应用数学和力学，第5卷第4期（1984年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

理想塑性轴对称问题的一般方程*

沈 惠 申

（上海交通大学，1983年7月11日收到）

摘 要

本文引用速度势函数，将理想塑性轴对称问题化为二个非线性的偏微分方程．根据导得的方程讨论了Haar-Kármán假设对于Mises屈服准则及与其相关联的流动法则的协调性问题．

一、引 言

轴对称塑性变形问题在应用上有着极其重要的意义．理想塑性体的轴对称变形问题由七个基本方程决定七个未知函数．这些方程的解在数学上发生很大的困难．

Symonds(1949)[1]将轴对称塑性变形问题归并到由五个方程决定五个未知函数．并证明了，轴对称的塑性变形问题一般不是双曲型的边值问题

林鸿荪(1954)[2]进一步将轴对称塑性变形问题归并为由三个方程决定三个未知函数．并用倒凑法得出一些已知的解．

在本文中，引用速度势函数，将理想塑性轴对称问题化为二个非线性的偏微分方程．根据导得的方程讨论了Haar-Kármán假设对于Mises屈服准则及与其相关联的流动法则的协调性问题．

二、一 般 方 程

采用圆柱坐标 (r,θ,z)，以 z 轴为对称轴，理想塑性体的轴对称变形问题的平衡方程为

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0 \tag{2.2}$$

Mises屈服条件为

$$(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2+6\tau_{rz}^2=6k^2 \tag{2.3}$$

Levy-Mises 应力应变率关系为

* 钱伟长推荐

$$\dot{\varepsilon}_r=\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{3}\lambda(2\sigma_r-\sigma_\theta-\sigma_z) \tag{2.4}$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta=\frac{u}{r}=\frac{1}{3}\lambda(2\sigma_\theta-\sigma_z-\sigma_r) \tag{2.5}$$

$$\dot{\varepsilon}_z=\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{3}\lambda(2\sigma_z-\sigma_r-\sigma_\theta) \tag{2.6}$$

$$\dot{\gamma}_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)=\lambda\tau_{rz} \tag{2.7}$$

此处 u 和 w 分别为沿 r 及 z 方向的速度分量．以上七个方程决定七个未知函数σ_r，σ_θ，σ_z，τ_{rz}，u，w及λ。

对于理想塑性体有不可压缩条件

$$\dot{\varepsilon}_r+\dot{\varepsilon}_\theta+\dot{\varepsilon}_z=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{2.8}$$

引进速度势函数$\psi(r,z)$，并设

$$u=\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad w=-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{2.9}$$

则不可压缩条件(2.8)自动满足．

由式(2.4)、(2.5)，我们有

$$\dot{\varepsilon}_r=\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{\varepsilon}_\theta) \tag{2.10}$$

即

$$\frac{1}{3}\lambda(2\sigma_r-\sigma_\theta-\sigma_z)=\frac{1}{3}\lambda(2\sigma_\theta-\sigma_z-\sigma_r)+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right)$$

计及(2.9)，得

$$\sigma_r-\sigma_\theta=\frac{1}{\lambda r}\left(-\frac{2}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial r\partial z}\right) \tag{2.11}$$

由式(2.11)、(2.5)得

$$\sigma_\theta-\sigma_z=\frac{1}{\lambda r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial r\partial z}\right) \tag{2.12}$$

及

$$\sigma_z-\sigma_r=\frac{1}{\lambda r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}-2\frac{\partial^2 \psi}{\partial r\partial z}\right) \tag{2.13}$$

将式(2.9)代入式(2.7)，得

$$\tau_{rz}=-\frac{1}{2\lambda r}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}-\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) \tag{2.14}$$

将式(2.11)～(2.14)代入 Mises 屈服条件(2.3)中，得

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}-\frac{\partial^2 \psi}{\partial r\partial z}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r\partial z}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}-\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)^2=k^2\lambda^2r^2 \tag{2.15}$$

由式(2.13)有

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}(\sigma_z-\sigma_r)=\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left[\frac{1}{\lambda r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}\right)\right] \tag{2.16}$$

由式(2.1)、(2.2)有

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial r}\sigma_r=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{1}{2\lambda r}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\lambda r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}\right)\right] \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\sigma_z=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\right)\left[\frac{1}{2\lambda r}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)\right] \tag{2.18}$$

合并(2.16)、(2.17)、(2.18)，并考虑到

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial z\partial r} \tag{2.19}$$

因此，我们得到

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left[\frac{1}{\lambda r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}\right)\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\lambda r}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}\right)\right]$$
$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\frac{1}{2\lambda r}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)\right]=0 \tag{2.20}$$

至此，我们已将理想塑性体的轴对称变形问题化为涉及到二个未知函数 ψ 和 λ 的二个非线性偏微分方程(2.15)和(2.20)。

因此，理想塑性体的轴对称变形问题归结为在边界条件下，联立求解偏微分方程组(2.15)和(2.20)。其一般解可用式(2.9)，(2.11)～(2.14)及(2.1)和(2.2)表示。

由于方程组(2.15)和(2.20)既是非线性的，又是耦合的。因此，除了某些简单问题能够得到闭合解外，对于大多数实际问题，要想得到它们的精确解仍然非常困难，但用逐步渐近的方法，求得它们的近似解则是可能的。

顺便指出，若选取速度势函数 $\psi(r,z)=\psi^*(r)\exp z$，并使 τ_{rz} 满足适当条件，我们很容易得到文[3]中的形式解：

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_r=az+\sigma_r^*,\quad \sigma_\theta=az+\sigma_\theta^*,\quad \sigma_z=az+\sigma_z^*\\ u=u^*\exp z,\quad w=w^*\exp z\end{array}\right\} \tag{2.21}$$

其中 a 为任意常数，σ_r^*，σ_θ^*，σ_z^*，u^*，w^* 仅为 r 的函数。

进一步研究发现，这种形式解的可用性是极其有限的。

适当地选取速度势函数 $\psi(r,z)$，将使我们得到一些有用的解。

三、关于Haar-Kármán假设的讨论

由于寻求轴对称塑性变形问题数学解的困难性，Haar-Kármán (1909)[4] 引进一个非真实的屈服条件（完全塑性条件），借以形成与平面变形相类似的问题．在处理轴对称塑性变形问题时，它规定 σ_θ 等于其它两个主应力之一．

由Haár-Kármán 假设就可以导致重要的数学简化，得到所谓的“静定”问题．

Hill(1950)[6] 对 Haar-Kármán 假设的适用性提出异议．他指出，Haar-Kármán 假设没有明确的物理意义，并且产生的误差大小是未知的．

Shield (1955)[6] 应用 Tresca 屈服准则及与其相关联的流动法则对 Haar-Kármán 假设进行讨论，发现对大部分实际问题 Haar-Kármán 假设可能是正确的。

Haar-Kármán 假设在金属成型塑性理论的工程计算中得到广泛的采用。这种既采用 Mises 屈服准则，又采用 Haar-Kármán 假设的简化计算，其解的合理性究竟如何？这是工程师们长期以来一直关心的一个问题。为了从理论上回答这个问题，本文将讨论 Haar-Kármán 假设对 Mises 屈服准则及与其相关联的流动法则的协调性问题。根据Haar-Kármán 假设，有

$$\sigma_\theta=\frac{\sigma_r+\sigma_z}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_r-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{rz}^2} \tag{3.1}$$

即

$$2\sigma_\theta-\sigma_r-\sigma_z=\pm2\sqrt{\left(\frac{\sigma_r-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{rz}^2}$$

代入式(2.5)，得

$$\frac{9}{4\lambda^2}\left(\frac{u}{r}\right)^2=\left(\frac{\sigma_r-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{rz}^2 \tag{3.2}$$

将式(2.9)、(2.13)、(2.14)代入，得

$$2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)^2 \tag{3.3}$$

比照式(2.15)，有

$$3\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2=k^2\lambda^2r \tag{3.4}$$

即

$$\left(\frac{u}{r}\right)^2=\frac{4}{9}\lambda^2\left(\sigma_\theta-\frac{\sigma_r+\sigma_z}{2}\right)^2=\frac{k^2}{3}\lambda^2$$

这表明

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_\theta-\frac{1}{2}(\sigma_r+\sigma_z)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}k\\ &\text{及}\quad\sqrt{\left(\frac{\sigma_r-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{rz}^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}k\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

式(3.5)说明，Haar-Kármán 假设要求应力点固定在相应于单向拉伸或压缩的位置，而不允许在屈服轨迹上自由移动。

由于Haar-Kármán 假设使我们多了一个约束方程(3.3)。

倘若我们能找到二个函数ψ，λ同时适合三个方程(2.15)、(2.20)、(3.3)，则Haar-Kármán 假设对于Mises屈服准则及与其相关联的流动法则是协调的，反之，则是不协调的。

如果Haar-Kármán假设是正确的。从式(3.4)出发，有

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{k}{\sqrt{3}}\lambda r^{\,1)} \tag{3.6}$$

1） 此处取“+”号讨论，对于“－”号可以得到同样的结论。

则

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}=\frac{k}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\lambda)=\frac{k}{\sqrt{3}}\left(2r\lambda+r^2\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right) \tag{3.7}$$

及

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}\right)=-\frac{k}{\sqrt{3}}\left(3+2\frac{r}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)\\&\frac{1}{\lambda r}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}\right)=-\frac{k}{\sqrt{3}}\left(\frac{r}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

将式(3.6)、(3.7)代入式(2.15)，有

$$-\frac{1}{2\lambda r}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=\frac{k}{\sqrt{3}}\left[-3\frac{r}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial r}-\left(\frac{r}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

将式 (3.8)、(3.9) 代入式 (2.20)，得

$$2\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left(\frac{r}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[-3\frac{r}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial r}-\left(\frac{r}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=0 \tag{3.10}$$

令

$$\frac{r}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial r}=f(r,z) \tag{3.11}$$

式(3.10)变为

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial z}-\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)[-3f-f^2]^{\frac{1}{2}}=0 \tag{3.12}$$

现在问题已转化为求方程(3.12)的解.若解存在，则协调性得到保证.

下面我们讨论几种基本情况：

(1) $\tau_{rz}=0$， 即$[-3f-f^2]^{\frac{1}{2}}=0$

式(3.12)恒满足.

值得指出，对于这种情况，Mises屈服条件与Tresca屈服条件具有相同的形式

$$\sigma_z-\sigma_r=\pm\sqrt{3}k \tag{3.13}$$

(2) $\tau_{rz}=g(r)$

则f也仅是r的函数，式(3.12)变为

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}\right)g(r)=0 \tag{3.14}$$

其一般解为

$$g(r)=c_1r+c_2r^{-1} \tag{3.15}$$

对于非中空的轴对称体，应有$c_2=0$.剪应力τ_{rz}为r的线性函数.

若同时有$c_1=0$，则回到情况(1).

(3) 对于$\tau_{rz}=\text{const}$；$\tau_{rz}=h(z)$或更一般地$\tau_{rz}=\varphi(r,z)$

这时式(3.12)一般无法满足.

因此，我们可以得出结论：在大多数情况下，我们找不到方程(3.12)的解．换句话说，

我们无法找到同时适合三个方程(2.15)、(2.20)、(3.3)的二个函数ψ和λ.就一般的轴对称塑性变形问题而言,Haar-Kármán 假设对于Mises屈服准则及与其相关联的流动法则是不协调的。

从以上的讨论可以看出，对于实际的轴对称塑性变形问题，仅在剪应力等于零或满足式(3.15)时，Haar-Kármán假设才可能是正确的。因此，在工程计算中，采用Haar-Kármán假设进行简化，应予慎重考虑。

参 考 文 献

[1] Symonds, P.S., On the general equations of problems of axial symmetry in the theory of plasticity, *Quar. Appl. Math.*, 6, 4(1949), 448—452.

[2] 林鸿荪，轴对称塑性变形问题(英译名：On the problem of axial-symmetric plastic deformation)，物理学报，10, 2(1954), 89—104.

[3] Аннин Б. Д., Одно точное решение осесимметричной задачи идеалвной пластичности, *Журнал Прикладной Механики и Технической Физики*, 14, 2(1973), 171—172.

[4] Haar, A. and Th. von Kármán, Zur theorie der spannungszustande in plastischen and sandartigen medien, Nachr. Ges, Wiss, Gottinger, Math. Phys. Klasse (1909) 204—218.

[5] Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford Clarendon Press, (1950).

[6] Shield, R. T., On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry, *Proc Roy. Soc.*. A 233 (1955), 267—287.

On the General Equations of Axisymmetric Problems of Ideal Plasticity

Shen Hui-shen

(*Shanghai Jiao Tong University, Shanghai*)

Abstract

In this paper, introducing a volocity potential, we reduce the foundamental equations of axisymmetric problems of ideal plasticity to two nonlinear partial differential equations. From these equations we discuss the compatibility of Haar-Kármán hypothesis with von Mises yield criterion and the associated flow law.