

非线性热传导方程的解和热像法*

章 冠 人

(北京工业学院, 1982年6月24日收到)

摘 要

文中证明了非线性热传导方程只能有连续解, 不可能存在间断解. 列出了解非线性热传导方程的一些方法. 用热像法给出了平面热波对平面对界面的反射和透射, 并证明了热像法的一阶近似性. 最后, 对激光聚爆氙氙小球, 应用高原子序数介质的球壳作为挡过热电子的传播问题作了解释.

一、引 言

一般非线性热传导方程可以写为:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi(T)}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.1)$$

式中 $\varphi = KT^n$, K 和 n 是常数, T 为温度, x 为坐标, t 为时间. 式(1.1)的初始条件为:

当 $t=0$, $T_0(0, x)$ 给定, 但在 x 上不一定连续.

当 $t>0$, $T(t, x)$ 处处有限, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 处处连续. 这样的问题在辐射波的传播、渗流和过热电子

子穿透物质等物理问题中是典型的. 对其解的性质和解法, Я. Б. Зельдович 等在《冲击波物理和高温流体动力学现象》^[1]一书中专门在热波一章中叙述了这个问题; 但他们未能就这个方程的性质和解法作一些普遍的讨论, 另外他们只限于解决在均匀介质中的热波问题, 对热波的反射和透射, 未提供解法, 在现代文献中也没有见到这方面的工作. 本文的目的, 在于对这个问题作一些补充.

二、非线性热传导方程解的一些基本性质

一般非线性二阶偏微分方程, 例如双曲型方程常常能出现间断解. 非线性热传导方程是否也能出现间断解呢? 回答是否定的, 这很容易从下面的证明看出来.

如在 (x, t) 平面上, 任取一条曲线 $x(t)$, 看在这条曲线上, T 存在连续解还是间断解. 为

* 钱伟长推荐.

此, 将式(1.1)对 (x, t) 平面上任一闭合曲线 Γ 所包的面积 D 积分, 得

$$\iint_D \left[\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi(T)}{\partial x} \right) \right] dx dt = \int_{\Gamma} \left\{ T dx + \left[-\frac{\partial \varphi(T)}{\partial x} \right] dt \right\} = 0 \quad (2.1)$$

式(2.1)实际上是能量守恒定律. 如把 Γ 压缩到 $x(t)$ 的两岸, 对一微元积分, 则得

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{\frac{\partial \varphi(T_1)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(T_2)}{\partial x}}{T_1 - T_2} \quad (2.2)$$

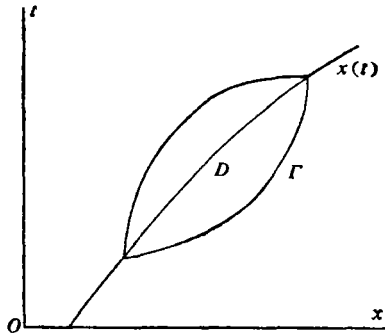


图1 (x, t) 平面图

式中 T_1 和 T_2 为 $x(t)$ 曲线微元两岸的温度. 由于条件 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 处处连续, 所以式(2.2)的分子为零. 如 T 存在间断, 即 $T_1 \neq T_2$, 则 $\frac{dx}{dt} = 0$, 这意味着热不扩散, 这和物理过程不符. 如 T 处处连续, 则 $\frac{dx}{dt} = \text{不定}$, 这表示在域 D

内存在无穷多特征线, 受 x 轴上初始条件的影响.

所以非线性热传导方程只有连续解, 不会出现冲击波这样的间断. 但是, 因为 $\frac{\partial \varphi(T)}{\partial x}$ 处处连续, $\frac{\partial T}{\partial x}$ 可能存在不连续, 例如在不同介质分界面两边, $\frac{\partial T}{\partial x}$ 是有间断的.

[1]中用波头展开解法, 讨论了热波形状问题. 如 $n > 2$, $\frac{\partial T}{\partial x}$ 在波头上趋于无穷, 这表示波头是很陡的; 如 $n < 2$, $\frac{\partial T}{\partial x}$ 在波头上趋于零, 这表示趋近于一般线性情形; 在热波内部, 温度变化不大, 分布平缓. 所以, 非线性热波的传播的两种问题, 初始值问题和边界值问题, 它们的波形如图2和图3所示.

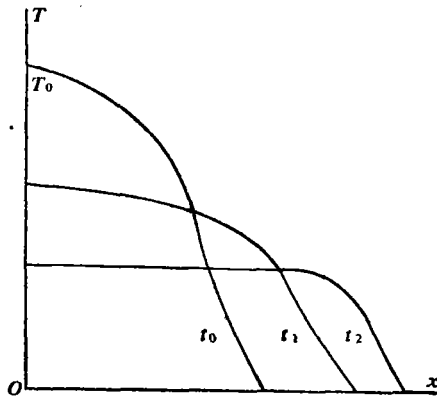


图2 初始值问题波形

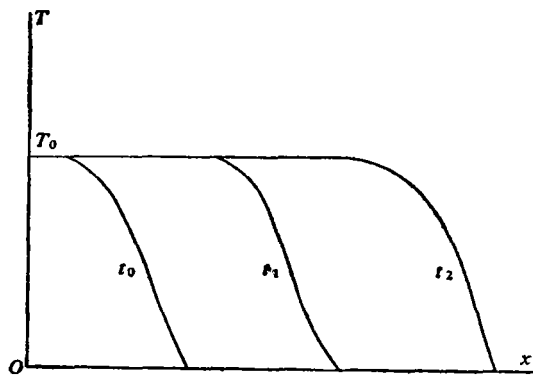


图3 温度不变的边界值问题波形

三、非线性热传导方程解法的讨论

非线性热传导方程的解法已知的有以下几种:

- 1) 行波解^[1];
- 2) 自模拟解^[2];
- 3) 波头展开解^[3];
- 4) 数值解^[3]。

其中数值解对各种条件均能得出解答, 要靠大量的机器计算, 方能得出一些物理概念。自模拟解已经对图2、3和5的三种情形作出了解析解^[1]。对图4和图6两种情形, 只得出了下列边界条件时的近似解析解^[4]。

$$\left. \begin{aligned} T &= \text{const} \cdot t^q & q \geq 0 \\ S &= \text{const} \cdot t^q & q \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

(即边界上的温度和热流随时间的 q 次方增加)。

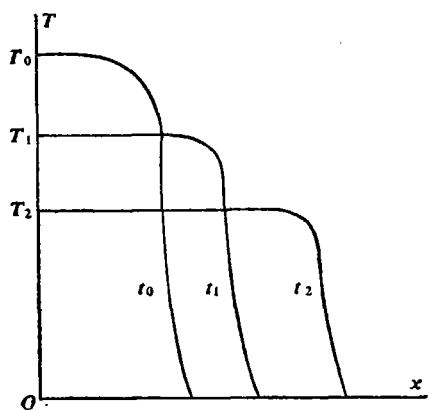


图4 温度变化的边界值问题的波形

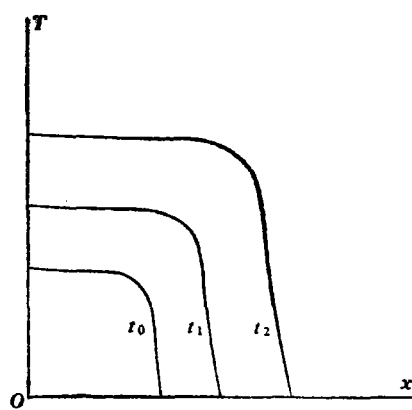


图5 热流为常数边界值问题的波形

R. E. Mashak^[5]用波头展开解法得出了边界条件为

$$T = J_0 e^{2\alpha t} \quad (J_0, \alpha \text{ 为常数}) \quad (3.2)$$

的近似解析解。这些解析解的物理概念清楚, 但受到一定边界条件的限制, 在实际的应用问题中有一定的局限性。

行波解法, 因为即使在最简单的图3的情况下, 热波速度也不是常数。虽然可以得出解答, 但最后还得用数值求根的方法, 求出温度值, 然后解析密接成函数关系^[8]。

所以非线性热传导方程的解法在应用问题中应以数值解为主。对特殊边界条件的解析解可以帮助弄清物理过程。这一点是十分重要的, 可以节省大量数值计算工作。

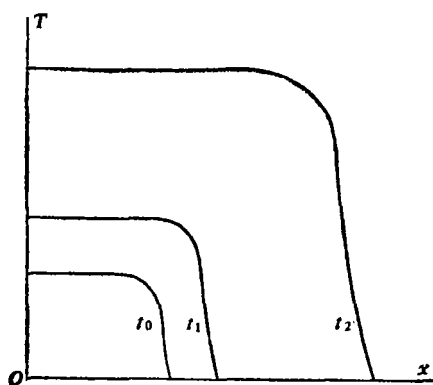


图6 热流变化的边界值问题的波形

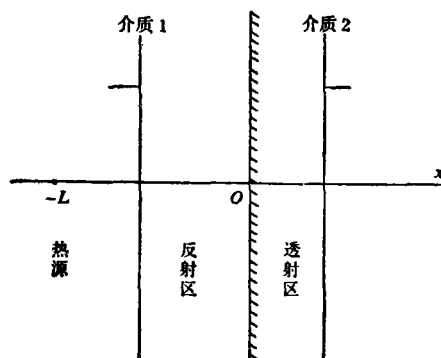


图7 热波的反射和透射

四、平面热波对平面分界面的反射和透射

设两个半空间, 中间的分界面为无限平面. 在距分界面 $-L$ 处有一个无限平面热源, 如图7所示.

设在 $t=0$ 时, 每单位面积热源释放的热量为 Q , 求界面对热波的反射和透射. 分界面两边的 φ 是不同的, 左边设为 $\varphi_1 = K_1 T^n$, 右边为 $\varphi_2 = K_2 T^n$, 指数 n 恰相同, 这在激光聚爆氙气体小球时, 过热电子的传播恰是这种情形, 此时 $n = \frac{7}{2}$ ^[8].

$$K = 70 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{k}{m_e^{\frac{1}{2}} e^4 Z \ln A} \quad (4.1)$$

式中 m_e 为电子质量, e 为电子电荷, Z 为介质原子序数, $\ln A$ 为库伦对数, k 为波尔兹曼常数, n_e 为电子密度. 此时方程式(1.1)应改写为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} T^m \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.2)$$

式中 $a = K/\rho c_v$, ρ 为密度, c_v 为定容比热. 在均匀无限介质中, 这个方程的解为^[11]:

$$T = T_0 \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (4.3)$$

其中 $x_0 = \xi_0 (aQ^m t)^{\frac{1}{m+2}}$ (4.4)

$$T_0 = \frac{\bar{T}}{J} \quad (4.5)$$

$$\bar{T} = \frac{Q}{2x_0}, \quad J = \frac{\sqrt{\pi}}{m+2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2}\right)} \quad (4.6)$$

$$\xi_0 = \left[\frac{(m+2)^{1+m} 2^{1-m}}{m\pi^{m/2}} \cdot \frac{\Gamma^m\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right)}{\Gamma^m\left(\frac{1}{m}\right)} \right]^{\frac{1}{m+2}} \quad (4.7)$$

为了求出有分界面时的解, 我们拟采用类似解静电场问题的电像法, 但是我们知道静电场问题是线性的, 故可以应用电像法. 这里是非线性问题, 是否可以应用线性叠加原理, 尚属疑问. 下面我们将用小参量展开法证明, 如取一阶近似, 在非线性的热传导方程的情形, 可以应用电像法.

为此用无量纲量

$$\xi = \frac{x}{(aQ^m t)^{\frac{1}{m+2}}}, \quad T = \left(\frac{Q^2}{at} \right)^{\frac{1}{m+2}} f(\xi) \quad (4.8)$$

代入原式(4.2), 得

$$(m+2) \frac{d}{d\xi} \left(f^m \frac{df}{d\xi} \right) + \xi \frac{df}{d\xi} + f = 0 \quad (4.9)$$

用小参量 ε 和 δ 展开左右两边的 f , 令左边为

$$f_1 = f_1^{(0)} + \varepsilon f_1^{(1)} + \varepsilon^2 f_1^{(2)} + \dots \quad (4.10)$$

右边为:

$$f_2 = \delta f_2^{(1)} + \delta^2 f_2^{(2)} + \dots \quad (4.11)$$

把式(4.10)和(4.11)分别代入式(4.9), 只保留 ε 和 δ 的一阶项, 可得如下几个方程式:

$$(m+2) \frac{d}{d\xi} \left(f_1^{(0)m} \frac{d}{d\xi} f_1^{(0)} \right) + \frac{d}{d\xi} (f_1^{(0)} \xi) = 0 \quad (4.12)$$

$$(m+2) \frac{d^2}{d\xi^2} [f_1^{(0)m} f_1^{(1)}] + \frac{d}{d\xi} (f_1^{(0)} \xi) = 0 \quad (4.13)$$

$$(m+2) \frac{d}{d\xi} \left(f_2^{(1)m} \frac{d}{d\xi} f_2^{(1)} \right) + \frac{d}{d\xi} (f_2^{(1)} \xi) = 0 \quad (4.14)$$

显然, 方程式(4.12)的积分就是均匀无限介质中的解, 即式(4.3). 方程式(4.13)用 $f_1^{(0)}$ 的解代入后积分, 其一般解为

$$f_1^{(1)} = C \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{m}-1} \quad (4.15)$$

式中 C 为积分常数, 化成温度, 上式可变为

$$\varepsilon T_1^{(1)} = \varepsilon' T_0 \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right)^{\frac{1}{m}-1} \quad (4.16)$$

这里常数 C 已合并到 ε' 中去了, 为了方便, 以后略去撇号. ε 可理解为反射系数. 式(4.16)也可理解为在热源的镜像点放置一个新热源在 x 点产生的温度.

由于式(4.14)完全和式(4.12)相似, 所以在右边介质内的温度完全可以采用式(4.3)的形式. 当然由于介质不同, T_0 和 x_0 不一定相同. 所以, 这就相当于介质全是右边介质, 在点源处放置了另一新点源在右边介质内产生的温度. δ 可理解为透射系数.

从这些证明, 说明了如取小参量的一阶近似, 完全可以应用热像法如下:

为了求出反射波和透射波, 利用无限均匀介质中瞬时释放热量为 Q 的解答式(4.3)作为入射热波, 热源放在 $-L$ 处往正方向传播的波为

$$T_1 = T_0 \left[1 - \left(\frac{-L - (x)}{x_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{m}} \quad x \leq 0 \quad (4.17)$$

对反射波, 设热源放在 $+L$ 处往负方向传播为:

$$T_{反} = \varepsilon T_0 \left[1 - \left(\frac{+L + (x)}{x_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{m}-1} \quad x \leq 0 \quad (4.18)$$

对透射热波, 设介质为第二种介质, 在 $-L'$ 处放置热源往正方向传播的波为

$$T_{透} = \delta T_0 \left[1 - \left(\frac{-L' - (x)}{x'_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{m}} \quad x \geq 0 \quad (4.19)$$

这里 T_0 的差异由 δ 待定常数中来调整. 其中 x'_0 为热波在右边介质内传播的波头位置, $L' = \frac{L}{x'_0} x'_0$

为热源距界面的等效距离. 这样, 在左边介质中反射波后的温度为:

$$T_1 = T_0 \left[1 - \left(\frac{L+x}{x_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{m}} + \varepsilon T_0 \left[1 - \left(\frac{L+x}{x_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{m}-1} \quad (4.20)$$

在右边介质中透射波后温度为:

$$T_2 = \delta T_c \left[1 - \left(\frac{L' + x}{x_\phi'} \right)^2 \right]^{\frac{1}{m}} \quad (4.21)$$

式中 δ 可解释为透射系数.

边界条件为在 $x=0$ 处:

$$T_1 = T_2 \quad (4.22)$$

$$K_1 T_1^m \frac{\partial T_1}{\partial x} = K_2 T_2^m \frac{\partial T_2}{\partial x} \quad (4.23)$$

把式(4.20)和(4.21)代入式(4.22)和(4.23), 解之可得反射和透射系数为:

$$\varepsilon = \frac{(K_1 x_\phi' - K_2 x_\phi) \left[1 - \left(\frac{L}{x_\phi} \right)^2 \right]}{K_1 x_\phi' + K_2 x_\phi (m-1)} \quad (4.24)$$

$$\delta = \frac{m K_1 x_\phi' \left[1 - \left(\frac{L}{x_\phi} \right)^2 \right]}{K_1 x_\phi' + K_2 x_\phi (m-1)} \quad (4.25)$$

为了要求出右边介质内波头位置 x_ϕ' , 在任何时刻, 必须满足能量守恒条件, 即

$$\int_{-x_\phi - L}^{-x_1} \rho_1 c_{v1} T_1 dx + \int_{-x_1}^0 \rho_1 c_{v1} T_1 dx + \int_0^{x_\phi'} \rho_2 c_{v2} T_2 dx = Q \quad (4.26)$$

式中 $-x_1$ 为反射波头位置. 将式(4.17)、(4.20)、(4.21)、(4.24)和(4.25)代入式(4.26), 展成级数积分. 因为从非线性热传导的特点, 波内温度分布比较平缓, 只取级数中的一阶项, 忽略所有的二阶以上项, 并近似地用 $Q \sim 2\rho_1 c_{v1} T_c x_\phi$ 代入, 则可得

$$x_\phi' \sim \sqrt{\frac{Z_1 \rho_1 c_{v1}}{m Z_2 \rho_2 c_{v2}} x_\phi^2 - \frac{Z_1 \rho_1 c_{v1}}{Z_2 \rho_2 c_{v2}} L x_\phi} \quad (4.27)$$

如完全忽略上式中的根号内的第二项, 即得

$$x_\phi' \sim \sqrt{\frac{Z_1 \rho_1 c_{v1}}{m Z_2 \rho_2 c_{v2}}} x_\phi \quad (4.28)$$

两边对 t 微分, 有

$$\dot{x}_\phi' \sim \sqrt{\frac{Z_1 \rho_1 c_{v1}}{m Z_2 \rho_2 c_{v2}}} \dot{x}_\phi \quad (4.29)$$

这表示如右边第二介质是重介质, 其中的热波速度是左边的 $\sqrt{\frac{Z_1 \rho_1 c_{v1}}{m Z_2 \rho_2 c_{v2}}}$ 倍. 如不忽略式

(4.27)中的第二项, 热波速度还要减小.

在激光聚爆氙气体小球的设计中, 为了防止过热电子进入氙气体小球, 现在均用金作小球壳, 其作用就是为了减小热波速度, 以实现冲击压缩. 实际上, 如用更重的材料作为球壳, 可能更好, 不过不如金易于加工罢了.

从式(4.27)又可见出, 右边介质中的热波速度还决定于热源离分界面的距离 L , 如将热源放置得离分界面远些, 热波的速度还要减小. 此外, 如把式(4.28)代入式(4.25), 得

$$\delta = \frac{m K_1 \sqrt{\rho_1 c_{v1} Z_1} \left[1 - \left(\frac{L}{x_\phi} \right)^2 \right]}{m K_1 \sqrt{\rho_1 c_{v1} Z_1} + (m-1) K_2 \sqrt{m Z_2 \rho_2 c_{v2}}} \quad (4.30)$$

透射系数 δ 和 x_ϕ 有关, 而 x_ϕ 和时间 t 有关, 当 $x_\phi=L$ 时 $\delta=0$, 当 $x_\phi=\infty$ 时, δ 趋于常数, 所以热波的透射作用是随时间而增长, 这又起到了阻挡温度的作用。

五、结 论

非线性热传导方程, 除数值解可以给出非均匀空间的解外, 求解析解是十分困难的, 本文用热像法近似给出了有无限平分界面的解析解, 可以清楚地看出高 Z 密度介质的挡热波作用, 这是数值解所无法比拟的。

参 考 文 献

- [1] Зельдович Я. Б. и Ю. П. Райзер, *Физика Ударных Волн и Высоко-Температурных Гидродинамических Явлений*, Гифмл, Москва (1963).
- [2] Баренблатт Г. И., О приближенном решении задач одомерной нестационарной фильтрации в пористой среде, *ПММ*, 58, (1954), 351.
- [3] Richtmyer, R. D. and K. W. Morton, *Difference Methods for Initial Value Problems*, 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc. (1967).
- [4] Баренблатт Г. И., О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде, *ПММ*, 56, (1952), 67.
- [5] Marshak, R. E., Effect of radiation on shock wave behavior, *Phys. of Fluids*, 1, (1958), 24.
- [6] Spitzer, Jr., L., *Physics of Fully Ionized Gases*, 2nd edition, New York, (1961).

Solution of Non-Linear Heat Conduction Equation and Image Method

Zhang Guan-ren

(Beijing Institute of Technology, Beijing)

Abstract

In this paper, the author proves that, for a non-linear heat conduction equation, there is no discontinuous solution. Some methods of solution for a non-linear conduction equation are depicted. For a plane interface, the reflection and transmission of a heat wave are given by the method of images. The 1st. order of approximation of this method is proved. Lastly, the prevention of superheated electrons in laser implosion of deuterium-tritium gas sphere with a shell made of high Z material is interpreted.