-1+\mu)(E_i\beta_i+F_i\gamma_i)\right.\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{k}{D}}(F_i\beta_i-E_i\gamma_i)\right]\mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}+\left[\frac{i^2\pi^2}{b^2}(1-\mu)(E_i\gamma_i-F_i\beta_i)\right.$$
$$\left.\left.-\sqrt{\frac{k}{D}}(E_i\beta_i+F_i\gamma_i)\right]\mathrm{ch}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}\right\}\tag{2.10}$$

在角点$\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$的地基反力为：

$$R=(1-\mu)\frac{8ckb^3}{\pi^4}\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{1}{i^4\left(1+\frac{kb^4}{i^4\pi^4D}\right)}\left\{E_i\left[\beta_i\,\mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\gamma_i\,\mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}\right]+F_i\left[\beta_i\,\mathrm{ch}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}+\gamma_i\,\mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}\right]\right\}\tag{2.11}$$

（d）对于叠加的部分（5），须解一四边简支的在弹性地基上的矩形板，而有一集中力 P 作用在中点。按图 2 所示坐标系统，得到：

$$W=\frac{-Pb}{\pi^2\sqrt{kD}}\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{\cos\frac{i\pi y}{b}}{i^2\sqrt{1+\frac{kb^4}{i^4\pi^4D}}}\{G_i\,\mathrm{ch}\,\beta_i x\cdot\sin\gamma_i x+H_i\,\mathrm{sh}\,\beta_i x\cos\gamma_i x\}\tag{2.12}$$

$$G_i=\frac{\beta_i\,\mathrm{ch}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}-\gamma_i\,\mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}}{\mathrm{sh}^2\frac{\beta_i a}{2}+\cos^2\frac{\gamma_i a}{2}}$$

$$H_i=\frac{-\beta_i\,\mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}-\gamma_i\,\mathrm{ch}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}}{\mathrm{sh}^2\frac{\beta_i a}{2}+\cos^2\frac{\gamma_i a}{2}}$$

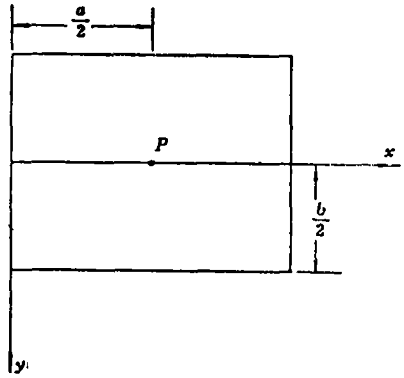

图 2

方程（2.12）只适用于 $x\leqslant\frac{a}{2}$，而另一半是对称的。β_i，γ_i 与（b）中的相同。沿 $x=0$ 这边的剪力为：

$$(V_x)_{x=0}=\frac{Pb}{\pi^2}\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{\cos\frac{i\pi y}{b}}{i^2\sqrt{1+\frac{kb^4}{i^4\pi^4D}}}\left\{(G_i\beta_i-H_i\gamma_i)-\sqrt{\frac{D}{k}}\frac{i^2\pi^2}{b^2}(1-\mu)(G_i\gamma_i+H_i\beta_i)\right\}\tag{2.13}$$

由于对称，只须将上式改为负值，即得沿 $x=a$ 这边的剪力，即

$$(V_x)_{x=a}=-(V_x)_{x=0}\tag{2.14}$$

在角点 $\left(a,\ \frac{b}{2}\right)$ 的地基反力为：

$$R=2(1-\mu)\sqrt{\frac{D}{k}}\cdot\frac{\pi}{b^2}P\sum_{i=1,3,\cdots}i\sin\frac{i\pi}{2}\cdot\frac{\mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}}{\mathrm{sh}^2\frac{\beta_i a}{2}+\cos^2\frac{\gamma_i a}{2}}\tag{2.15}$$

三、板中点受集中力作用时弹性地基上的自由方板

如图1所示的方板为一最简单的问题。对于这情形，$a_i=b_i$。要消除沿 $x=\frac{a}{2}$ 这边的剪力，只须将(2.4)，(2.7)，(2.10)，(2.14)式相加并使这和等于零。并且，要消除板角点的

反力，将(2.5)，(2.8)，(2.11)，(2.15)式所给的反力相加，并使这和等于零．于是使边界上没有剪力，得到：

$$
\begin{aligned}
&-D\Big[\Big\{C_i\Big[-(1-\mu)\frac{i^2\pi^2}{b^2}\beta_i-\sqrt{\frac{k}{D}}\gamma_i\Big]+D_i\Big[-(1-\mu)\frac{i^2\pi^2}{b^2}\gamma_i \\
&\quad+\sqrt{\frac{k}{D}}\beta_i\Big]\Big\}\mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}+\Big\{C_i\Big[(1-\mu)\frac{i^2\pi^2}{b^2}\gamma_i-\sqrt{\frac{k}{D}}\beta_i\Big] \\
&\quad+D_i\Big[-(1-\mu)\frac{i^2\pi^2}{b^2}\beta_i-\sqrt{\frac{k}{D}}\gamma_i\Big]\Big\}\mathrm{ch}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}\Big]\sin\frac{i\pi}{2} \\
&\quad-D\sum_{m=1,3,\cdots}\Big[-A_m(1-\mu)\frac{m^3\pi^3}{a^3}-B_m\frac{m\pi}{a}(2-\mu)\sqrt{\frac{k}{D}}\Big]\frac{2}{b} \\
&\quad\cdot\Big[\frac{1}{\beta_m^2+\left(\gamma_m-\frac{i\pi}{b}\right)^2}\Big\{\mathrm{ch}\frac{\beta_m b}{2}\Big[\left(\gamma_m-\frac{i\pi}{b}\right)\sin\left(\gamma_m-\frac{i\pi}{b}\right)\frac{b}{2}\Big] \\
&\quad+\mathrm{sh}\frac{\beta_m b}{2}\Big[\beta_m\cos\left(\gamma_m-\frac{i\pi}{b}\right)\frac{b}{2}\Big]\Big\}+\frac{1}{\beta_m^2+\left(\gamma_m+\frac{i\pi}{b}\right)^2} \\
&\quad\cdot\Big\{\mathrm{ch}\frac{\beta_m b}{2}\Big[\left(\gamma_m+\frac{i\pi}{b}\right)\sin\left(\gamma_m+\frac{i\pi}{b}\right)\frac{b}{2}\Big]+\mathrm{sh}\frac{\beta_m b}{2}\Big[\beta_m\cos\left(\gamma_m+\frac{i\pi}{b}\right)\frac{b}{2}\Big]\Big\}\Big] \\
&\quad-D\sum_{m=1,3,\cdots}\Big[A_m\frac{m\pi}{a}(2-\mu)\sqrt{\frac{k}{D}}-B_m\frac{m^3\pi^3}{a^3}(1-\mu)\Big]\frac{2}{b}\Big[\frac{1}{\beta_m^2+\left(\gamma_m-\frac{i\pi}{b}\right)^2} \\
&\quad\cdot\Big\{\mathrm{ch}\frac{\beta_m b}{2}\beta_m\sin\left(\gamma_m-\frac{i\pi}{b}\right)\frac{b}{2}-\mathrm{sh}\frac{\beta_m b}{2}\left(\gamma_m-\frac{i\pi}{b}\right)\cos\left(\gamma_m-\frac{i\pi}{b}\right)\frac{b}{2}\Big\} \\
&\quad+\frac{1}{\beta_m^2+\left(\gamma_m+\frac{i\pi}{b}\right)^2}\Big\{\beta_m\,\mathrm{ch}\frac{\beta_m b}{2}\sin\left(\gamma_m+\frac{i\pi}{b}\right)\frac{b}{2}-\left(\gamma_m+\frac{i\pi}{b}\right)\mathrm{sh}\frac{\beta_m b}{2} \\
&\quad\cdot\cos\left(\gamma_m+\frac{i\pi}{b}\right)\frac{b}{2}\Big\}\Big]-\frac{4ckb^4}{\pi^5}\cdot\frac{1}{i^5\left(1+\frac{kb^4}{i^4\pi^4D}\right)}\sin\frac{i\pi}{2}\Big\{\Big[\frac{i^2\pi^2}{b^2}(-1+\mu)(E_i\beta_i \\
&\quad+F_i\gamma_i)+\sqrt{\frac{k}{D}}(F_i\beta_i-E_i\gamma_i)\Big]\mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}+\Big[\frac{i^2\pi^2}{b^2}(1-\mu)(E_i\gamma_i-F_i\beta_i) \\
&\quad-\sqrt{\frac{k}{D}}(E_i\beta_i+F_i\gamma_i)\Big]\mathrm{ch}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}\Big\}-\frac{Pb}{\pi^2}\cdot\frac{1}{i^2\sqrt{1+\frac{kb^4}{i^4\pi^4D}}}\Big\{(G_i\beta_i-H_i\gamma_i) \\
&\quad-\sqrt{\frac{D}{k}}\frac{i^2\pi^2}{k}(1-\mu)(G_i\gamma_i+H_i\beta_i)\Big\}=0
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

使角点没有反力，得到：

$$
-2D(1-\mu)\frac{\pi}{a}\sum_{m=1,3,\cdots}\Big\{A_m m\Big[\beta_m\,\mathrm{sh}\frac{\beta_m a}{2}\cos\frac{\gamma_m a}{2}-\gamma_m\mathrm{ch}\frac{\beta_m a}{2}\sin\frac{\gamma_m a}{2}\Big]
$$

$$+B_m m\left[\beta_m \operatorname{ch}\frac{\beta_m a}{2}\sin\frac{\gamma_m a}{2}+\gamma_m \operatorname{sh}\frac{\beta_m a}{2}\cos\frac{\gamma_m a}{2}\right]\Big\}-2D(1-\mu)\frac{\pi}{b}$$

$$\cdot\sum_{i=1,3,\cdots}\Big\{C_i i\left[\beta_i \operatorname{sh}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}-\gamma_i \operatorname{ch}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}\right]$$

$$+D_i i\left[\beta_i \operatorname{ch}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}+\gamma_i \operatorname{sh}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}\right]\Big\}$$

$$+8(1-\mu)ck\frac{b^3}{\pi^4}\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{1}{i^4\left(1+\frac{kb^4}{i^4\pi^4 D}\right)}\Big\{E_i\left[\beta_i \operatorname{sh}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}\right.$$

$$\left.-\gamma_i \operatorname{ch}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}\right]+F_i\left[\beta_i \operatorname{ch}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}+\gamma_i \operatorname{sh}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}\right]\Big\}$$

$$+2(1-\mu)\frac{\pi}{b^2}\sqrt{\frac{D}{k}}P\sum_{i=1,3,\cdots} i\sin\frac{i\pi}{2}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}}{\operatorname{sh}^2\frac{\beta_i a}{2}+\cos^2\frac{\gamma_i a}{2}}=0 \qquad (3.2)$$

方程(3.1)为一组无穷联立方程，方程(3.2)为一单独的方程．我们可用它们来解$a_1,a_3,a_5,\cdots$及c．计算机使有可能得到这问题的精确解．

四、例　　题

有一在弹性地基上的方板，集中力P作用在板的中点（图1）．

$$\mu=0.167,\qquad \frac{kb^4}{D}=10^4$$

取系数 a_m 35项，得到

$$a_m\left(\frac{Pb^2}{D}\right)\quad (m=1,3,5,\cdots)$$

-0.41748×10^{-4}	0.65450×10^{-5}	0.10853×10^{-5}
0.17573×10^{-6}	0.60966×10^{-7}	0.25752×10^{-7}
0.12883×10^{-7}	0.72047×10^{-8}	0.43666×10^{-8}
0.28125×10^{-8}	0.18994×10^{-8}	0.13325×10^{-8}
0.96451×10^{-9}	0.71658×10^{-9}	0.54429×10^{-9}
0.42136×10^{-9}	0.33162×10^{-9}	0.26479×10^{-9}
0.21458×10^{-9}	0.17517×10^{-9}	0.14475×10^{-9}
0.12072×10^{-9}	0.10151×10^{-9}	0.86009×10^{-10}
0.73379×10^{-10}	0.63000×10^{-10}	0.54405×10^{-10}
0.47237×10^{-10}	0.41217×10^{-10}	0.36123×10^{-10}
0.31811×10^{-10}	0.28120×10^{-10}	0.24951×10^{-10}
0.22217×10^{-10}	0.19849×10^{-10}	

$$c=-0.13125\times10^{-4}\frac{Pb^2}{D}$$

可以看出，系数 a_m 收敛很快．因要计算弯矩与地基反力，故取了较多的项以保证它们的精确性．

挠度与弯矩列表如下．

表 1　　　　板的挠度 $W\left(\frac{Pb^2}{D}\right)$

y \ x	0	a/8	a/4	3a/8	a/2
0	0.00125	0.00066	0.00018	0.00000	−0.00006
a/8	0.00066	0.00041	0.00012	−0.00001	−0.00005
a/4	0.00018	0.00012	0.00003	−0.00002	−0.00004
3a/8	0.00000	−0.00001	−0.00002	−0.00002	−0.00002
a/2	−0.00006	−0.00005	−0.00004	−0.00002	−0.00001

表 2　　　　板的弯矩 $M_x(P)$

y \ x	0	a/8	a/4	3a/8	a/2
0		−0.011	−0.018	−0.007	0.000
a/8	0.041	−0.001	−0.012	−0.006	0.000
a/4	0.004	0.000	−0.004	−0.002	0.000
3a/8	0.001	0.000	−0.001	0.000	0.000
a/2	−0.001	−0.001	0.000	0.001	0.000

图 3 和图 4 绘出挠度和弯矩的曲线．

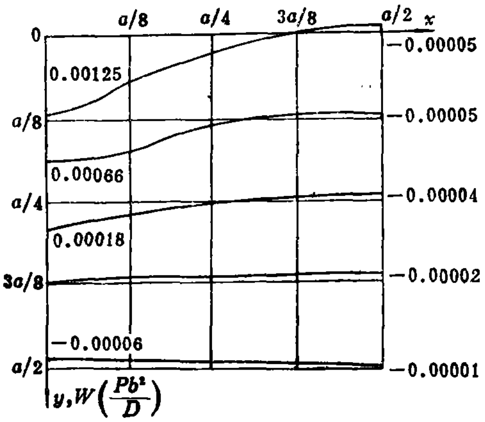

图 3　W 曲线

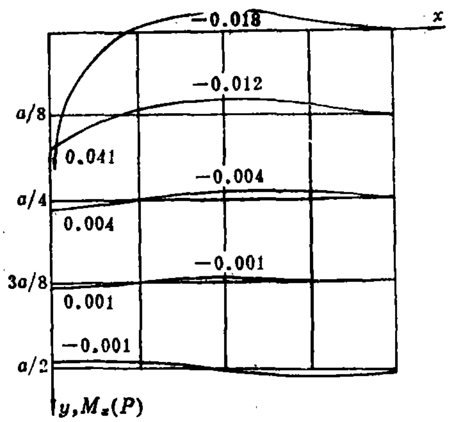

图 4　M_x 曲线

作为计算的校核，计算地基的反力，看它是否与荷载 P 平衡．从挠曲面的方程，得到：

$$\iint\sum_{m=1}^{5}W_m k\,dx\,dy=\frac{4ka}{\pi}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{1}{m(\beta_m^2+\gamma_m^2)}\left\{(A_m\beta_m-B_m\gamma_m)\operatorname{sh}\frac{\beta_m b}{2}\cos\frac{\gamma_m b}{2}\right.$$

$$\left.+(A_m\gamma_m+B_m\beta_m)\operatorname{ch}\frac{\beta_m b}{2}\sin\frac{\gamma_m b}{2}\right\}+\frac{4kb}{\pi}\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{1}{i(\beta_i^2+\gamma_i^2)}\left\{(C_i\beta_i-D_i\gamma_i)\right.$$

$$\cdot \mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}+(C_i\gamma_i+B_i\beta_i)\,\mathrm{ch}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}\Big\}+abck$$

$$-\frac{16ck^2b^5}{\pi^6 D}\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{1}{i^6\left(1+\frac{kb^4}{\pi^4 i^4 D}\right)}\left\{\frac{a}{2}+\frac{1}{\beta_i^2+\gamma_i^2}\Big[(E_i\beta_i-F_i\gamma_i)\,\mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}\right.$$

$$\left.+(E_i\gamma_i+F_i\beta_i)\,\mathrm{ch}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}\Big]\right\}-\frac{4Pb^2}{\pi^3}\sqrt{\frac{k}{D}}\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{\sin\frac{i\pi}{2}}{i^3\sqrt{1+\frac{kb^4}{i^4\pi^4 D}}}\cdot\frac{1}{\beta_i^2+\gamma_i^2}$$

$$\cdot\left\{(H_i\beta_i-G_i\gamma_i)\left(\mathrm{ch}\frac{\beta_i a}{2}\cos\frac{\gamma_i a}{2}-1\right)+(H_i\gamma_i+G_i\beta_i)\,\mathrm{sh}\frac{\beta_i a}{2}\sin\frac{\gamma_i a}{2}\right\} \qquad (4.1)$$

将 c 与 a_1, a_3,…代入（4.1）式，得到：

$$\iint\sum W_m k\,dxdy=0.99964P$$

因而，对 a_m 取了 35 个系数，地基反力与荷载 P 之间的误差是可以忽略的。

参 考 文 献

[1] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Company, Inc. (1959).

[2] 张福范，《弹性薄板》，科学出版社（1965）.

A Free Rectangular Plate on the Elastic Foundation

Chang Fo-van Hwang Siao-mei

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

In the theory of elastic thin plates, the bending of a free rectangular plate on the elastic foundation is also a difficult problem. This paper provides a rigorous solution by the method of superposition. It satisfies the differential equation, the boundary conditions of the edges and the free corner conditions. Thus we are led to a system of infinite simultaneous equations. The problem solved is for a plate with a concentrated load at its center. Adoptation is made of the equilibrium of the reactive forces from the foundation and the concentrated load to see if our calculation is correct or not.