应用数学和力学，第5卷第4期（1984年7月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

随机集值映射的不动点定理及其应用*

丁 协 平

（四川师范学院数学系，1983年1月14日收到）

摘 要

本文对随机集值映射和随机集值映射组证明了几个新的随机不动点定理，然后我们给出了所得结果对非线性随机积分方程组和随机微分方程组的某些应用.我们的结果改进和推广了[4～7,9,11～17]中的若干最近结果.

一、引 言

众所周知，随机微分方程、积分方程和算子方程的理论已在工程、物理、生物和系统科学中得到广泛应用[1,2,3]. 而随机映射的不动点理论又为求解这些随机方程提供了非常有用的工具.正如 Bharucha-Reid[2] 指出，得到各种决定性不动点定理的随机推广将是有兴趣和有价值的.

在本文中，我们首先得到了 Singh; Whitfield[4]和 Czeriwik[5] 关于决定性集值映射和映射组的最近结果的改进和随机推广，从而使Itoh[6]，Andrus; Nishiura[7]等人的已知结果成为我们的结果的特殊情形.然后讨论了我们的结果对于随机积分和微分方程组的某些应用.我们强调指出我们的关于随机集值映射组的不动点定理和有关结果的应用是全新的，它们将对许多从实际问题中归结出来的随机积分、微分和算子方程的求解问题提供极有用的工具.

二、定 义 和 引 理

全文中设(X,d)是一Polish 空间，即是一可分完备距离空间，$(\Omega,\mathscr{A},P)$是一完备概率空间.$CB(X)$表X的一切非空有界闭子集的族.$\mathscr{B}$表X的一切 Borel 子集的σ-代数，对任意$x\in X$，$B\subset X$，$D(x,B)=\inf\{d(x,y):y\in B\}$表$x$到$B$的距离.$H(\cdot,\cdot)$表距离$d$在$CB(X)$上诱导的 Hausdorff 距离. $(CB(X),H)$构成一完备距离空间.

定义2.1 称映射$T:\Omega\to CB(X)$是可测的，如果对任意开集$B\subset X$，有

$$T^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega:T(\omega)\cap B\neq\varnothing\}\in\mathscr{A}$$

* 钱伟长推荐.

称映射$u:\Omega\to X$为可测映射T的一可测选择，如果u是可测的且有$u(\omega)\in T(\omega),\forall\omega\in\Omega$.

注意到我们定义的可测性是 Himmelberg[8]意义下的弱可测.

定义2.2 设$(X_i,\ d_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ 是 Polish 空间，称映射 $T_i:\Omega\times X_1\times\cdots\times X_n\to CB(X_i)$ $(i=1,\cdots,n)$是连续随机集值映射组，如果

(i) 对每一 $\omega\in\Omega,T_i(\omega\cdot,\cdots,\cdot):X_1\times\cdots\times X_n\to(CB(X_i),H_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ 是连续的，

(ii) 对每一$(x_1,\cdots,x_n)\in X_1\times\cdots\times X_n,T_i(\cdot,x_1,\cdots,x_n)$ $(i=1,\cdots,n)$是可测的.

引理2.1 设$(X_i,\ d_i)$ $(i=1,\cdots,n)$是 Polish 空间，$T_i:\Omega\times X_1\times\cdots\times X_n\to CB(X_i)$ $(i=1,\cdots,n)$是连续随机集值映射组，则对任意可测映射$x_i:\Omega\to X_i$（或称 X_i-值随机元），$(i=1,\cdots,n)$，$T_i(\cdot,x_1(\cdot),\cdots,x_n(\cdot))$是可测的，（或称$T_i(\cdot,x_1(\cdot),\cdots,x_n(\cdot))$为$CB(X_i)$-值随机元），$(i=1,\cdots,n)$.

证明 因为$x_i(\omega)$是X_i-值随机元，故存在取可列多个值的X_i-值随机元序列 $\{y_i^m(\omega)\}_{m=0}^{\infty}$收敛于$x_i(\omega)$ $(i=1,\cdots,n)$对每一$\omega\in\Omega$，令

$$T_i(\omega,y_1^m(\omega),\cdots,y_n^m(\omega))=F_i^m(\omega)\qquad(i=1,\cdots,n;\ m\geqslant 0)$$

则对每一开集$B\subset X$，我们有

$$\{\omega\in\Omega:F_i^m(\omega)\cap B\neq\varnothing\}=\bigcup_{j_1=1}^{\infty}\cdots\bigcup_{j_n=1}^{\infty}\{\omega\in\Omega:T_i(\omega,\xi_1^{m,j_1},\cdots,\xi_n^{m,j_n})\cap B\neq\varnothing\}$$

$$\cap\{\omega\in\Omega:\xi_1^{m,j_1}\in y_1^m(\omega)\}\cap\cdots\cap\{\omega\in\Omega:\xi_n^{m,j_n}\in y_n^m(\omega)\}\qquad(i=1,\cdots,n,\ m\geqslant 0)$$

其中$\{\xi_i^{m,j_i}\}_{j_i=1}^{\infty}$为$X_i$-值随机元$y_i^m(\omega)$所取的可列多个值. 因此$F_i^m(\omega)$是可测的. 从而$\{T_i(\omega,y_1^m(\omega),\cdots,y_n^m(\omega))\}_{m=0}^{\infty}$是一$CB(X_i)$-值随机元序列. 又因$y_i^m(\omega)\to x_i(\omega)$ $(i=1,\cdots,n)$和$T_i(\omega,\cdot,\cdots,\cdot)$是连续的. 因此$T_i(\omega,x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega))$是$CB(X_i)$-值随机元.

注2.1 在引理2.1中，如果$n=1$作为特殊情形，我们得到Itoh[6]的命题2, Bharucha-Reid[1, p.75]的定理2.14和王梓坤[9]的引理1的改进和推广.

引理2.2 设$S,T:\Omega\to CB(X)$是可测映射，$u:\Omega\to X$是S的一可测选择，则对任意可测实值函数$a:\Omega\to(1,\infty)$，存在T的一可测选择$v:\Omega\to X$使得

$$d(u(\omega),v(\omega))\leqslant a(\omega)H(S(\omega),T(\omega))\qquad(2.1)$$

证明 由Himmelberg[8, 定理5.6]知分别存在S和T的可测选择序列$\{u_n\}$和$\{v_n\}$使得对每一$\omega\in\Omega$有$\overline{\{u_n(\omega)\}}=S(\omega)$，$\overline{\{v_n(\omega)\}}=T(\omega)$. 由此推得

$$H(S(\omega),T(\omega))=\max\{\sup_i\inf_j d(u_i(\omega),v_j(\omega)),\sup_j\inf_i d(u_i(\omega),v_j(\omega))\}$$

因此$H(S(\cdot),T(\cdot))$是Ω上的非负可测实值函数. 定义$f:\Omega\times X\to R$和$G:\Omega\to 2^X$（X的一切子集的族）如下：

$$f(\omega,x)=d(u(\omega),x)-a(\omega)H(S(\omega),T(\omega))$$

$$G(\omega)=\{x\in T(\omega):f(\omega,x)<0\}$$

由Iton[6, 命题3]知G是可测的. 因此由$G_1(\omega)=\overline{G(\omega)}$ $(\omega\in\Omega)$定义的映射$G_1:\Omega\to CB(X)$是可测的. 从而由Kuratowski; Ryll-Nardzewski [10, p.389] 存在可测选择$v:\Omega\to X$，使$v(\omega)\in G_1(\omega),\forall\omega\in\Omega$. 显然$v(\omega)\in T(\omega)$，$\forall\omega\in\Omega$且满足(2.1).

令$(a_{i,k}(\omega))$是一$n\times n$矩阵，其中$a_{i,k}:\Omega\to[0,\infty)$ $(i,k=1,\cdots,n)$ 是非负实值可测函数.

定义

$$a^1_{i,k}(\omega)=\begin{cases} a_{i,k}(\omega) & (i\neq k)\\ 1-a_{i,k}(\omega) & (i=k;\ i,k=1,\cdots,n;\ \omega\in\Omega)\end{cases} \tag{2.2}$$

$$a^{l+1}_{i,k}(\omega)=\begin{cases} a^l_{1,1}(\omega)a^l_{i+1,k+1}(\omega)+a^l_{i+1,1}(\omega)a^l_{1,k+1}(\omega) & (i\neq k)\\ a^l_{1,1}(\omega)a^l_{i+1,k+1}(\omega)-a^l_{i+1,1}(\omega)a^l_{1,k+1}(\omega) & (i=k)\end{cases}$$

$$(l=1,\cdots,n-1;\quad i,k=1,\cdots,n-l) \tag{2.3}$$

引理2.3 设$a_{i,k}(\omega)$ $(i,k=1,\cdots,n)$ 是非负实值可测函数．则随机不等式组

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(\omega)r_k<r_i \qquad \text{a.s.} \quad (i=1,\cdots,n) \tag{2.4}$$

(a.s. 表几乎处处) 有可测正解 $r_k(\omega)>0$ a.s.$(k=1,\cdots,n)$ (即$\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}(\omega)r_k(\omega)<r_i(\omega)$ a.s.$,i=1,\cdots,n$)的充要条件是

$$a^l_{i,i}(\omega)>0 \qquad \text{a.s.}(i=1,\cdots,n+1-l;\ l=1,\cdots,n) \tag{2.5}$$

证明　当$n=1$时(2.4)式为

$$a_{11}(\omega)r_1<r_1 \quad \text{a.s.,}\quad 即 a^1_{1,1}(\omega)r_1>0 \quad \text{a.s.}$$

显然此随机不等式有可测正解的充要条件是$a^1_{1,1}(\omega)>0$． 故引理对$n=1$成立．

当$n=2$时，(2.4)式可化为等价不等式组

$$\begin{cases} a^1_{1,1}(\omega)r_1-a^1_{1,2}(\omega)r_2>0 & (2.6\text{a})\\ -a^1_{2,1}(\omega)r_1+a^1_{2,2}(\omega)r_2>0 \quad \text{a.s.} & (2.6\text{b})\end{cases}$$

设不等式组(2.6a),(2.6b)有可测正解$r_i(\omega)>0$ a.s.$(i=1,2)$则由(2.6a)和(2.6b) 知必有$a^1_{1,1}(\omega),a^1_{2,2}(\omega)>0$ a.s.否则将得出矛盾．于是由(2.6a)可得

$$r_1(\omega)>\frac{a^1_{1,2}(\omega)}{a^1_{1,1}(\omega)}r_2(\omega) \quad \text{a.s.}$$

代入(2.6b)可得

$$\frac{a^1_{1,1}(\omega)a^1_{2,2}(\omega)-a^1_{1,2}(\omega)a^1_{2,1}(\omega)}{a^1_{1,1}(\omega)}\ r_2(\omega)=\frac{a^2_{1,1}(\omega)}{a^1_{1,1}(\omega)}r_2(\omega)>0 \quad \text{a.s.}$$

因此必有$a^2_{1,1}(\omega)>0$ a.s.

反之设　$a^1_{1,1}(\omega),a^2_{1,1}(\omega),a^1_{2,2}(\omega)>0$　a.s.

则必存在正可测函数$r_2(\omega)>0$ a.s.和某正数$\varepsilon>0$使得

$$a^2_{1,1}(\omega)r_2(\omega)-\varepsilon>0 \quad \text{a.s.}$$

例如取$r_2(\omega)=\dfrac{1}{a^2_{1,1}(\omega)}$和$0<\varepsilon<1$. 从而有

$$\frac{a^2_{1,1}(\omega)r_2(\omega)-\varepsilon}{a^1_{1,1}(\omega)}>0 \quad \text{a.s.}$$

现在令　$$r_1(\omega)=\frac{1}{a^1_{1,1}(\omega)}[a^1_{1,2}(\omega)r_2(\omega)+\varepsilon] \quad \text{a.s.}$$

显然$r_1(\omega)>0$ a.s.是正可测函数．容易验证$r_1(\omega),r_2(\omega)$是随机不等式 组 (2.6a)～(2.6b)的可测正解．故对$n=2$时引理2.3成立．

当$n=3$时，(2.4)可化为等价随机不等式组

$$\begin{cases} a^1_{1,1}(\omega)r_1-a^1_{1,2}(\omega)r_2-a^1_{1,3}(\omega)r_3>0 & (2.7a)\\ -a^1_{2,1}(\omega)r_1+a^1_{2,2}(\omega)r_2-a^1_{2,3}(\omega)r_3>0 & (2.7b)\\ -a^1_{3,1}(\omega)r_1-a^1_{3,2}(\omega)r_2+a^1_{3,3}(\omega)r_3>0 \quad \text{a.s.} & (2.7c)\end{cases}$$

设随机不等式组(2.7a)～(2.7c)有可测正解$r_1(\omega)$，$r_2(\omega)$，$r_3(\omega)$，则必有$a^1_{i,i}(\omega)>0$ a.s.$(i=1,2,3)$否则将导致矛盾．由(2.7a)可得

$$r_1(\omega)>\frac{1}{a^1_{1,1}(\omega)}[a^1_{1,2}(\omega)r_2(\omega)+a^1_{1,3}(\omega)r_3(\omega)] \quad \text{a.s.}$$

代入(2.7b)，(2.7c)经计算化简可得

$$\begin{cases} a^2_{1,1}(\omega)r_2(\omega)-a^2_{1,2}(\omega)r_3(\omega)>0 & (2.8a)\\ -a^2_{2,1}(\omega)r_2(\omega)+a^2_{2,2}(\omega)r_3(\omega)>0 \quad \text{a.s.} & (2.8b)\end{cases}$$

由$n=2$的讨论可得$a^2_{1,1}(\omega),a^2_{2,2}(\omega),a^3_{1,1}(\omega)>0$ a.s.，因此对$n=3$时引理2.3的必要性成立．

反之设$a^1_{1,1}(\omega)$，$a^1_{2,2}(\omega)$，$a^1_{3,3}(\omega)$，$a^2_{1,1}(\omega)$，$a^2_{2,2}(\omega)$，$a^3_{1,1}(\omega)>0$．a.s.，由对$n=2$时的讨论知存在随机不等式组(2.8a)～(2.8b)的可测正解$r_2(\omega)$，$r_3(\omega)$和某正数ε使得

$$\begin{cases} a^2_{1,1}(\omega)r_2(\omega)-a^2_{1,2}(\omega)r_3(\omega)-\varepsilon>0\\ -a^2_{2,1}(\omega)r_2(\omega)+a^2_{2,2}(\omega)r_3(\omega)-\varepsilon>0 \quad \text{a.s.}\end{cases}$$

令

$$r_1(\omega)=\frac{1}{a^1_{1,1}(\omega)}[a^1_{1,2}(\omega)r_2(\omega)+a^1_{1,3}(\omega)r_3(\omega)+\varepsilon] \quad \text{a.s.}$$

显然$r_1(\omega)>0$ a.s. 是正可测函数，容易验证此时$r_1(\omega)$，$r_2(\omega)$，$r_3(\omega)$是随机不等式组(2.7a)～(2.7c)的可测正解．

重复上述论证经有限步可证得引理结论成立．

注2.2 引理2.3是Matkowski [11,12] 的引理的随机化推广．由于未能见到原结果的证明，这里的证明是由我们给出的．

三、随机集值映射的不动点定理

定理3.1 设$T:\Omega\times X\to CB(X)$是连续随机集值映射，如果存在可测实值函数$k:\Omega\to(0,1)$，a.s.使得对一切$x,y\in X$

$$H(T(\omega,x),\ T(\omega,y))\leqslant k(\omega)\max\Big\{d(x,y),\ D(x,T(\omega,x)),D(y,T(\omega,y)),\ D(y,T(\omega,x)),\ \frac{1}{2}D(x,T(\omega,y))\Big\} \quad \text{a.s.} \tag{3.1}$$

令$x_0\in X$，$x_1(\omega)$是$T(\omega,x_0)$的一可测选择（由假设知$x_1(\omega)$存在，可见证明）和令$\lambda(\omega)$是满足$0<k(\omega)<\lambda(\omega)<1$ a.s. 的任意可测实值函数（如$\lambda(\omega)=\sqrt{k(\omega)}$即合要求）．则存在可测映射$x^*:\Omega\to X$使得$x^*(\omega)\in T(\omega,x^*(\omega))$ a.s. 和$d(x_0,x^*(\omega))\leqslant\dfrac{d(x_0,x_1(\omega))}{1-\lambda(\omega)}$ a.s. 即$x^*(\omega)$是T的一随机不动点．

证明 任取$x_0\in X$．令$x_0(\omega)=x_0$ a.s. 由具有$n=1$的引理2.1，$T(\omega,x_0(\omega))$是$CB(X)$-值可测映射．因此由[10]，p.389；或[13]，定理Ⅲ.8，存在$T(\cdot,x_0(\cdot))$的可测选择$x_1(\omega)$．

从而$T(\cdot,x_1(\cdot))$也是可测的。又因$\frac{\lambda(\omega)}{k(\omega)}>1$ a.s.，所以由引理2.2，存在$T(\cdot,x_1(\cdot))$的可测选择 $x_2(\omega)$ 使得

$$d(x_1(\omega),\ x_2(\omega))\leqslant\frac{\lambda(\omega)}{k(\omega)}H(T(\omega,x_0(\omega)),T(\omega,x_1(\omega)))\quad \text{a.s.}$$

由归纳法可得到一可测映射序列 $\{x_n(\omega)\}$ 满足

$$x_{n+1}(\omega)\in T(\omega,x_n(\omega))\quad \text{a.s.}$$

$$d(x_n(\omega),\ x_{n+1}(\omega))\leqslant\frac{\lambda(\omega)}{k(\omega)}H(T(\omega,x_{n-1}(\omega)),\ T(\omega,x_n(\omega)))\quad \text{a.s.}$$

由 (3.1) 式我们有

$$\begin{aligned}d(x_n(\omega),\ x_{n+1}(\omega))&\leqslant\frac{\lambda(\omega)}{k(\omega)}H(T(\omega,x_{n-1}(\omega)),T(\omega,x_n(\omega)))\\&\leqslant\lambda(\omega)\max\Big\{d(x_{n-1}(\omega),x_n(\omega)),D(x_{n-1}(\omega),T(\omega,x_{n-1}(\omega))),D(x_n(\omega),\\&\quad T(\omega,x_n(\omega))),D(x_n(\omega),T(\omega,x_{n-1}(\omega))),\frac{1}{2}D(x_{n-1}(\omega),T(\omega,x_n(\omega)))\Big\}\\&\leqslant\lambda(\omega)\max\Big\{d(x_{n-1}(\omega),x_n(\omega)),\ \frac{1}{2}[d(x_{n-1}(\omega),x_n(\omega))+d(x_n(\omega),\\&\quad x_{n+1}(\omega))]\Big\}\quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

因为 $\lambda(\omega)<1$ a.s. 蕴含$\frac{\lambda(\omega)}{2-\lambda(\omega)}<\lambda(\omega)$ a.s. 和

$$d(x_n(\omega),\ x_{n+1}(\omega))\leqslant\frac{\lambda(\omega)}{2}[d(x_{n-1}(\omega),x_n(\omega))+d(x_n(\omega),x_{n+1}(\omega))]$$

蕴含

$$d(x_n(\omega),\ x_{n+1}(\omega))\leqslant\frac{\lambda(\omega)}{2-\lambda(\omega)}d(x_{n-1}(\omega),x_n(\omega))<\lambda(\omega)d(x_{n-1}(\omega),\ x_n(\omega))$$

从而得到

$$d(x_n(\omega),x_{n+1}(\omega))\leqslant\lambda(\omega)d(x_{n-1}(\omega),x_n(\omega))\quad \text{a.s.}\tag{3.2}$$

因为$0<\lambda(\omega)<1$ a.s.，故(3.2)蕴含 $\{x_n(\omega)\}$ a.s. 是一 Cauchy 序列。令 $x_n(\omega)\to x^*(\omega)$ a.s，作为可测映射序列的极限 $x^*(\omega)$ 是可测的。又由 (3.1) 式有

$$\begin{aligned}&D(x^*(\omega),T(\omega,x^*(\omega)))\leqslant D(x^*(\omega),T(\omega,x_n(\omega)))+H(T(\omega,x_n(\omega)),T(\omega,x^*(\omega)))\\&\quad\leqslant d(x^*(\omega),x_{n+1}(\omega))+k(\omega)\max\Big\{d(x_n(\omega),x^*(\omega)),D(x_n(\omega),T(\omega,x_n(\omega))),\\&\qquad D(x^*(\omega),T(\omega,x^*(\omega))),D(x^*(\omega),T(\omega,x_n(\omega))),\ \frac{1}{2}D(x_n(\omega),T(\omega,x^*(\omega)))\Big\}\\&\quad\leqslant d(x^*(\omega),x_{n+1}(\omega))+k(\omega)\max\Big\{d(x_n(\omega),x^*(\omega)),D(x_n(\omega),T(\omega,x_n(\omega))),\\&\qquad D(x^*(\omega),T(\omega,x^*(\omega))),d(x^*(\omega),x_{n+1}(\omega)),\frac{1}{2}D(x_n(\omega),T(\omega,x^*(\omega)))\Big\}\quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

在上式中令 $n\to\infty$ 得到

$$D(x^*(\omega),T(\omega,x^*(\omega)))\leqslant k(\omega)D(x^*(\omega),T(\omega,x^*(\omega)))\quad \text{a.s.}$$

因$k(\omega)<1$ a.s., 所以$D(x^*(\omega),T(\omega,x^*(\omega)))=0$ a.s.

从而推得$x^*(\omega)\in T(\omega,x^*(\omega))$ a.s. 即$x^*(\omega)$是T的一随机不动点. 又由(3.2)我们有

$$d(x_0,\ x_{n+1}(\omega))\leqslant\sum_{k=0}^{n}d(x_k(\omega),\ x_{k+1}(\omega))\leqslant\sum_{k=0}^{n}[\lambda(\omega)]^k d(x_0,x_1(\omega))$$

$$\leqslant\frac{d(x_0,x_1(\omega))}{1-\lambda(\omega)}\quad \text{a.s.}$$

在上式中令$n\to\infty$我们得到

$$d(x_0,\ x^*(\omega))\leqslant\frac{d(x_0,x_1(\omega))}{1-\lambda(\omega)}\quad \text{a.s.}$$

上式给出了随机不动点$x^*(\omega)$距离初始点x_0的界.

注3.1 定理3.1是Singh; Whitfield[4]中定理1的改进和随机推广.这里我们顺便指出[4]中定理1仅于$S=T$时结论成立.因为压缩条件(α)是非对称的,故在该定理的证明中由(2)式和归纳法不能得到(3)式(见[4]p.120).因此原定理证明是错误的, 定理3.1也改进和推广了Itoh[6]的定理和Andrus; Nishiura[7]的定理3.1,定理3.8(A)和定理4.4(A).这是因为定理3.1的证明对可测空间$(\Omega,\mathscr{A})$仍成立.

定理3.2 设(X,d)是紧距离空间.$S,T:\Omega\times X\to CB(X)$是连续随机集值映射.如果对一切$x,y\in X$,

$$H(T(\omega,x),S(\omega,y))<\max\{d(x,y),D(x,T(\omega,x)),D(y,S(\omega,y)),$$

$$\frac{1}{2}[D(x,S(\omega,y))+D(y,T(\omega,x))]\}\quad \text{a.s.}\tag{3.3}$$

则S和T的随机公共不动点集重合且非空.

证明 由定理的假设和丁协平[14, 定理6]知$\mathscr{F}(\omega)=\{\omega\in\Omega:x\in S(\omega,x)\cap T(\omega,x)\}\neq\varnothing$ a.s.因为紧距离空间显然是一Polish空间. 故由[7, 定理2.5], 存在可测映射$x^*:\Omega\to X$使得$x^*(\omega)\in S(\omega,x^*(\omega))\cap T(\omega,x^*(\omega))$ a.s.即S和T存在随机公共不动点$x^*(\omega)$.利用(3.3)式容易证明S的随机不动点集与T的随机不动点集是a.s.重合的.故定理3.2结论成立.

注3.2 定理3.2是[15]的定理2推广到映射对的情形, 显然定理3.2容易被推广到映射族.

四、随机集值映射组的不动点定理

定理4.1 设(X_i,d_i) $(i=1,\cdots,n)$是Polish空间, $S_i,T_i:\Omega\times X_1\times\cdots\times X_n\to CB(X_i)$ $(i=1,\cdots,n)$是连续随机集值映射组使得对一切$x_k,y_k\in X_k$ $(k=1,\cdots,n)$.

$$H_i(S_i(\omega,x_1,\cdots,x_n),T_i(\omega,y_1,\cdots,y_n))$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}(\omega)d_k(x_k,y_k)+b(\omega)[D_i(x_i,S_i(\omega,x_1,\cdots,x_n))$$

$$+D_i(y_i,T_i(\omega,y_1,\cdots,y_n))]+c(\omega)[D_i(x_i,T_i(\omega,y_1,\cdots,y_n))$$

$$+D_i(y_i,S_i(\omega,x_1,\cdots,x_n))]\quad \text{a.s.}\ (i=1,\cdots,n)\tag{4.1}$$

其中$a_{i,k}(\omega),b(\omega),c(\omega)$ $(i,k=1,\cdots,n)$是非负实值可测函数使得由(2.2)和(2.3)式定义的$a^{l}_{i,k}(\omega)$满足(2.5)式, 且有

$$0\leqslant 2b(\omega)+2c(\omega)<1-q(\omega)\ \text{a.s.},\ q(\omega)=\max_i\left(r_i^{-1}(\omega)\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}(\omega)),r_k(\omega)\right)\ \text{a.s}$$

和 $r_k(\omega)>0$ a.s.$(k=1,\cdots,n)$

是随机不等式组(2.4)的一可测正解。则随机集值映射组 S_i $(i=1,\cdots,n)$和随机集值映射组 T_i $(i=1,\cdots,n)$存在公共随机不动点。即存在可测映射$x_k^*(\omega)$ $(k=l,\cdots,n)$使得

$$x_i^*(\omega)\in S_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega))\text{和}x_i^*(\omega)\in T_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega))\quad \text{a.s.}\ (i=1,\cdots,n)$$

并且S_i $(i=1,\cdots,n)$ 的随机不动点集与T_i $(i=1,\cdots,n)$的随机不动点集a.s.一致.

证明 由引理2.3和$q(\omega)$的定义知$q(\omega)$是一可测实值函数且有 $0<q(\omega)<1$ a.s.,从而$2b(\omega)+2c(\omega)+q(\omega)$是一可测实值函数且有$0<q(\omega)+2b(\omega)+2c(\omega)<1$ a.s.,因此存在一可测实值函数$a(\omega)$;$a(\omega)>1$,a.s.使得$2a(\omega)b(\omega)+2a(\omega)c(\omega)+a(\omega)q(\omega)<1$ a.s.(例如取$a(\omega)=(2b(\omega)+2c(\omega)+q(\omega))^{-\frac{1}{2}}$ a.s.即合要求)。

任取$x_i^0\in X_i$。令$x_i^0(\omega)=x_i^0$ a.s.$(i=1,\cdots,n)$。由引理2.1知$S_i(\cdot,x_1^0(\cdot),\cdots,x_n^0(\cdot))$为$CB(X_i)$-值可测映射 $(i=1,\cdots,n)$,由[13,定理Ⅲ.8]存在$S_i(\cdot,x_1^0(\cdot),\cdots,x_n^0(\cdot))$的可测选择$x_i^1(\omega)(i=1,\cdots,n)$。于是又由引理2.1知$T_i(\cdot,x_1^1(\cdot),\cdots,x_n(\cdot))$为$CB(X_i)$-值可测映射$(i=1,\cdots,n)$。根据引理2.2, 存在 $T_i(\cdot,x_1^1(\cdot),\cdots,x_n^1(\cdot))$的可测选择$x_i^2(\omega)$ $(i=1,\cdots,n)$使得

$$d_i(x_i^1(\omega),x_i^2(\omega))\leqslant a(\omega)H_i(S_i(\omega,x_1^0(\omega),\cdots x_n^0(\omega)),T_i(\omega,x_1^1(\omega),\cdots,x_n^1(\omega)))$$
$$\text{a.s.}(i=1,\cdots,n)$$

重复上述论证,由归纳法我们可选得可测映射序列$\{x_i^m(\omega)\}_{m=0}^{\infty}$ $(i=1,\cdots,n)$。使得

$$x_i^{2m+1}(\omega)\in S_i(\omega,x_1^{2m}(\omega),\cdots,x_n^{2m}(\omega))$$

$$x_i^{2m+2}(\omega)\in T_i(\omega,x_1^{2m+1}(\omega),\cdots,x_n^{2m+1}(\omega))$$

$$d_i(x_i^{2m+1}(\omega),x_i^{2m+2}(\omega))\leqslant a(\omega)H_i(S_i(\omega,x_1^{2m}(\omega),\cdots,x_n^{2m}(\omega)),$$
$$T_i(\omega,x_1^{2m+1}(\omega),\cdots,x_n^{2m+1}(\omega)))$$

$$d_i(x_i^{2m+2}(\omega),x_i^{2m+3}(\omega))\leqslant a(\omega)H_i(T_i(\omega,x_1^{2m+1}(\omega),\cdots,x_n^{2m+1}(\omega)),$$
$$S_i(\omega,x_1^{2m+2}(\omega),\cdots,x_n^{2m+2}(\omega)))$$
$$\text{a.s.}\ (m=0,1,2,\cdots;\ i=1,\cdots,n)$$

由(4.1)式我们有

$$d_i(x_i^1(\omega),x_i^2(\omega))\leqslant a(\omega)H_i(S_i(\omega,x_1^0(\omega),\cdots,x_n^0(\omega)),T_i(\omega,x_1^1(\omega),\cdots,x_n^1(\omega)))$$

$$\leqslant a(\omega)\Big[\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}(\omega)d_k(x_k^0(\omega),x_k^1(\omega))+b(\omega)(D_i(x_i^0(\omega),S_i(\omega,x_1^0(\omega),\cdots,x_n^0(\omega)))$$
$$+D_i(x_i^1(\omega),T_i(\omega,x_1^1(\omega),\cdots,x_n^1(\omega))))+c(\omega)(D_i(x_i^0(\omega),T_i(\omega,x_1^1(\omega),\cdots,x_n^1(\omega)))$$
$$+D_i(x_i^1(\omega),S_i(\omega,x_1^0(\omega),\cdots,x_n^0(\omega))))\Big]$$

$$\leqslant a(\omega)\Big[\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}(\omega)d_k(x_k^0(\omega),x_k^1(\omega))+b(\omega)(d_i(x_i^0(\omega),x_i^1(\omega))+d_i(x_i^1(\omega),x_i^2(\omega)))$$

$$+c(\omega)(d_i(x_i^1(\omega),x_i^1(\omega))+d_i(x_i^0(\omega),\ x_i^2(\omega)))\Big]$$

$$\leqslant a(\omega)\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}(\omega)d_k(x_k^0(\omega),x_k^1(\omega))+a(\omega)[b(\omega)+c(\omega)](d_i(x_i^0(\omega),x_i^1(\omega))$$

$$+d_i(x_i^1(\omega),x_i^2(\omega)))\qquad \text{a.s.}\ (i=1,\cdots,n)$$

由随机不等式组(2.4)的齐次性，不失一般性我们可假定

$$d_k(x_k^0(\omega),x_k^1(\omega))\leqslant r_k(\omega)\quad \text{a.s. 和 } r_k(\omega)\geqslant 1\quad \text{a.s.}\ (k=1,\cdots,n)$$

于是有

$$d_i(x_i^1(\omega),x_i^2(\omega))\leqslant a(\omega)\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}(\omega)r_k(\omega)+a(\omega)(b(\omega)+c(\omega))(r_i(\omega)$$

$$+d_i(x_i^1(\omega),x_i^2(\omega)))$$

$$\leqslant a(\omega)(q(\omega)+b(\omega)+c(\omega))r_i(\omega)+a(\omega)(b(\omega)$$

$$+c(\omega))d_i(x_i^1(\omega),x_i^2(\omega))\qquad \text{a.s.}\ (i=1,\cdots,n)$$

因此

$$d_i(x_i^1(\omega),x_i^2(\omega))\leqslant\frac{a(\omega)(q(\omega)+b(\omega)+c(\omega))}{1-a(\omega)(b(\omega)+c(\omega))}r_i(\omega)=\beta(\omega)r_i(\omega)\quad \text{a.s.}(i=1,\cdots,n)$$

因$0<2a(\omega)b(\omega)+2a(\omega)c(\omega)+a(\omega)q(\omega)<1$ a.s.，故$\beta(\omega)$是非负实可测函数且$0<\beta(\omega)<1$ a.s.。

同理有

$$d_i(x_i^2(\omega),x_i^3(\omega))\leqslant a(\omega)H_i(S_i(\omega,x_1^2(\omega),\cdots,x_n^2(\omega)),T_i(\omega,x_1^1(\omega),\cdots,x_n^1(\omega)))$$

$$\leqslant a(\omega)\Big\{\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}(\omega)d_k(x_k^2(\omega),x_k^1(\omega))+b(\omega)[D_i(x_i^2(\omega),S_i(\omega,x_1^2(\omega),\cdots,x_n^2(\omega)))$$

$$+D_i(x_i^1(\omega),T_i(\omega,x_1^1(\omega),\cdots,x_n^1(\omega)))]+c(\omega)[D_i(x_i^2(\omega),\ T_i(\omega,x_1^1(\omega),\cdots,x_n^1(\omega)))$$

$$+D_i(x_i^1(\omega),\ S_i(\omega,\ x_1^2(\omega),\cdots,\ x_n^2(\omega)))]\Big\}$$

$$\leqslant a(\omega)\Big\{\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}(\omega)\beta(\omega)r_k(\omega)+b(\omega)[d_i(x_i^2(\omega),x_i^3(\omega))+\beta(\omega)r_i(\omega)]$$

$$+c(\omega)\,[d_i\,(x_i^2(\omega),\ x_i^3(\omega))+\beta(\omega)\,r_i(\omega)]\Big\}$$

$$\leqslant a(\omega)\beta(\omega)[q(\omega)+b(\omega)+c(\omega)]r_i(\omega)+a(\omega)(b(\omega)+c(\omega))d_i(x_i^2(\omega),x_i^3(\omega))$$

$$\text{a.s.}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

由此推得

$$d_i(x_i^2(\omega),x_i^3(\omega))\leqslant[\beta(\omega)]^2r_i(\omega)\quad \text{a.s.}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

由归纳法容易证得

$$d_i(x_i^m(\omega),x_i^{m+1}(\omega))\leqslant[\beta(\omega)]^m r_i(\omega)\quad \text{a.s.}\ (i=1,\cdots,n)$$

因为$0<\beta(\omega)<1$ a.s.，故上式蕴含$\{x_i^m(\omega)\}_{m=0}^{\infty}$ a.s. 是Cauchy 序列 $(i=1,\cdots,n)$。令$x_i^m(\omega)\to x_i^*(\omega)$ a.s. $(i=1,\cdots,n)$作为可测映射序列的极限$x_i^*(\omega)$ $(i=1,\cdots,n)$是可测的。

由(4.1)式有

$$
\begin{aligned}
&d_i(x_i^*(\omega),S_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)))\\
&\quad\leqslant d_i(x_i^*(\omega),x_i^{2m}(\omega))+D_i(x_i^{2m}(\omega),S_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)))\\
&\quad\leqslant d_i(x_i^*(\omega),\ x_i^{2m}(\omega))+H_i(S_i(\omega,\ x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)),T_i(\omega,\ x_1^{2m-1}(\omega),\cdots,\ x_n^{2m-1}(\omega)))\\
&\quad\leqslant d_i(x_i^*(\omega),\ x_i^{2m}(\omega))+\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}(\omega)d_k(x_k^*(\omega),\ x_k^{2m-1}(\omega))+b(\omega)[D_i(x_i^*(\omega),\\
&\qquad S_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)))+d_i(x_i^{2m-1}(\omega),x^{2m}(\omega))]+c(\omega)[d_i(x_i^*(\omega),x_i^{2m}(\omega))\\
&\qquad +D_i(x_i^{2m-1}(\omega),S_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)))]\quad \text{a.s.}\quad (i=1,\cdots,n)
\end{aligned}
$$

在上式中令 $m\to\infty$ 得到

$$
d_i(x_i^*(\omega),S_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)))\leqslant(b(\omega)+c(\omega))d_i(x_i^*(\omega),S_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)))\quad \text{a.s.}
$$

因为 $0\leqslant b(\omega)+c(\omega)<1$ a.s.，所以有

$$
d_i(x_i^*(\omega),S_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)))=0\quad \text{a.s.}\ (i=1,\cdots,n)
$$

从而有 $x_i^*(\omega)\in S_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega))$ a.s. $(i=1,\cdots,n)$. 即 $x_i^*(\omega)(i=1,\cdots,n)$ 是随机集值映射组 S_i $(i=1,\cdots,n)$的随机不动点．同理可证 $x_i^*(\omega)\in T_i(\omega,\ x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega))$ a.s. $(i=1,\cdots,n)$.利用 (4.1) 式易证 S_i $(i=1,\cdots,n)$ 的随机不动点集与T_i $(i=1,\cdots,n)$的随机不动点集 a.s. 一致.

定理证毕.

注4.1 作为定理 4.1 中$n=1$时的特殊情形，我们可得到Reich[16]的定理 5 和Iséki[17]的定理1的改进和随机化推广。当$S_i=T_i$ $(i=1,\cdots,n)$，时我们又得到[12]中定理1.4的集值和随机化推广。

定理4.2 设(X_i,d_i) $(i=1,\cdots,n)$是 Polish 空间，$T_i:\Omega\times X_1\times\cdots\times X_n\to CB(X_i)$ $(i=1,\cdots,n)$是连续随机集值映射组使得对一切$x_k,y_k\in X_k$ $(k=1,\cdots,n)$,

$$
\begin{aligned}
&H_i(T_i(\omega,x_1,\cdots,x_n),T_i(\omega,y_1,\cdots,y_n))\\
&\quad\leqslant\sum_{k=1}^{n}b_{i,k}(\omega)d_k(x_k,y_k)+\sum_{k=1}^{n}c_{i,k}(\omega)D_k(x_k,T_k(\omega,x_1,\cdots,x_n))\\
&\qquad+d(\omega)D_i(y_i,T_i(\omega,y_1,\cdots,y_n))+e(\omega)[D_i(x_i,T_i(\omega,y_1,\cdots,y_n))\\
&\qquad+D_i(y_i,T_i(\omega,x_1,\cdots,x_n))]\quad \text{a.s.}\ (i=1,\cdots,n)
\end{aligned}\tag{4.2}
$$

其中$b_{i,k}(\omega),c_{i,k}(\omega)$ $(i,k=1,\cdots,n)$ 是非负实值可测函数，$a_{i,k}(\omega)=b_{i,k}(\omega)+c_{i,k}(\omega)$ 使得由(2.2)和(2.3) 式定义的 $a_{i,k}^l(\omega)$满足(2.5).非负实值可测函数$d(\omega)$和 $e(\omega)$ 满足 $0\leqslant d(\omega)+2e(\omega)<1-q(\omega)$ a.s.，其中 $q(\omega)=\max\limits_i\left(r_i^{-1}(\omega)\sum\limits_{k=1}^{n}a_{i,k}(\omega)r_k(\omega)\right)$ a.s. 和 $r_k(\omega)>0$ a.s. $(k=1,\cdots,n)$是随机不等式组(2.4)的一随机正解．则存在可测映射 $x_i^*:\Omega\to X_i$ $(i=1,\cdots,n)$使得

$$
x_i^*(\omega)\in T_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega))\quad \text{a.s.}\ (i=1,\cdots,n)
$$

即$(x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega))$是$T_i$ $(i=1,\cdots,n)$ 的随机不动点.

证明 由引理2.3和$q(\omega)$的定义知 $q(\omega)$ 是一可测实值函数且有$0<q(\omega)<1$ a.s.，因此 $d(\omega)+2e(\omega)+q(\omega)$ 可测且满足 $0<d(\omega)+2e(\omega)+q(\omega)<1$ a.s.. 于是存在可测实值函数

$a(\omega)>1$ a.s. 使得$0<a(\omega)[d(\omega)+2e(\omega)+q(\omega)]<1$ a.s..

任取$x_i^0\in X_i$ $(i=1,\cdots,n)$，令$x_i^1(\omega)$是$T_i(\omega,x_1^0(\omega),\cdots,x_n^0(\omega))$的一可测选择（由假设它存在）. 由引理2.1和2.2知存在$T_i(\cdot,x_1^1(\cdot),\cdots,x_n^1(\cdot))$的一可测选择$x_i^2(\omega)$ $(i=1,\cdots,n)$，使得

$$d_i(x_i^1(\omega),x_i^2(\omega))\leqslant a(\omega)H_i(T_i(\omega,x_1^0(\omega),\cdots,x_n^0(\omega)),T_i(\omega,x_1^1(\omega),\cdots,x_n^1(\omega)))\quad \text{a.s.}\ (i=1,\cdots,n)$$

由归纳法我们可得可测映射序列$\{x_i^m(\omega)\}_{m=0}^{\infty}$ $(i=1,\cdots,n)$，使得

$$x_i^{m+1}(\omega)\in T_i(\omega,x_1^m(\omega),\cdots,x_n^m(\omega))\quad \text{a.s.}$$

$$d_i(x_i^m(\omega),\ x_i^{m+1}(\omega))\leqslant a(\omega)H_i(T_i(\omega,\ x_1^{m-1}(\omega),\cdots,\ x_n^{m-1}(\omega)),T_i(\omega,\ x_1^m(\omega),\cdots,x_n^m(\omega)))\quad \text{a.s.}\ (m=0,1,2,\cdots;\ i=1,\cdots,n)$$

由(4.2)式我们有

$$\begin{aligned}
&d_i(x_i^1(\omega),x_i^2(\omega))\leqslant a(\omega)H_i(T_i(\omega,x_1^0(\omega),\cdots,x_n^0(\omega)),T_i(\omega,x_1^1(\omega),\cdots,x_n^1(\omega)))\\
&\leqslant a(\omega)\Big\{\sum_{k=1}^{n}b_{i,k}(\omega)d_k(x_k^0(\omega),x_k^1(\omega))+\sum_{k=1}^{n}c_{i,k}(\omega)D_k(x_k^0(\omega),T_k(\omega,x_1^0(\omega),\cdots,x_n^0(\omega)))\\
&\quad+d(\omega)D_i(x_i^1(\omega),T_i(\omega,x_1^1(\omega),\cdots,x_n^1(\omega)))+e(\omega)[D_i(x_i^0(\omega),T_i(\omega,x_1^1(\omega),\cdots,\\
&\quad x_n^1(\omega)))+D_i(x_i^1(\omega),T_i(\omega,x_1^0(\omega),\cdots,x_n^0(\omega)))]\Big\}\\
&\leqslant a(\omega)\Big\{\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}(\omega)d_k(x_k^0(\omega),x_k^1(\omega))+d(\omega)d_i(x_i^1(\omega),x_i^2(\omega))\\
&\quad+e(\omega)[d_i(x_i^0(\omega),x_i^1(\omega))+d_i(x_i^1(\omega),\ x_i^2(\omega))]\Big\}\quad \text{a.s.}\ (i=1,\cdots,n)
\end{aligned}$$

由随机不等式组(2.4)的齐次性，无妨设

$$d_k(x_k^0(\omega),x_k^1(\omega))\leqslant r_k(\omega)\quad \text{a.s.}\ 和\ r_k(\omega)\geqslant 1\quad \text{a.s}\ (k=1,\cdots,n)$$

于是有

$$\begin{aligned}
d_i(x_i^1(\omega),x_i^2(\omega))&\leqslant a(\omega)\Big\{\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}(\omega)r_k(\omega)+(d(\omega)+e(\omega))d_i(x_i^1(\omega),x_i^2(\omega))\\
&\quad+e(\omega)r_i(\omega)\Big\}\\
&\leqslant a(\omega)(q(\omega)+e(\omega))r_i(\omega)+a(\omega)(d(\omega)+e(\omega))d_i(x_i^1(\omega),x_i^2(\omega))\quad \text{a.s.}
\end{aligned}$$

因此有

$$d_i(x_i^1(\omega),\ x_i^2(\omega))\leqslant\frac{a(\omega)(q(\omega)+e(\omega))}{1-a(\omega)(d(\omega)+e(\omega))}r_i(\omega)=\beta(\omega)r_i(\omega)\qquad \text{a.s.}\ (i=1,\cdots,n)$$

其中$\beta(\omega)$可测且有$0<\beta(\omega)<1$ a.s..

由归纳法可证得

$$d_i(x_i^m(\omega),\ x_i^{m+1}(\omega))\leqslant[\beta(\omega)]^m r_i(\omega)\qquad \text{a.s.}\ (i=1,\cdots,n)$$

因$0<\beta(\omega)<1$, a.s. 上式蕴含$\{x_i^m(\omega)\}_{m=0}^{\infty}$ $(i=1,\cdots,n)$ a.s. 是 Cauchy 序列. 令$x_i^m(\omega)$

$\to x_i^*(\omega)$ a.s. 故 $x_i^*(\omega)$ $(i=1,\cdots,n)$可测。又由(4.2)式我们有

$$
\begin{aligned}
&D_i(x_i^*(\omega),T_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)))\\
&\leqslant d_i(x_i^*(\omega),x_i^{m+1}(\omega))+D_i(x_i^{m+1}(\omega),\ T_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)))\\
&\leqslant d_i(x_i^*(\omega),\ x_i^{m+1}(\omega))+H_i(T_i(\omega,x_1^m(\omega),\cdots,x_n^m(\omega)),T_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)))\\
&\leqslant d_i(x_i^*(\omega),\ x_i^{m+1}(\omega))+\sum_{k=1}^n b_{i,k}(\omega)d_k(x_k^m(\omega),x_k^*(\omega))\\
&\quad+\sum_{k=1}^n c_{i,k}(\omega)d_k(x_k^m(\omega),\ x_k^{m+1}(\omega))+d(\omega)D_i(x_i^*(\omega),T_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)))\\
&\quad+e(\omega)[D_i(x_i^m(\omega),T_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)))\\
&\quad+d_i(x_i^*(\omega),\ x_i^{m+1}(\omega))]\quad \text{a.s.}\ (i=1,\cdots,n)
\end{aligned}
$$

在上式中令$m\to\infty$得到

$$
D_i(x_i^*(\omega),T_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)))\leqslant(d(\omega)+e(\omega))D_i(x_i^*(\omega),T_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)))\quad \text{a.s.}\quad (i=1,\cdots,n)
$$

因为$0\leqslant d(\omega)+e(\omega)<1$ a.s., 从上式推得$D_i(x_i^*(\omega),T_i(\omega,\ x_1^*(\omega),\cdots,\ x_n^*(\omega)))=0$ a.s. $(i=1,\cdots,n)$, 因此$x_i^*(\omega)\in T_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega))$ a.s.$(i=1,\cdots,n)$.

定理证毕。

注4.2 在定理4.2中令$e(\omega)=0$,作为特殊情形, 我们得到Czerwik[5]的定理的随机化推广。当$n=1$时,我们也得到[6,7,9,11,12,16,17]等中相应结果的改进和推广。

五、某 些 应 用

在本节内我们将提供我们的结果对 Banach 空间内非线性随机积分和微分方程组的某些应用。由于我们讨论的随机积分和微分方程组是非常一般的, 因此这一讨论适用于许多实际问题。

令$(X,\|\cdot\|)$是一可分 Banach 空间, $C_J(X)=\{x:J\to X\mid x\text{连续},\ \|x(t)\|_J=\max\limits_{t\in J}\|x(t)\|\}$,

其中$J=[0,T]\subset\mathbf{R}$。

引理5.1 令$x:\Omega\times J\to X$满足: 对一切$\omega\in\Omega$, $x(\omega,\cdot)$连续和对一切$t\in J$, $x(\cdot,t)$可测, 则$x(\omega,t)$是映Ω到$C_J(X)$的可测映射。

证明 令$x_0\in C_J(X)$和实数$r>0$是任意固定的。令Z表J的可数稠子集。则由假设知对每一$t\in Z$, $\omega\mapsto\|x(\omega,t)-x_0(t)\|$是可测实值函数。因此$\omega\mapsto\max\limits_{t\in Z}\|x(\omega,t)-x_0(t)\|=\max\limits_{t\in J}\|x(\omega,t)-x_0(t)\|=\|x(\omega,t)-x_0(t)\|_J$也是可测实值函数。这就蕴含$\{\omega\in\Omega,\|x(\omega,\cdot)-x_0(\cdot)\|_J<r\}\in\mathscr{A}$。由[1,p.16]知$x(\omega,t)$是$C_J(X)$-值可测映射。

引理5.2 令$(X_i,\|\cdot\|_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ 是可分 Banach 空间, $F_i:\Omega\times J\times J\times X_1\times\cdots\times X_n\to X_i$ $(i=1,\cdots,n)$满足: 对一切$\omega\in\Omega$, $F_i(\omega,\cdot,\cdots,\cdot)$关于$(t,s,x_1,\cdots,x_n)\in J\times J\times X_1\times\cdots\times X_n$连续和对一切$(t,s,x_1,\cdots,x_n)\in J\times J\times X_1\times\cdots\times X_n$, $F_i(\cdot,t,s,x_1,\cdots,x_n)$可测, 则对一切$C_J(X_k)$-值可测映射$x_k(\omega,t)$ $(k=1,\cdots,n)$, $\int_0^t F_i(\omega,t,s,x_1(\omega,s),\cdots,x_n(\omega,s))ds$ $(i=1,\cdots,n)$是$C_J(X_i)$-值可测映射。

证明 对任意固定的$(t,s)\in J\times J$，由引理2.1（单值情形）知$F_i(\cdot,t,s,x_1(\cdot,s),\cdots,x_n(\cdot,s))$ $(i=1,\cdots,n)$是X_i-值可测映射．因此，作为X_i-值可测映射的有限和构成的序列的极限，对任意固定的$t\in J$，$\int_0^t F_i(\cdot,t,s,x_1(\cdot,s),\cdots,x_n(\cdot,s))ds$ $(i=1,\cdots,n)$是X_i-值可测映射．显然对每一$\omega\in\Omega$，$\int_0^t F_i(\omega,\cdot,s,x_1(\omega,s),\cdots,x_n(\omega,s))ds$是连续的，故由引理5.1知结论成立．

引理5.3 令$(X_i,\|\cdot\|_i)$ $(i=1,\cdots,n)$是可分 Banach 空间，$F_i:\Omega\times J\times J\times X_1\times\cdots\times X_n$ $(i=1,\cdots,n)$ 满足：对每一$\omega\in\Omega$，$F_i(\omega,\cdot,\cdots,\cdot)$ 关于 $(t,s,x_1,\cdots,x_n)\in J\times J\times X_1\times\cdots\times X_n$一致连续和对一切$(t,s,x_1,\cdots,x_n)\in J\times J\times X_1\times\cdots\times X_n$，$F_i(\cdot,t,s,x_1,\cdots,x_n)$是$X_i$-值可测映射．则对任意给定的$C_J(X_k)$-值可测映射$x_{0,k}(\omega,t)$ $(k=1,\cdots,n)$，由

$$T_i(\omega,x_1(t),\cdots,x_n(t))=x_{0,i}(\omega,t)+\int_0^t F_i(\omega,t,s,x_1(s),\cdots,x_n(s))ds\quad t\in J,(i=1,\cdots,n)$$

定义的映射$T_i:\Omega\times C_J(X_1)\times\cdots\times C_J(X_n)\to C_J(X_i)$ $(i=1,\cdots,n)$是连续随机单值映射组．

证明 由引理5.2知对一切 $x_k(t)\in C_J(X_k)$ $(k=1,\cdots,n)$，$T_i(\cdot,x_1(t),\cdots,x_n(t))$ $(i=1,\cdots,n)$是$C_J(X_i)$-值可测映射（注意这里视$x_k(t)$为$C_J(X_k)$-值可测映射），又由$F_i(\omega,\cdot,\cdots)$的一致连续性，可推得对每一$\omega\in\Omega$，$T_i(\omega,\cdot,\cdots,\cdot)$ 关于 $(x_1(t),\cdots,x_n(t))\in C_J(X_1)\times\cdots\times C_J(X_n)$是连续的．因此$T_i$ $(i=1,\cdots,n)$ 是连续随机单值映射组．

定理5.1 设$(X_i,\|\cdot\|_i)$ $(i=1,\cdots,n)$是可分 Banach 空间，$F_i,G_i:\Omega\times J\times J\times X_1\times\cdots\times X_n\to X_i$ $(i=1,\cdots,n)$满足引理5.3内假设．对任意给定的$C_J(X_k)$-值可测映射 $x_{0,k}(\omega,t)$ $(k=1,\cdots,n)$和对一切$x_k,y_k\in C_J(X_k)(k=1,\cdots,n)$有

$$\begin{aligned}&\|G_i(\omega,t,s,x_1(s),\cdots,x_n(s))-F_i(\omega,t,s,y_1(s),\cdots,y_n(s))\|_i\\&\leqslant\frac{1}{T}\Big\{\sum_{k=1}^n a_{i,k}(\omega)\|x_k(s)-y_k(s)\|_k+b(\omega)[\|x_i(s)-S_i(\omega,x_1(s),\cdots,x_n(s))\|_i\\&\quad+\|y_i(s)-T_i(\omega,y_1(s),\cdots,y_n(s))\|_i]+c(\omega)[\|x_i(s)-T_i(\omega,y_1(s),\cdots,y_n(s))\|_i\\&\quad+\|y_i(s)-S_i(\omega,x_1(s),\cdots,x_n(s))\|_i]\Big\}\quad\text{a.s.},\ \forall(t,s)\in J\times J,(i=1,\cdots,n)\end{aligned}\tag{5.1}$$

其中映射 $S_i,T_i:\Omega\times C_J(X_1)\times\cdots\times C_J(X_n)\to C_J(X_i)$ $(i=1,\cdots,n)$

由下式定义：

$$S_i(\omega,x_1(t),\cdots,x_n(t))=x_{0,i}(\omega,t)+\int_0^t G_i(\omega,t,s,x_1(s),\cdots,x_n(s))ds\quad(i=1,\cdots,n)\tag{5.2}$$

和

$$T_i(\omega,y_1(t),\cdots,y_n(t))=x_{0,i}(\omega,t)+\int_0^t F_i(\omega,t,s,y_1(s),\cdots,y_n(s))ds\quad(i=1,\cdots,n)\tag{5.3}$$

且$a_{i,k}(\omega),b(\omega),c(\omega)$满足定理4.1内假设．则非线性随机 Volterra 积分方程组

$$x_i(t)=x_{0,i}(\omega,t)+\int_0^t G_i(\omega,t,s,x_1(s),\cdots,x_n(s))ds\quad(i=1,\cdots,n)\tag{5.4}$$

和

$$x_i(t)=x_{0,i}(\omega,t)+\int_0^t F_i(\omega,t,s,x_1(s),\cdots,x_n(s))ds\quad(i=1,\cdots,n)\tag{5.5}$$

有唯一公共随机解$(x_1^*(\omega,t),\cdots,x_n^*(\omega,t))$，其中 $x_k^*(\omega,t)$是$C_J(X_k)$-值可测映射，$(i=1,\cdots,n)$．

证明 由引理5.3知由(5.2)和(5.3)式定义的映射$S_i,T_i:\Omega\times C_J(X_1)\times\cdots\times C_J(X_n)\to$

$C_J(X_i)$ $(i=1,\cdots,n)$是连续随机单值映射组.又由(5.1)式有

$$\|S_i(\omega,x_1(t),\cdots,x_n(t))-T_i(\omega,y_1(t),\cdots,y_n(t))\|_i$$

$$\leqslant\left|\int_0^t\|G_i(\omega,t,s,x_1(s),\cdots,x_n(s))-F_i(\omega,t,s,y_1(s),\cdots,y_n(s))\|_i ds\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^n a_{i,k}(\omega)\|x_k(s)-y_k(s)\|_{k,J}+b(\omega)[\|x_i(s)-S_i(\omega,x_1(s),\cdots,x_n(s))\|_{i,J}$$

$$+\|y_i(s)-T_i(\omega,y_1(s),\cdots,y_n(s))\|_{i,J}]+c(\omega)[\|x_i(s)-T_i(\omega,y_1(s),\cdots,y_n(s))\|_{i,J}$$

$$+\|y_i(s)-S_i(\omega,x_1(s),\cdots,x_n(s))\|_{i,J}]\qquad a.s.\ (i=1,\cdots,n)$$

因此对一切$x_k,y_k\in C_J(X_k)$ $(k=1,\cdots,n)$有

$$\|S_i(\omega,x_1,\cdots,x_n)-T_i(\omega,y_1,\cdots,y_n)\|_{i,J}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^n a_{i,k}(\omega)\|x_k-y_k\|_{k,J}+b(\omega)[\|x_i-S_i(\omega,x_1,\cdots,x_n)\|_{i,J}$$

$$+\|y_i-T_i(\omega,y_1,\cdots,y_n)\|_{i,J}]+c(\omega)[\|x_i-T_i(\omega,y_1,\cdots,y_n)\|_{i,J}$$

$$+\|y_i-S_i(\omega,x_1,\cdots,x_n)\|_{i,J}]\qquad \text{a.s.}\ (i=1,\cdots,n) \tag{5.6}$$

由具有单值情形的定理4.1知存在 $C_J(X_k)$-值可测映射$x_k^*(\omega,t)$ $(k=1.\cdots,n)$是随机映射组(5.2)和(5.3)的公共随机不动点。因此$(x_1^*(\omega,t),\cdots,x_n^*(\omega,t))$就是非线性随机 Volterra 积分方程组(5.4)和(5.5)的公共随机解.而且利用(5.6)式容易证明此公共随机解是唯一的.

定理5.2 设$(X_i,\|\cdot\|_i)$ $(i=1,\cdots,n)$是可分 Banach 空间。f_i, $g_i:\Omega\times J\times X_1\times\cdots\times X_n\to X_i$ $(i=1,\cdots,n)$满足：对每一$\omega\in\Omega$, $f_i(\omega,\cdot,\cdots,\cdot)$和$g_i(\omega,\cdot,\cdots,\cdot)$ $(i=1,\cdots,n)$一致连续和对一切$(S,x_1,\cdots,x_n)\in J\times X_1\times\cdots\times X_n$, $f_i(\cdot,s,x_1,\cdots,x_n)$和$g_i(\cdot,s,x_1,\cdots,x_n)$ $(i=1,\cdots,n)$可测.假设对给定可测映射$x_{0,i}:\Omega\to X_i$ $(i=1,\cdots,n)$和对一切$x_k,y_k\in C_J(X_k)$ $(k=1,\cdots,n)$.

$$\|g_i(\omega,s,x_1(s),\cdots,x_n(s))-f_i(\omega,s,y_1(s),\cdots,y_n(s))\|_i$$

$$\leqslant\frac{1}{T}\Big\{\sum_{k=1}^n a_{i,k}(\omega)\|x_k(s)-y_k(s)\|_k+b(\omega)[\|x_i(s)-S_i(\omega,x_1(s),\cdots,x_n(s))\|_i$$

$$+\|y_i(s)-T_i(\omega,y_1(s),\cdots,y_n(s))\|_i]+c(\omega)[\|x_i(s)-T_i(\omega,y_1(s),\cdots,y_n(s))\|_i$$

$$+\|y_i(s)-S_i(\omega,y_1(s),\cdots,y_n(s))\|_i\Big\}\qquad \text{a.s.}\ \forall s\in J,\ (i=1,\cdots,n) \tag{5.7}$$

其中映射 $S_i,T_i:\Omega\times C_J(X_1)\times\cdots\times C_J(X_n)\to C_J(X_i)$ $(i=1,\cdots,n)$

由下式定义：

$$S_i(\omega,x_1(t),\cdots,x_n(t))=x_{0,i}(\omega)+\int_0^t g_i(\omega,s,x_1(s),\cdots,x_n(s))ds\quad(i=1,\cdots,n) \tag{5.8}$$

和

$$T_i(\omega,x_1(t),\cdots,x_n(t))=x_{0,i}(\omega)+\int_0^t f_i(\omega,s,x_1(s),\cdots,x_n(s))ds\quad(i=1,\cdots,n) \tag{5.9}$$

和$a_{i,k}(\omega),b(\omega),c(\omega)$满足定理4.1内假设.则非线性随机微分方程组的初值问题：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_i}{dt}=g_i(\omega,t,x_1,\cdots,x_n)\\&x_i(\omega,0)=x_{0,i}(\omega)\qquad(i=1,\cdots,n)\end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_i}{dt}=f_i(\omega,t,x_1,\cdots,x_n)\\&x_i(\omega,0)=x_{0,i}(\omega)\qquad(i=1,\cdots,n)\end{aligned}\right\}\tag{5.11}$$

有唯一公共随机解$(x_1^*(\omega,t),\cdots,x_n^*(\omega,t))$，其中$x_k^*(\omega,t)$ $(k=1,\cdots,n)$是$C_J(X_k)$-值可测映射．

证明 求初值问题(5.10)和(5.11)的公共随机解等价于求非线性 Volterra 随机积分方程组

$$x_i(t)=x_{0,i}(\omega,t)+\int_0^t g_i(\omega,s,x_1(s),\cdots,x_n(s))ds\qquad(i=1,\cdots,n)$$

和

$$x_i(t)=x_{0,i}(\omega,t)+\int_0^t f_i(\omega,s,x_1(s),\cdots,x_n(s))ds\qquad(i=1,\cdots,n)$$

的公共随机解．但作为定理 5.1 的特殊情形知上述二非线性随机 Volterra 积分方程组的公共随机解$(x_1^*(\omega,t),\cdots,x_n^*(\omega,t))$是存在唯一的．故定理得证．

最后我们指出利用定理 4.2 我们也能证明相应于定理5.1和定理5.2的关于随机 Volterra 积分方程组和关于随机微分方程组的初值问题的随机解的存在唯一性定理．为节省计，我们不再陈述．

参 考 文 献

[1] Bharucha-Reid, A. T., *Random Integral Equations*, Press, New York, (1972).

[2] Bharucha-Reid, A. T., *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82 (1976), 641—657.

[3] Tsokos, C. P. and W. J. Padgett, *Random Integral Equations with Applications in Life Sciences and Engineering*, Press New York, (1974).

[4] Singh, K. L. and J. H. M. Whitfield, *Math. Japonica*, 27, 1 (1982), 117—124.

[5] Czerwik, S., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 55 (1976), 136—139

[6] Itoh, S., *Pacific J. Math.*, 68 (1977), 85—90.

[7] Andrus, G. F. and T. Nishiura, *Nonlinear Anal. TMA*, 3 (1979), 65—72.

[8] Himmelberg, C. J., *Fundam. Math.*, 87 (1975), 53—72.

[9] 王梓坤，数学进展，5 (1962), 45—71.

[10] Kuratowski, K. and C. Ryll-Nardzewski, *Bull Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom Phys.*, 13 (1965), 397—403.

[11] Matkowski, J., *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 21 (1973), 322—324.

[12] Matkowski, J., *Dissertations Math.* (Rozprawy Mat.), C XXVII (1975), 1—68.

[13] Castaing, C. and M. Valadier, *Conve Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer-Verlag, (1977), 580.

[14] 丁协平，数学进展，12, 2 (1983).

[15] 刘作述、陈绍仲．科学通报，27 (1982), 1161—1162.

[16] Reich, S., *Boll. Un. Mat. Ital.*, 4 (1972), 26—42.

[17] Iseki, K., *Rend. Sem. Mat. Univ Padova.*, 53 (1975), 15—19.

Fixed Point Theorems of Random Set-Valued Mappings and Their Applications

Ding Xie-ping

(Sichuan Normel College, Chengdu)

Abstract

In this paper, first we show several new random fixed point theorems for random set-valued mappings and for a system of random set-valued mappings. Then, some applications of our results are given for the existence and the uniqueness of random solution for a system of nonlinear random integral and differential equations. Our theorems improve and generalize many recent findings of [4～7, 9, 11～17].