

关于摄动分支问题的奇异摄动法*

朱正佑 程昌钧

(兰州大学, 1983年8月15日收到)

摘 要

本文较全面地阐述了用奇异摄动法计算摄动分支问题(1.6)在 $\nu=0$, $\lambda=0$, $\delta=0$ 附近的解的一致渐近展式的一般数学原理和方法, 并推广了牛顿多边形原理. 最后, 给出了两个计算实例.

一、引 言

考虑如下的非线性方程

$$f(x, \epsilon) = 0 \quad (1.1)$$

$f: X \times R \rightarrow X$ 是充分光滑的算子, X 是某 Banach 空间. 对任意的 ϵ , 假定 $x=0$ 是(1.1)的解, 这样的解称为平凡解. 设 $f(x, \epsilon)$ 关于 x 的 Frechet 导算子在 $x=0$, $\epsilon=\epsilon_0$ 处奇异, 即

$$A \equiv F'_x(0, \epsilon_0) \quad (1.2)$$

奇异. 若假定 A 是闭值的, 且满足

$$\left. \begin{aligned} \text{Null}(A) &= \text{span}\{\phi\}, \|\phi\|=1 \\ \text{Null}(A^*) &= \text{span}\{\phi^*\}, \|\phi^*\|=1 \\ \phi^*\phi &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

则在一定条件下, (1.1) 的平凡解在 $(0, \epsilon_0)$ 处发生分支^[1].

非线性算子方程(1.1)的意义是相当广泛的, 例如, 在弹性力学中, ϵ 表示载荷, 分支被称为屈曲; 在流体力学中, ϵ 是流体参数, 如 Mach 数, 而分支被称为临界点. 当我们考虑到实际问题中有小的缺陷或非均匀性的影响时, 问题的数学描述就由(1.1)变成为

$$\Phi(x, \epsilon, \delta) = 0 \quad (1.4)$$

其中 δ 表示缺陷或非均匀性大小的参数, 称为摄动参数. 在(1.4)和(1.1)之间, 我们假定有如下关系

$$\Phi(x, \epsilon, 0) = f(x, \epsilon) \quad (1.5)$$

我们把(1.1)称为分支问题, 而把(1.4)称为摄动分支问题. 摄动分支问题的一个基本问题是

* 叶开沅推荐.

本文曾在“分叉、突变、稳定性”学术讨论会(1983. 11, 武汉)上宣读. 承蒙会议领导小组王仁教授推荐给本刊. ——编者

如何计算出在 $x=0, \epsilon=\epsilon_0, \delta=0$ 附近的解 $x=x(\epsilon, \delta)$ 关于 δ 的一致渐近展式。

由(1.5), 虽然有

$$\Phi'_x(0, \epsilon_0, 0) = f'_x(0, \epsilon_0) = A$$

由于 A 是奇异的, 并满足(1.3), 所以, 按 Lyapunov-Schmidt 过程^[1,2], 我们总能把(1.4)在 $x=0, \epsilon=\epsilon_0, \delta=0$ 附近的求解问题化为一维方程

$$F(y, \lambda, \delta) = 0 \quad (1.6)$$

在 $y=0, \lambda=0, \delta=0$ 的领域内的求解问题。其中 F 是 $R^3 \rightarrow R$ 的充分光滑的算子, 并满足

$$F(0, 0, 0) = 0, \quad F'_y(0, 0, 0) = 0 \quad (1.7)$$

这样一来, 为了计算 $x=x(\epsilon, \delta)$ 关于 δ 的一致渐近展式, 只要计算出一维摄动分支问题(1.6)的解 $y=y(\lambda, \delta)$ 在 $y=0, \lambda=0, \delta=0$ 附近关于 δ 的一致渐近展式就行了。另外, 一维摄动分支问题(1.6)本身在许多实际问题中, 如弹性振动中, 也是经常遇到的。因而, 我们在本文中着重研究一维摄动分支问题(1.6)的解的一致渐近展式的算法。

[3] 中利用匹配展开法对一些具体问题的摄动分支问题给出了一致渐近解, 但缺乏一般性的论述。本文较全面地阐述了用奇异摄动法计算(1.6)的解在 $y=0, \lambda=0, \delta=0$ 附近关于 δ 的一致渐近展式的一般数学原理和使用方法。

在第二节中, 我们推广了牛顿多边形方法^[4], 给出了异奇摄动法的一般计算方法, 并证明了这种方法的正确性。然后, 在第三节中, 对两个具体的例子进行了计算, 给出了它们的一致渐近展式。

二、一维摄动分支问题的奇异摄动法

1. 考虑如下的一维方程

$$F(y, \lambda, \delta) = 0 \quad (2.1)$$

其中 F 是 $R^3 \rightarrow R$ 的算子。虽然下面得到的结论当 F 充分光滑时就能成立, 但为了简单起见, 我们仍假定 F 是解析的。设

$$F(0, 0, 0) = 0 \quad (2.2)$$

$$F'_y(0, 0, 0) = 0 \quad (2.3)$$

记在 $y=0, \lambda=0, \delta=0$ 附近(2.1)的解为 $y=y(\lambda, \delta)$, 我们的目的是要求出当 δ 充分小时, $y=y(\lambda, \delta)$ 关于 δ 的一致渐近展式。假定

$$p = \text{ord} F(y, 0, 0) < \infty \quad (2.4)$$

$$q = \text{ord} F(0, 0, \delta) < \infty \quad (2.5)$$

$$r = \text{ord} F(0, \lambda, 0) < \infty \quad (2.6)$$

由(2.3)知, $p \geq 2$ 。将(2.1)式在 $(0, 0, 0)$ 处展开:

$$F(y, \lambda, \delta) = \sum a_{ijk} y^i \lambda^j \delta^k \quad (2.7)$$

由(2.4), (2.5)知, $a_{r00} \neq 0, a_{00q} \neq 0$ 。

为了研究在 $\lambda=0$ 附近解 $y=y(\lambda, \delta)$ 的性态, 我们把 $\lambda=0$ 的领域放大, 并使用变形坐标的技巧, 作如下的自变量的变数变换:

$$\delta = (\text{sign} \delta) \mu^i \quad (2.8)$$

$$\lambda = \mu^m \eta, \quad \eta = \xi + \xi_1 \mu + \xi_2 \mu^2 + \dots \quad (2.9a, b)$$

$$y = \mu^n z, \quad z = y_0 + y_1 \mu + y_2 \mu^2 + \dots \quad (2.10a, b)$$

其中 l, m, n 是待定的正整数. 只有选取适当的 l, m, n , 才能使得当把 (2.8)~(2.10) 代入 (2.7) 时, 求出一致有界的 y_i 和 ξ_i , 从而得到 (2.1) 的解关于 δ 的一致渐近展式. 我们的核心问题就是讨论合理选取 l, m, n 的方法.

2. 方法的叙述

取一个三维的直角坐标系 (i, j, k) , 若展式 (2.7) 中的系数 $a_i^*, j^*, k^* \neq 0$, 则在第一卦中画出一个点, 其坐标为 (i^*, j^*, k^*) . 这样, 我们在第一卦中便画出了若干个具有整数坐标的点.

首先, 我们考察在 $i-k$ 平面上所画出的那些点. 因为 $a_{200} \neq 0, a_{00q} \neq 0$, 所以在 $i-k$ 平面上至少有两个点 $(p, 0, 0), (0, 0, q)$. 现在, 作一直线 L , 使其与 i 轴重合; 然后, 在 $i-k$ 平面上以 $B_0(p, 0, 0)$ 为心, 顺时针方向转动直线 L , 直到碰到所画出的点为止. 直线 L 可能同时碰到几个点, 记其中 i 坐标为最小的点为 $B_1(p_1, 0, q_1)$. 再以 B_1 为心, 顺时针方向转动直线 L , 直到再次碰到 $i-k$ 平面上所画出的点为止, 记这时直线 L 所碰到的点中 i 坐标为最小的点为 $B_2(p_2, 0, q_2)$. 继续这样转动直线 L , 直到经过 τ 次转动之后, 直线 L 碰到 $B_\tau(0, 0, q)$ 为止. 按这种方法, 我们在 $i-k$ 平面上得到一折线 $\overline{B_0 B_1 \cdots B_\tau}$, 称这种折线为牛顿多边形或牛顿图 (图1).

其次, 我们作一个平面 π 和 $i-k$ 平面重合. 分别以每一折线 $\overline{B_{s-1} B_s}$ 为轴转动平面 π , 使得 π 上的点 $(0, 0, 0)$ 的 j 坐标在转动中逐渐增大, 直到平面 π 碰到所画出的点 C_s 为止. 记这时 π 平面的位置为 π_s , C_s 的坐标为 (c_{s1}, c_{s2}, c_{s3}) . 按这种作法, 显然有 $c_{s2} > 0$. 现在, 由等式

$$n_s p_{s-1} + l_s q_{s-1} = n_s p_s + l_s q_s = n_s c_{s1} + m_s c_{s2} + l_s c_{s3} \quad (2.11)$$

便可确定 n_s, m_s, l_s ($s=1, 2, \dots, \tau$). 一般说来, 这些常数可差一个比例因子. 我们取满足 (2.11) 式的最小的 n_s, m_s, l_s 作为所要求的结果. 并令

$$n_s p_{s-1} + l_s q_{s-1} = t_s \quad (2.12)$$

由于 $(p_{s-1}, 0, q_{s-1}), (p_s, 0, q_s), (c_{s1}, c_{s2}, c_{s3})$ 是平面 π_s 上不在一直线上的三个点, 所以, 当 $(i, j, k) \in \pi_s$ 时, 必有

$$n_s i + m_s j + l_s k = t_s \quad (2.13)$$

而当 (i, j, k) 位于 π_s 的不含原点的一侧时, 则有

$$n_s i + m_s j + l_s k > t_s \quad (2.14)$$

特别, 当 $q=1$ 时, 在 $i-k$ 平面上的牛顿多边形由一条直线 $\overline{B_0(p, 0, 0) B_1(0, 0, 1)}$ 组成. 这时, 若 $a_{010} \neq 0$, 则 π_1 为图 2 中 $B_0 B_1 D_1$ 所定的平面. 若 $a_{010} = 0$ 而 $a_{110} \neq 0$, 则 π_1 为图 2 中 $B_0 B_1 D_2$ 所定的平面. [3] 中实际上只讨论了这两种最简单的情形.

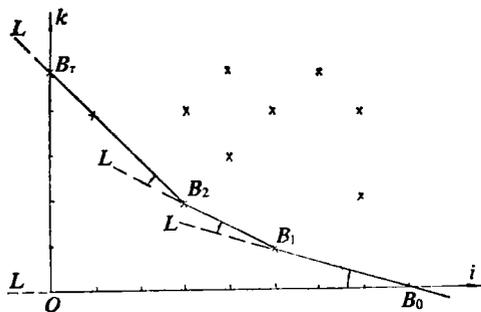


图 1

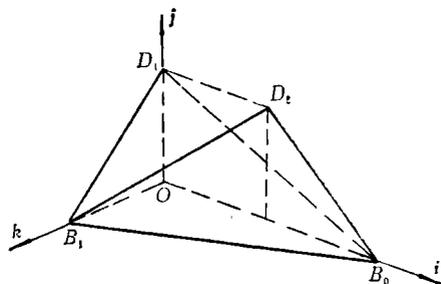


图 2

3. 方法的合理性

现在, 我们来证明上述方法的合理性. 设 π_s 是如上所述的一个平面, n_s, m_s, l_s 满足 (2.11). 作变数变换 (2.8), (2.9a) (2.10a) 并将它们代入 (2.7) 得到

$$\sum_{(i,j,k) \in \pi_s} a_{i,j,k} z^i \eta^j (\text{sign} \delta)^k \mu^{n_s, i+m_s, j+l_s, k} \\ + \sum_{(i,j,k) \notin \pi_s} a_{i,j,k} z^i \eta^j (\text{sign} \delta)^k \mu^{n_s, i+m_s, j+l_s, k} = 0$$

由 (2.13) 知, 此式第一个和号中各项 μ 的幂次均为 t_s , 而第二个和号中各项 μ 的幂次均大于 t_s . 用 μ^{t_s} 除以上式后, 得到

$$F_s(z, \eta, \mu) \equiv \sum_{(i,j,k) \in \pi_s} a_{i,j,k} z^i \eta^j (\text{sign} \delta)^k + \varphi_s(z, \eta, \mu) \quad (2.15)$$

其中

$$\varphi_s(z, \eta, \mu) \equiv \sum_{(i,j,k) \notin \pi_s} a_{i,j,k} z^i \eta^j (\text{sign} \delta)^k \mu^{n_s, i+m_s, j+l_s, k-t_s} \quad (2.16)$$

显然,

$$\varphi_s(z, \eta, 0) = 0 \quad (2.17)$$

令

$$\psi_s(z, \eta) \equiv \sum_{(i,j,k) \in \pi_s} a_{i,j,k} z^i \eta^j (\text{sign} \delta)^k \quad (2.18)$$

则 $\psi_s(z, \eta)$ 是 z 的多项式.

情形 1: 若 π_s 画上的点的 i 坐标都在 p_{s-1} 和 p_s 之间, 则由于 $B_{s-1}(p_{s-1}, 0, q_{s-1})$ 和 $B_s(p_s, 0, q_s)$ 属于 π_s , 所以 (2.18) 是 z 的 p_s 次多项式, 并且其最低次幂为 p_{s-1} . 因而

$$\psi_s(z, \eta) = 0 \quad (2.19)$$

除 p_{s-1} 个恒为零的解之外, 还有 $k_s = p_s - p_{s-1}$ 个非零解, 记为 $z_{s_1}^{(0)}(\eta), z_{s_2}^{(0)}(\eta), \dots, z_{s_{k_s}}^{(0)}$. 当它们都是 (2.19) 的单重根时, 则我们得到:

$$\left. \begin{aligned} F_s(z_{s_i}^{(0)}(\eta), \eta, 0) &= 0 \\ \frac{\partial F_s}{\partial y}(z_{s_i}^{(0)}(\eta), \eta, 0) &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (t=1, 2, \dots, k_s) \quad (2.20)$$

由隐函数定理知, 在 $(z_{s_i}^{(0)}(\eta), \eta, 0)$ 附近可以由 (2.15) 唯一地解出 $z_{s_i}(\eta, \mu)$, 并且 $z_{s_i}(\eta, \mu)$ 可展成 μ 的级数:

$$z_{s_i}(\eta, \mu) = z_{s_i}^{(0)}(\eta) + \mu z_{s_i}^{(1)}(\eta) + \dots \quad (2.21)$$

这就说明, 在变换 (2.8), (2.9a), (2.10a) 下确有展式 (2.10b).

一般说来, (2.21) 中的 $z_{s_i}^{(k)}(\eta)$ 可能不是一致有界的. 为了保证 (2.10b) 中的 y_i 的一致有界性, 我们还应采用变形坐标 (2.9b), 并适当地选取其中的 ξ_i .

情形 2: 若平面 π_s 上画出的点中有一个 (或几个) 点的 i 坐标小于 p_{s-1} [记这点的坐标为 (i^*, j^*, k^*) , 显然, $j^* > 0$], 其他画出的点的 i 坐标均在 $[p_{s-1}, p_s]$ 之间, 则多项式 $\psi_s(z, \eta)$ 的首项为 $a_{p, 0, q_s} z^{p_s} (\text{sign} \delta)^{q_s}$, 最低次幂的项为 $a_{i^*, j^*, k^*} z^{i^*} \eta^{j^*} (\text{sign} \delta)^{k^*}$, 次低次幂的项为 $a_{p_{s-1}, 0, q_{s-1}} z^{p_{s-1}} (\text{sign} \delta)^{q_{s-1}}$. 因而 (2.19) 有 i^* 个恒为零的解; 同时, 有 $p_{s-1} - i^*$ 个解当 $\eta = 0$ 时为零; 剩下还有 $k_s = p_s - p_{s-1}$ 个不为零的解 $z_{s_1}^{(0)}(\eta), \dots, z_{s_{k_s}}^{(0)}(\eta)$. 对这 k_s 个解可采用类似情况

1的讨论方法, 证明(2.8), (2.9), (2.10)是正确的.

情形3: 若平面 π_s 上画出的点中有一个(或几个)点的 i 坐标大于 p_s [记这点的坐标为 (i^*, j^*, k^*) , 显然, $j^* > 0$], 其余的点的 i 坐标均在 $[p_{s-1}, p_s]$ 之间, 则多项式 $\psi_s(z, \eta)$ 的首项为 $a_{i^* j^* k^*} z^{i^*} \eta^{j^*} (\text{sign} \delta)^{k^*}$, 次高阶项为 $a_{p, 0 q} z^p (\text{sign} \delta)^q$, 最低阶项为 $a_{p, \dots, 10 q, \dots, 1} z^{p-1} (\text{sign} \delta)^{q-1}$. 因此, (2.19)有 p_{s-1} 个恒为零的解; 同时, 有 $i^* - p_s$ 个解当 $\eta \rightarrow 0$ 时无界; 另外, 还有 $k_s = p_s - p_{s-1}$ 个非零解 $z_{s_1}^{(0)}(\eta), \dots, z_{s_{k_s}}^{(0)}(\eta)$. 对这 k_s 个解可采用类似情形1的讨论, 可证明(2.8), (2.9), (2.10)是正确的.

这样, 对于平面 π_s , 我们求得了 $p_s - p_{s-1}$ 个(2.7)的解. 在这些解中可能有一些是复的. 如果我们只讨论实解, 则 $z_{s_i}^{(0)}(\eta)$ ($i=1, \dots, k_s$)中有几个是实的, 我们就得到(2.7)的几个实解. 因为 $k_1 + k_2 + \dots + k_\tau = p$, 所以, 对于每一个平面 π_s ($s=1, 2, \dots, \tau$)都进行上述的计算, 我们就得到(2.7)的 p 个复解, 其中实解的个数为 $z_{s_i}^{(0)}(\eta)$ ($i=1, \dots, k_s; s=1, \dots, \tau$)中实数的个数.

三、一些计算实例

例1 我们来考察如下的摄动分支方程

$$y^4 + y^3 \lambda + y^2 \delta + y \delta \lambda^2 + \lambda^5 + \delta^3 = 0 \quad (3.1)$$

这时, 按第二节中所述的方法可得到两个平面 π_1 和 π_2 , 如图3所示. 对于平面 π_1 , 我们求得 $n=1, m=1, l=2$. 因而作变换

$$\left. \begin{aligned} \delta &= (\text{sign} \delta) \mu^2 \\ \lambda &= \mu(\xi + \xi_1 \mu + \dots) \\ y &= \mu(y_0 + y_1 \mu + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

代入(3.1), 约去 μ^4 , 然后比较 μ 的同次幂的系数得到:

$$y_0^4 + \xi y_0^3 + (\text{sign} \delta) y_0^2 = 0 \quad (3.3a)$$

$$4y_0^3 y_1 + 3y_0^2 y_1 \xi + 2y_0 y_1 (\text{sign} \delta) + y_0^2 \xi_1 + \xi^5 + (\text{sign} \delta) \xi^2 y_0 = 0 \quad (3.3b)$$

$$\begin{aligned} 4y_0^2 y_2 + 3y_0^2 y_2 \xi + 2y_0 y_2 (\text{sign} \delta) + 6y_0^2 y_1^2 + 3y_0 y_1^2 \xi + 3y_0^2 y_1 \xi \\ + y_0^2 \xi_2 + y_1^2 (\text{sign} \delta) + 5\xi \xi_1 + y_1 \xi^2 (\text{sign} \delta) + 2\xi \xi_1 y_0 (\text{sign} \delta) \\ + \text{sign} \delta = 0 \end{aligned} \quad (3.3c)$$

等. 由(3.3a)得到 y_0 的两个非零解

$$y_0^{\pm} = \frac{1}{2} (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4 \text{sign} \delta}) \quad (3.4a)$$

由(3.3b)得到:

$$y_1^{\pm} = -(\xi^5 + \xi^2 y_0^{\pm} \text{sign} \delta + \xi_1 (y_0^{\pm})^3) / (4(y_0^{\pm})^3 + 3(y_0^{\pm})^2 \xi + 2y_0^{\pm} \text{sign} \delta) \quad (3.4b)$$

为使 y_1^{\pm} 有界, 应选取 ξ_1 使分母为零时分子也为零, 由此求得 $\xi_1 = 12$.

类似地可由(3.3c)中求出 y_2^{\pm} , 并选取 ξ_2 使其中分母为零时分子也为零. 这样依次可求得 y_i 和 ξ_i . 因而, 对于平面 π_1 , 我们得到(3.1)在 $y=0, \lambda=0, \delta=0$ 附近的两个解的一致渐近展式

$$\left. \begin{aligned} \delta &= (\text{sign} \delta) \mu^2, \quad \lambda = \mu(\xi + 12\mu + O(\mu^2)) \\ y^{\pm} &= \mu \left[\frac{1}{2} (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4 \text{sign} \delta}) + y_1^{\pm} \mu + O(\mu^2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

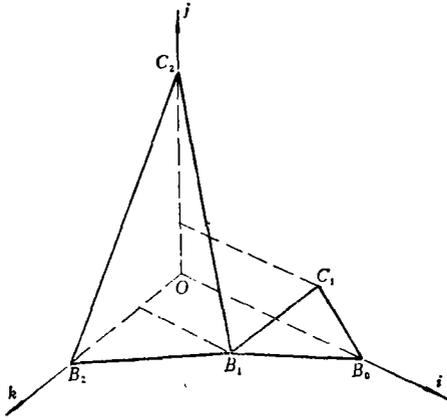


图 3

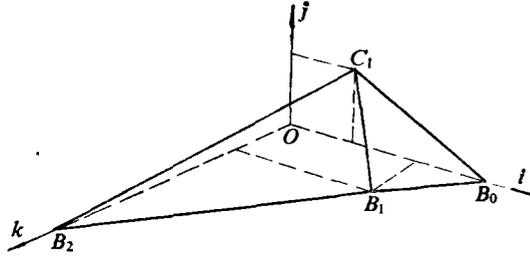


图 4

其中 y_i 由(3.4b)给定, $\xi_1=12$.

对于平面 π_2 , 我们求得 $n=5, m=3, l=5$, 所以作变换

$$\delta = \mu^5, \quad \lambda = \mu^3(\xi + \xi_1\mu + \dots), \quad y = \mu^5(y_0 + y_1\mu + \dots) \quad (3.6)$$

代入(3.1), 约去 μ^{10} 后, 比较 μ 的同次幂的系数得到

$$y_0^5 + \xi^5 + 1 = 0 \quad (3.7a)$$

$$2y_0y_1 + 5\xi^4\xi_1 + y_0\xi^2 = 0 \quad (3.7b)$$

$$2y_0y_2 + y_1^2 + 5\xi^4\xi_2 + y_1\xi^2 = 0 \quad (3.7c)$$

等等. 由(3.7a)得到

$$y_0^{\ddagger} = \pm \sqrt{-\xi^5 - 1}$$

由(3.7b)得到

$$y_1^{\ddagger} = -(y_0^{\ddagger}\xi^2 + 5\xi^4\xi_1)/2y_0^{\ddagger}$$

选取 ξ_1 , 使此式中分母为零时, 分子也为零. 于是, 可得 $\xi_1=0$. 因而

$$y_1^{\ddagger} = -\xi^2/2$$

将 $y_0^{\ddagger}, y_1^{\ddagger}$ 代入(3.7c), 并可得到 y_2 , 选取其中的 ξ_2 使得当 $y_0^{\ddagger}=0$ 时, y_2 的分子也为零. 于是可得 $\xi_2=1/20, y_2^{\ddagger}=0$. 这样一来, 我们又求得了(3.1)在 $y=0, \lambda=0, \delta=0$ 附近的两个解的渐近展式:

$$\delta = \mu^5, \quad \lambda = \mu^3\left(\xi + \frac{1}{20}\mu^2 + O(\mu^3)\right), \quad y^{\ddagger} = \mu^5\left(\pm\sqrt{-\xi^5 - 1} - \frac{\mu}{2}\xi^2 + O(\mu^3)\right) \quad (3.8)$$

这样, 我们求得了方程(3.1)在 $y=0, \lambda=0, \delta=0$ 附近的四个解的一致渐近展式(3.5), (3.8).

例 2 在非线性弹簧的振动问题^[5]中, 会出现如下的代数方程

$$F(y, \lambda, \delta) = y^3 + \delta y^2 + \lambda y - \lambda \delta^2 + \delta^4 = 0 \quad (3.9)$$

显然, $F(0,0,0) = F'_i(0,0,0) = 0$. 我们希望求出(3.9)的解在 $y=0, \lambda=0, \delta=0$ 附近关于 δ 的一致渐近展式.

按照第二节的方法, 我们得到两个平面 π_1 和 π_2 , 如图 4 所示. 由平面 π_1 , 可得 $n=1, m=2, l=1$. 因而作变换:

$$\delta = \mu, \quad \lambda = \mu^2(\xi + \xi_1\mu + \dots), \quad y = \mu(y_0 + y_1\mu + \dots) \quad (3.10)$$

将此式代入(3.9), 比较 μ 的同次幂的系数得到

$$y_0'' + y_0' + \xi y_0 = 0 \quad (3.11a)$$

$$3y_0'' y_1 + 2y_0' y_1 + \xi y_1 + \xi_1 y_0 - \xi^2 + 1 = 0 \quad (3.11b)$$

等等。由(3.11a)可解出一个恒为零的解及两个如下的非零解

$$y_0^{(1')} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1-4\xi}), \quad y_0^{(2')} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1-4\xi}) \quad (3.12)$$

因为当 $\xi=0$ 时, $y_0^{(2')}=0$ 。我们可把 $y_0^{(2')}$ 舍去。由(3.11b)可解得:

$$y_1 = (\xi^2 - 1 - \xi_1 y_0^{(1')}) / (3(y_0^{(1')})^2 + 2y_0^{(1')} + \xi) \quad (3.13)$$

选取 ξ_1 , 使得式中分母为零时, 分子也为零。由此可得 $\xi_1=15/8$ 。这样, 对于平面 π_1 , 得到(3.9)在 $y=0, \lambda=0, \delta=0$ 附近的一个解的渐近展式

$$\lambda = \delta^2 \left(\xi + \frac{15}{8} \delta + O(\delta^2) \right), \quad y = \delta \left[\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1-4\xi}) + y_1 \delta + O(\delta^2) \right] \quad (3.14)$$

式中 y_1 由(3.13)确定, $\xi_1=15/8$ 。

对于平面 π_2 , 我们得到 $n=3, m=5, l=2$ 。因而作变换

$$\delta = \mu^2 (\text{sign } \delta), \quad \lambda = \mu^5 (\xi + \xi_1 \mu + \dots), \quad y = \mu^3 (y_0 + y_1 \mu + \dots) \quad (3.15)$$

代入(3.9)后, 比较 μ 的同次幂的系数得到:

$$(\text{sign } \delta) y_0'' + \xi y_0 + 1 = 0 \quad (3.16a)$$

$$2(\text{sign } \delta) y_0 y_1 + \xi y_1 + \xi_1 y_0 + y_0' - \xi = 0 \quad (3.16b)$$

等等。由(3.16a)可解出

$$y_0^{(\alpha')} = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4 \text{sign } \delta}) / 2 \text{sign } \delta \quad (\alpha=1, 2) \quad (3.17)$$

而由(3.16b)可得到

$$y_1^{(\alpha')} = (\xi - (y_0^{(\alpha')})^2 - y_0^{(\alpha')} \xi_1) / [2(\text{sign } \delta) y_0^{(\alpha')} + \xi] \quad (\alpha=1, 2) \quad (3.18)$$

由(3.17)知, 当 y_1 的分母为零时, $\xi^2 = 4 \text{sign } \delta$ 。因而, 当 $\text{sign } \delta = -1$ 时, (3.18)中没有奇性, 可取 $\xi_1=0$ 。当 $\text{sign } \delta = 1$ 时, 为使(3.18)的分母为零时分子也为零, 应取 $\xi_1 = -3$ 。这样, 我们又得到了(3.9)在 $y=0, \lambda=0, \delta=0$ 附近的两个解的渐近展式

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= |\delta|^{5/2} (\xi - 3|\delta|^{1/2} + O(|\delta|)) \\ y^{(\alpha')} &= |\delta|^{3/2} (y_0^{(\alpha')} + y_1^{(\alpha')} |\delta|^{1/2} + O(|\delta|)) \end{aligned} \right\} (\alpha=1, 2) \quad (3.19)$$

其中 $y_0^{(\alpha')}$ 和 $y_1^{(\alpha')}$ 由(3.17), (3.18)确定。

参 考 文 献

- [1] Sather, D., Branching of solutions of an equation in Hilbert space, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **36** (1970), 47—64.
- [2] Temme, N. M. (ed), *Nonlinear Analysis*, Vo. 2, Amsterdam (1976).
- [3] Matkowsky, B. J. and R. L. Reiss, Singular perturbations of bifurcations, *SIAM J. Appl. Math.*, **33**, 2(1977), 230—255.
- [4] Vainberg, M. M. and V. A. Trenogin, *Theory of Branching of Solutions of Non-Linear Equations* (1974).
- [5] Timoshenko, S. P. and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York (1961).

On Singular Perturbation Method of Perturbed Bifurcation Problems

Chu Zheng-you Cheng Chang-jun

(Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract

In this paper, the general mathematical principle is overall explained and a new general technique is presented in order to calculate uniformly asymptotic expansions of solutions of the perturbed bifurcation problem (1.6) in the vicinity of $y=0$, $\lambda=0$, $\delta=0$, by means of singular perturbation method. Simultaneously, Newton's polygon⁽¹⁾ is generalized. Finally, the calculating results of two examples are given.