

# 分层流体中推广的 Boussinesq 方程和 斜相互作用的孤立波

戴世强

(中国科学院力学研究所, 1983年12月27日收到)

## 摘 要

本文按 Boussinesq 浅水理论建立了适用于一种分层流体的基本方程——推广的 Boussinesq 方程, 借此研究了两对斜交的孤立波的弱相互作用, 给出了波形和最大波幅的二阶近似解, 并指出, 当两对孤立波传播方向夹角小于  $120^\circ$  时, 斜相互作用强于迎撞相互作用; 当该角大于  $120^\circ$  时, 前者略弱于后者。

## 一、引 言

孤立波的相互作用一直是一个令人感兴趣的课题(参看文献[1]中的评述), 对于单层流体中的情形已有不少人作了研究, 例如, Miles<sup>[2]</sup>给出了斜相互作用孤立波的二阶近似解, 苏兆星和 Mirie<sup>[3]</sup>对迎撞的两孤立波得到了三阶近似解, 并通过数值模拟作了验证<sup>[4]</sup>, 周清甫<sup>[5]</sup>对垂直相互作用的孤立波导出了三阶近似解。近年来, 在分层的海洋中, 卫星观测发现了相互作用的内孤立波<sup>[6]</sup>, 由于数学上的复杂性, 对这类问题的研究比较少见。作者利用在[7]中对两水平固壁间的两层流体建立的基本方程研究了两个界面孤立波之间的迎撞<sup>[8]</sup>, 接着又从另一组基本方程出发, 处理了有自由面的二流体系统中两对孤立波的迎撞<sup>[9]</sup>, 给出了相互作用时的波形、最大波高和相移。

本文讨论更为普遍的情形: 有自由面的二流体系统中斜相互作用的孤立波。首先, 我们从 Euler 方程出发, 采用浅水波假定, 导出了分层流体中的推广的二维 Boussinesq 方程, 它是单层流体的 Boussinesq 方程<sup>[10]</sup>的推广形式。接着, 利用 PLK 方法<sup>[11]</sup>和约化摄动法<sup>[12]</sup>, 求出了问题的二阶近似解, 给出了弱相互作用下两对斜交的孤立波的波形、最大波高和相移, 并指出, 当两对相互作用孤立波传播方向夹角在  $120^\circ$  和  $180^\circ$  之间时, 斜相互作用效果稍弱于迎撞效果, 而该夹角小于  $120^\circ$  时, 则前者大于后者。文[9]、[2]中的结果可视作本文的特例。

## 二、推广的 Boussinesq 方程的导出

我们讨论两层不可溶混的常密度不可压无粘流体的无旋运动, 考察如图 1 所示的位形。

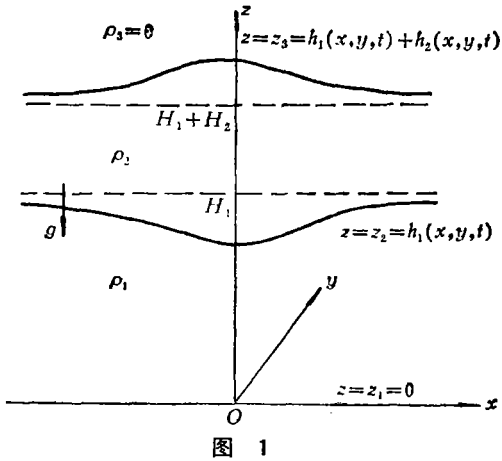


图 1

设上下层流体的密度比为  $\sigma (= \rho_2/\rho_1)$ 、厚度比为  $r (= H_2/H_1)$ ，假定流体是静稳定分层的（即  $\sigma < 1$ ）、无穷远处静止的。

令  $\mathbf{u} = (u, v)$  和  $w$  分别为流体的水平速度和铅垂速度分量， $p$  和  $\rho$  为流体的压力和密度，它们满足如下方程：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \nabla w \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad (2.4)$$

其中， $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$  为水平梯度算子， $g$  为重力加速度，这些方程分别在两层流体中适用，为简略起见，暂时略去了各量的下标。设在界面  $z = z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 邻近的上下方流体的速度分别为  $(\mathbf{U}_i^+, W_i^+)$  和  $(\mathbf{U}_i^-, W_i^-)$ 。考察  $(z_i, z_{i+1})$  层，由 (2.1) 和 (2.2) 式

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_i^+ + \int_{z_i}^{z_{i+1}} \nabla w(x, y, z', t) dz' \quad (2.5)$$

$$w = W_i^+ - \int_{z_i}^{z_{i+1}} \nabla \cdot \mathbf{u}(x, y, z', t) dz' \quad (2.6)$$

令

$$h_i = z_{i+1} - z_i, \quad \bar{f}_i = \frac{1}{h_i} \int_{z_i}^{z_{i+1}} f dz' \quad (2.7)$$

显然， $h_i$  为扰动后的第  $i$  层流体厚度， $\bar{f}_i$  为  $f$  在  $i$  层内沿铅垂方向的平均值，由 (2.6)、(2.7) 式可得

$$W_{i+1}^- = W_i^+ - \nabla \cdot (h_i \bar{\mathbf{u}}_i) + \mathbf{U}_{i+1}^- \cdot \nabla z_{i+1} - \mathbf{U}_i^+ \cdot \nabla z_i \quad (2.8)$$

界面上的运动学条件可以写成

$$W_{i+1}^- = \frac{\partial z_{i+1}}{\partial t} + \mathbf{U}_{i+1}^- \cdot \nabla z_{i+1} \quad (2.9)$$

$$W_i^+ = \frac{\partial z_i}{\partial t} + \mathbf{U}_i^+ \cdot \nabla z_i \quad (2.10)$$

由 (2.8)~(2.10) 式容易求得质量守恒方程

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + \nabla \cdot (h_i \bar{\mathbf{u}}_i) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.11)$$

下面按 Boussinesq 浅水理论推导动量方程的新形式。引进小参数  $\epsilon$  ( $0 < \epsilon \ll 1$ )，假定相对波幅  $A/H_1 = O(\epsilon)$ ，相对波数  $kH_1 = O(\epsilon^{1/2})$ ，要求动量方程准确到  $O(\epsilon^{5/2})$ 。

利用 (2.5)、(2.6) 式进行迭代、展开，得到

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{U}_i^\dagger + \nabla W_i^\dagger (z - z_i) - \frac{1}{2} \nabla^2 \mathbf{U}_i^\dagger (z - z_i)^2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.12)$$

$$w_i = W_i^\dagger - \nabla \cdot \mathbf{U}_i^\dagger (z - z_i) + O(\varepsilon^{5/2}) \quad (2.13)$$

根据(2.12)式

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{U}_i^\dagger + \frac{1}{2} h_i \nabla W_i^\dagger - \frac{1}{6} h_i^2 \nabla^2 \mathbf{U}_i^\dagger + O(\varepsilon^3) \quad (2.14)$$

容易证实, 准确到 $O(\varepsilon^3)$

$$\overline{u_i^2} \doteq \overline{u_i^2}, \quad \overline{v_i^2} \doteq \overline{v_i^2}, \quad \overline{u_i v_i} \doteq \overline{u_i v_i} \quad (2.15)$$

由(2.3)、(2.2)、(2.15)式导得

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_i \hat{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x} (h_i \hat{u}_i^2) + \frac{\partial}{\partial y} (h_i \hat{u}_i \hat{v}_i) + \frac{1}{\rho_i} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\partial p}{\partial x} dz' = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_i \hat{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x} (h_i \hat{u}_i \hat{v}_i) + \frac{\partial}{\partial y} (h_i \hat{v}_i^2) + \frac{1}{\rho_i} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\partial p}{\partial y} dz' = 0 \quad (2.17)$$

利用(2.11)式, 它们也可写成

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_i + \frac{1}{\rho_i} \overline{(\nabla p)_i} = 0 \quad (i=1, 2) \quad (2.18)$$

现在利用方程(2.4)导出(2.18)式的末项的表式, 为此, 先求出各层速度分量的具体形式. 在 $(z_1, z_2)$ 层内, 利用 $z_1=0, W_1^\dagger=0$ , 由(2.12)~(2.14)式得到

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{U}_1^\dagger - \frac{1}{2} \nabla^2 \mathbf{U}_1^\dagger z^2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.19)$$

$$w_1 = -\nabla \cdot \mathbf{U}_1^\dagger z + O(\varepsilon^{5/2}) \quad (2.20)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{U}_1^\dagger - \frac{1}{6} h_1^2 \nabla^2 \mathbf{U}_1^\dagger + O(\varepsilon^3) \quad (2.21)$$

从而有

$$\mathbf{U}_1^\dagger = \hat{\mathbf{u}}_1 + \frac{1}{6} h_1^2 \nabla^2 \hat{\mathbf{u}}_1 + O(\varepsilon^3) \quad (2.22)$$

由(2.9)、(2.10)、(2.20)式可知, 准确到 $O(\varepsilon^{3/2})$

$$W_1^\dagger \doteq W_1^* \doteq -h_1 \nabla \cdot \mathbf{U}_1^\dagger \quad (2.23)$$

因此, 在 $(z_2, z_3)$ 层内有

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{U}_2^\dagger - h_1 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}_1^\dagger) (z - h_1) - \frac{1}{2} \nabla^2 \mathbf{U}_2^\dagger (z - h_1)^2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.24)$$

$$w_2 = -h_1 \nabla \cdot \mathbf{U}_1^\dagger - \nabla \cdot \mathbf{U}_2^\dagger (z - h_1) + O(\varepsilon^{5/2}) \quad (2.25)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{U}_2^\dagger - \frac{1}{2} h_1 h_2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}_1^\dagger) - \frac{1}{6} h_2^2 \nabla^2 \mathbf{U}_2^\dagger + O(\varepsilon^3) \quad (2.26)$$

从而有

$$\mathbf{U}_2^\dagger = \hat{\mathbf{u}}_2 + \frac{1}{2} h_1 h_2 \nabla (\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_1) + \frac{1}{6} h_2^2 \nabla^2 \hat{\mathbf{u}}_2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.27)$$

对方程(2.4)关于 $z$ 积分, 得到

$$\frac{1}{\rho} p(x, y, z, t) = \frac{1}{\rho} p(x, y, z_i, t) - g(z - z_i)$$

$$-\frac{1}{2}[w^2(x, y, z, t) - w^2(x, y, z_i, t)] - \int_{z_i}^z \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w \right) dz' \quad (2.28)$$

取  $i=3$ , 利用自由面上的动力学条件  $p(x, y, z_3, t) = 0$ , 得知对于  $z \in (z_2, z_3)$  有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_2} p(x, y, z, t) = & -g[z - (h_1 + h_2)] + h_1[z - (h_1 + h_2)] \nabla \cdot \mathbf{u}_{1t} \\ & + \frac{1}{2} [(z - h_1)^2 - h_1^2] \nabla \cdot \mathbf{u}_{2t} + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (2.29)$$

求出上式的水平梯度, 并在该层内取平均, 得到

$$\frac{1}{\rho_2} \overline{(\nabla p)_2} = g \nabla (h_1 + h_2) - \frac{1}{2} h_1 h_2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{1t}) - \frac{1}{3} h_1^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{2t}) + O(\varepsilon^{3/2}) \quad (2.30)$$

代入方程(2.18)(取  $i=2$ ), 得到上层流体的动量守恒方程

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \mathbf{u}_2 + g \nabla (h_1 + h_2) - \frac{1}{2} h_1 h_2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{1t}) - \frac{1}{3} h_1^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{2t}) = 0 \quad (2.31)$$

由(2.29)式得到

$$\frac{1}{\rho_1} p(x, y, z_2, t) = \sigma [gh_2 - h_1 h_2 \nabla \cdot \mathbf{u}_{1t} - \frac{1}{2} h_1^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_{2t}] + O(\varepsilon^3) \quad (2.32)$$

(2.28)式中取  $i=2$ , 利用(2.32)式, 可知对  $z \in (z_1, z_2)$

有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} p(x, y, z, t) = & \sigma [gh_2 - h_1 h_2 \nabla \cdot \mathbf{u}_{1t} - \frac{1}{2} h_1^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_{2t}] \\ & - g(z - h_1) + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{u}_{1t} (z^2 - h_1^2) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (2.33)$$

从而得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} \overline{(\nabla p)_1} = & g \nabla (h_1 + \sigma h_2) - \left( \frac{1}{3} h_1^2 + \sigma h_1 h_2 \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{1t}) \\ & - \frac{1}{2} \sigma h_1^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{2t}) + O(\varepsilon^{3/2}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

代入方程(2.18)(取  $i=1$ ), 就导出下层流体的动量守恒方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + g \nabla (h_1 + \sigma h_2) - \left( \frac{1}{3} h_1^2 + \sigma h_1 h_2 \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{1t}) \\ - \frac{1}{2} \sigma h_1^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{2t}) = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

现在, 采用如下的特征量进行无量纲化: 长度  $H_1$ , 速度  $\sqrt{gH_1}$ , 时间  $\sqrt{H_1/g}$ , 保留原来的记号, 只是去掉平均速度记号上的短划, 且令

$$h_1 = 1 + \xi_1, \quad h_2 = r(1 + \xi_2) \quad (2.36)$$

方程组(2.11)、(2.35)、(2.31)化成

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}_1 + \nabla \cdot (\xi_1 \mathbf{u}_1) = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}_2 + \nabla \cdot (\zeta_2 \mathbf{u}_2) = 0 \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \zeta_1 + \sigma r \nabla \zeta_2 - \left( \frac{1}{3} + \sigma r \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{1t}) \\ - \frac{1}{2} \sigma r^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{2t}) = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \mathbf{u}_2 + \nabla \zeta_1 + r \nabla \zeta_2 - \frac{1}{2} r \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{1t}) - \frac{1}{3} r^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{2t}) = 0 \quad (2.40)$$

令方程(2.39)中  $r=0$ , 它与方程(2.37)一起是熟知的单层流体的无量纲化 Boussinesq 方程<sup>[10]</sup>, 所以我们可以把方程组(2.37)~(2.40)称为推广的 Boussinesq 方程. 在线性化近似下, 它们变成

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \nabla \zeta_1 + \sigma r \nabla \zeta_2 = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + \nabla \zeta_1 + r \nabla \zeta_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

对应的特征方程为

$$(c^2 - 1)(c^2 - r) - \sigma r = 0 \quad (2.42)$$

它有解

$$c_{\pm}^2 = \frac{1}{2} [(1+r) \pm \sqrt{(1-r)^2 + 4\sigma r}] \quad (2.43)$$

$c_+$ 和 $c_-$ 为线性重力波波速, 分别对应于快模式(表面模式)和慢模式(内模式).

### 三、斜相互作用孤立波的摄动解

我们以方程(2.37)~(2.40)为出发点, 采用约化摄动法和 PLK 方法来求斜相互作用孤立波的二阶近似解. 为简单起见, 仅考虑两种相同模式的相互作用, 即来碰孤立波的波速主值  $c$  要末同为  $c_+$ , 要末同为  $c_-$ ; 另外, 我们仅考虑两对孤立波之间的弱相互作用, 即假设  $\sin^2(\psi - \psi')/2 \gg \varepsilon$ , 这里  $|\psi - \psi'|$  为两对来碰孤立波传播方向的夹角.

设两对孤立波的初始传播方向分别为

$$\mathbf{n} = (\cos \psi, \sin \psi), \quad \mathbf{n}' = (\cos \psi', \sin \psi')$$

作如下变换

$$\xi = \varepsilon^{1/2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct - \varepsilon R_1 a c t) + \varepsilon \theta_0(\xi') \quad (3.1)$$

$$\xi' = \varepsilon^{1/2} (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{r} - ct - \varepsilon R_1 b c t) + \varepsilon \varphi_0(\xi) \quad (3.2)$$

其中  $\mathbf{r} = (x, y)$ ;  $a, b$  为波幅因子;  $R_1$  为待定常数;  $\theta_0(\xi')$  和  $\varphi_0(\xi)$  为待定的相移函数, 由消除长期项的条件来确定.  $c$  取(2.43)式中的  $c_+$  或  $c_-$ .

引进列向量

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\xi, \xi') = (\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2)^T \quad (3.3)$$

并且展开成

$$\mathbf{Y} = \varepsilon \mathbf{Y}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{Y}^{(2)} + \dots \quad (3.4)$$

下面按照约化摄动法<sup>[12]</sup>的步骤求各阶摄动解.

把(3.1)~(3.4)式代入基本方程(2.37)~(2.40), 先考察 $O(\varepsilon^{3/2})$ 的方程

$$(M-cl)\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial \xi} + (M'-cl)\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial \xi'} = 0 \quad (3.5)$$

其中,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\psi & \sin\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ \cos\psi & \sigma r \cos\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\psi & \sigma r \sin\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\psi & r \cos\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\psi & r \sin\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

而把M中的 $\psi$ 换成 $\psi'$ 即为 $M'$ , I为单位矩阵, 容易验证 $c=c_{\pm}$ 为矩阵M和 $M'$ 的特征值, 相应的右特征向量和左特征向量分别取为

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{c^2-r} \\ c \cos\psi \\ c \sin\psi \\ \frac{c}{c^2-r} \cos\psi \\ \frac{c}{c^2-r} \sin\psi \end{pmatrix}, \quad R' = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{c^2-r} \\ c \cos\psi' \\ c \sin\psi' \\ \frac{c}{c^2-r} \cos\psi' \\ \frac{c}{c^2-r} \sin\psi' \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} L &= \left( 1, c^2-1, \frac{1}{c} \cos\psi, \frac{1}{c} \sin\psi, \frac{1}{c}(c^2-1)\cos\psi, \frac{1}{c}(c^2-1)\sin\psi \right) \\ L' &= \left( 1, c^2-1, \frac{1}{c} \cos\psi', \frac{1}{c} \sin\psi', \frac{1}{c}(c^2-1)\cos\psi', \frac{1}{c}(c^2-1)\sin\psi' \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

这里我们只需求出准简单波解<sup>[12]</sup>, 因而方程(3.5)有解

$$Y^{(1)} = af(\xi)R + bg(\xi')R' \quad (3.9)$$

其中 $f(\xi)$ 和 $g(\xi')$ 为待定函数, 由下一阶近似确定. 一阶界面升高为

$$\varepsilon \xi_1^{(1)} = \varepsilon [af(\xi) + bg(\xi')] \quad (3.10)$$

现在确定二阶近似解. 利用(3.9)式, 由 $O(\varepsilon^{5/2})$ 的方程得到

$$\begin{aligned} (M-cl)\frac{\partial Y^{(2)}}{\partial \xi} + S_1 \frac{df}{d\xi} + S_2 f \frac{d\xi}{d\xi} + S_3 \frac{d^3 f}{d\xi^3} + T \frac{df}{d\xi} \\ + (M'-cl)\frac{\partial Y^{(2)}}{\partial \xi'} + S'_1 \frac{dg}{d\xi'} + S'_2 g \frac{d\xi'}{d\xi'} + S'_3 \frac{d^3 g}{d\xi'^3} + T' \frac{dg}{d\xi'} = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中

$$S_1 = -R_1 c a R$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 2ca^2 \\ \frac{2ca^2}{(c^2-r)^2} \\ c^2a^2\cos\psi \\ c^2a^2\sin\psi \\ \frac{c^2a^2}{(c^2-r)^2}\cos\psi \\ \frac{c^2a^2}{(c^2-r)^2}\sin\psi \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{1}{3} + \sigma r + \frac{1}{2} \frac{\sigma r^2}{c^2-r}\right) c^2 a \cos\psi \\ \left(\frac{1}{3} + \sigma r + \frac{1}{2} \frac{\sigma r^2}{c^2-r}\right) c^2 a \sin\psi \\ \left(\frac{1}{2} r + \frac{1}{3} \frac{r^2}{c^2-r}\right) c^2 a \cos\psi \\ \left(\frac{1}{2} r + \frac{1}{3} \frac{r^2}{c^2-r}\right) c^2 a \sin\psi \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} cab[1+\cos(\psi-\psi')]g - ca\theta_{0\xi'}[1-\cos(\psi-\psi')] \\ \frac{cab}{(c^2-r)^2}[1+\cos(\psi-\psi')]g - \frac{ca}{c^2-r}\theta_{0\xi'}[1-\cos(\psi-\psi')] \\ c^2ab\cos\psi\cos(\psi-\psi')g - c^2a\theta_{0\xi'}(\cos\psi-\cos\psi') \\ c^2ab\sin\psi\cos(\psi-\psi')g - c^2a\theta_{0\xi'}(\sin\psi-\sin\psi') \\ \frac{c^2ab}{(c^2-r)^2}\cos\psi\cos(\psi-\psi')g - \frac{c^2a}{c^2-r}\theta_{0\xi'}(\cos\psi-\cos\psi') \\ \frac{c^2ab}{(c^2-r)^2}\sin\psi\cos(\psi-\psi')g - \frac{c^2a}{c^2-r}\theta_{0\xi'}(\sin\psi-\sin\psi') \end{pmatrix}$$

把 $S_i$  ( $i=1, 2, 3$ )和 $T$ 中的 $a, b, \psi, \psi', \theta_{0\xi'}, g$ 换成 $b, a, \psi', \psi, \varphi_{0\xi}, f$ 就得到相应的 $S'_i$  ( $i=1, 2, 3$ )和 $T'$ 。

令

$$Y^{(2)} = F(\xi, \xi')R + G(\xi, \xi')R' \tag{3.12}$$

代入方程(3.11), 并左乘以 $L$ , 得到 $F(\xi, \xi')$ 应满足的方程

$$L(M' - cI)R \frac{\partial F}{\partial \xi'} + LS_1 \frac{df}{d\xi} + LS_2 f \frac{df}{d\xi} + LS_3 \frac{d^3 f}{d\xi^3} + LT \frac{df}{d\xi} \\ + LS'_1 \frac{dg}{d\xi'} + LS'_2 g \frac{dg}{d\xi'} + LS'_3 \frac{d^3 g}{d\xi'^3} + LT' \frac{dg}{d\xi'} = 0 \tag{3.13}$$

其中

$$L(M' - cI)R = -2ca[1 - \cos(\psi - \psi')] \\ LS_1 = -2R_1 ca^2 a, \quad LS'_1 = -R_1 cb^2 a [1 + \cos(\psi - \psi')] \\ LS_2 = 3ca^2 \beta, \quad LS'_2 = cb^2 \beta [2 + \cos(\psi - \psi')] \\ LS_3 = \frac{1}{3} caV, \quad LS'_3 = \frac{1}{3} cbV \cos(\psi - \psi') \\ LT = ca\{[1 + 2\cos(\psi - \psi')] \beta b g - 2a\theta_{0\xi'} [1 - \cos(\psi - \psi')]\} \\ LT' = cab\beta f [1 + \cos(\psi - \psi') + \cos^2(\psi - \psi')]$$

而

$$\alpha = 1 + \frac{c^2 - 1}{c^2 - r}, \quad \beta = 1 + \frac{c^2 - 1}{(c^2 - r)^2}, \quad V = 1 + r^2 \frac{c^2 - 1}{c^2 - r} + 3c^2(c^2 - 1)$$

对于 $G(\xi, \xi')$ 可得类似的方程。

为避免在 $F$ 中出现长期项, 须令

$$LS_1 \frac{df}{d\xi} + LS_2 f \frac{df}{d\xi} + LS_3 \frac{d^3 f}{d\xi^3} = 0 \quad (3.14)$$

我们这里不讨论 $\beta=0$ 的临界情形, 于是可令

$$R_1 = \frac{\beta}{2\alpha} \quad (3.15)$$

方程(3.14)化为

$$\frac{df}{d\xi} - 3f \frac{df}{d\xi} - \frac{V}{3a\beta} \frac{d^3 f}{d\xi^3} = 0 \quad (3.16)$$

由无穷远处静止的边界条件, 得到KdV孤立波解

$$f = \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3a\beta}{4V}} \xi\right) \quad (3.17)$$

类似地可得

$$g = \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3b\beta}{4V}} \xi'\right) \quad (3.18)$$

根据消除间接长期项的要求<sup>[9]</sup>, 须令

$$LT = 0 \quad (3.19)$$

由此得到

$$\theta_{0\xi'} = \frac{1}{2\alpha} Kb\beta g(\xi') \quad \left(K = \frac{1+2\cos(\psi-\psi')}{1-\cos(\psi-\psi')}\right) \quad (3.20)$$

从而有

$$\theta_0 = \frac{1}{2\alpha} Kb\beta \int_{-\infty}^{\xi'} g(\xi') d\xi' = \frac{1}{\alpha} K \sqrt{\frac{b\beta V}{3}} \left(\tanh \sqrt{\frac{3b\beta}{4V}} \xi' - 1\right) \quad (3.21)$$

类似地可得

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\alpha} Ka\beta \int_{-\infty}^{\xi} f(\xi) d\xi = \frac{1}{\alpha} K \sqrt{\frac{a\beta V}{3}} \left(\tanh \sqrt{\frac{3a\beta}{4V}} \xi - 1\right) \quad (3.22)$$

在条件(3.14)和(3.19)之下, 方程(3.13)有解

$$F = \frac{1}{2} R_1 \{2b^2 g^2 - b^2 g + 2ab I f g\} + a^2 f_2(\xi) \quad (3.23)$$

其中

$$I = \frac{1 + \cos(\psi - \psi') + \cos^2(\psi - \psi')}{1 - \cos(\psi - \psi')} \quad (3.24)$$

而 $f_2(\xi)$ 为待定函数. 类似地有

$$G = \frac{1}{2} R_1 \{2a^2 f^2 - a^2 f + 2ab I f g\} + b^2 g_2(\xi') \quad (3.25)$$

$g_2(\xi')$ 也是待定函数.  $f_2$ 和 $g_2$ 照例应由下一阶近似确定, 为了避免繁复的数学运算(特别是还要求出高一阶近似的基本方程), 考虑到 $f_2(\xi)$ 和 $g_2(\xi')$ 只不过是一维孤立波解的二阶修正的一部分, 可以借用[9]中已得到的结果, 即

$$f_2 = Pf + Qf^2, \quad g_2 = Pg + Qg^2 \quad (3.26)$$

$P$ 和 $Q$ 由[9]中的(3.32)给定. 把(3.26)式代入(3.23)、(3.25)式, 再由(3.12)式, 就得到了二阶解, 显见, 界面升高的二阶项为



$$\zeta_1^{(2)} = (Q + R_1)(a^2 f^2 + b^2 g^2) + \left(P - \frac{1}{2}R_1\right)(a^2 f + b^2 g) + 2R_1 ab I f g \quad (3.27)$$

至此, 我们已求得了二阶摄动解.

#### 四、波形和最大振幅

由(3.10)和(3.27)式容易算得二阶界面升高为

$$\begin{aligned} \zeta_1[f, g] = & eaf + (ea)^2 [(Q + R_1)f^2 + \left(P - \frac{1}{2}R_1\right)f] + ebg \\ & + (eb)^2 \left[(Q + R_1)g^2 + \left(P - \frac{1}{2}R_1\right)g\right] + 2e^2 ab R_1 I f g + O(e^3) \end{aligned} \quad (4.1)$$

自由面升高为

$$\zeta = \zeta_1 + r\zeta_2 = \frac{c^2}{c^2 - r} \zeta_1 \quad (4.2)$$

人们习惯用来碰孤立波的最大波幅  $e_R$  和  $e_L$  来表示各物理量, 显然

$$\left. \begin{aligned} e_R = \zeta_1[1, 0] &= ea + (ea)^2 \left(P + Q + \frac{1}{2}R_1\right) + O(e^3) \\ e_L = \zeta_1[0, 1] &= eb + (eb)^2 \left(P + Q + \frac{1}{2}R_1\right) + O(e^3) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

因而, 在二阶近似下界面升高可表示为

$$\zeta_1 = e_R f + e_L g - e_R^2 (Q + R)(f - f^2) - e_L^2 (Q + R_1)(g - g^2) + 2e_R e_L R_1 I f g \quad (4.4)$$

写成显式

$$\begin{aligned} \zeta_1 = & e_R [1 - (Q + R_1)e_R \tanh^2 X] \operatorname{sech}^2 X \\ & + e_L [1 - (Q + R_1)e_L \tanh^2 X'] \operatorname{sech}^2 X' \\ & + 2e_R e_L R_1 I \operatorname{sech}^2 X \operatorname{sech}^2 X' \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中

$$\begin{aligned} X = & \left(\frac{3\beta e_R}{4V}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{1}{2}\left(P + Q + \frac{1}{2}R_1\right)e_R\right] \left[ n \cdot r - (1 + R_1 e_R) ct \right. \\ & \left. + \frac{1}{\alpha} K \sqrt{\frac{e_L \beta V}{3}} (\tanh X' - 1) \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} X' = & \left(\frac{3\beta e_L}{4V}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{1}{2}\left(P + Q + \frac{1}{2}R_1\right)e_L\right] \left[ n' \cdot r - (1 + R_1 e_L) ct \right. \\ & \left. + \frac{1}{\alpha} K \sqrt{\frac{e_R \beta V}{3}} (\tanh X - 1) \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

现在容易算得界面的最大波幅为

$$A_{\max} = H_1 |\zeta_1[1, 1]| = H_1 |e_R + e_L + 2e_R e_L R_1 I| \quad (4.8)$$

考虑几种特殊情形: 对于迎撞情形  $|\psi - \psi'| = 180^\circ$ ,  $I = \frac{1}{2}$ ,  $K = -\frac{1}{2}$ , 本文结果与[9]中相

同, 对于单层流体情形,  $r = 0$ ,  $R_1 = \frac{1}{2}$ ,  $P = \frac{3}{4}$ ,  $Q = \frac{1}{4}$ , 上述结果与 Miles<sup>[2]</sup>所得的结果相

符, 也与[3]、[5]中的二阶结果一致。

考察上述结果, 发现斜相互作用效果体现在因子  $I$ ,  $K$  中, 而对最大波幅而言, 则由因子  $I$  即可确定, 现把  $I$  的数值列表如下:

表1

$ \psi - \psi' $	180°	165°	150°	137°	120°	105°	90°	75°	60°	45°	30°	15°
$I$	0.5	0.492	0.485	0.464	0.5	0.642	1	1.789	3.5	7.536	19.5	85.0

由此表可见, 当两对来碰孤立波传播方向夹角在120°与180°之间时,  $I$  的值略低于迎撞情形, 因而斜相互作用效果稍弱于迎撞效果, 由于这时偏差至多为7%, 一般可忽略不计; 而该夹角小于120°时,  $I$  值可以有很大变化 (例如垂直相互作用情形的  $I$  值为迎撞情形的2倍), 这时斜相互作用效果可能远大于迎撞效果。

必须指出, 本文的近似仅适用于  $\sin^2(\psi - \psi')/2 \gg \varepsilon$  的情形, 对于相反的强相互作用情形需要另作讨论。

## 参 考 文 献

- [1] Miles, J. W., Solitary waves, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 12(1980), 11—43.
- [2] Miles, J. W., Obliquely interacting solitary waves, *J. Fluid Mech.*, 79(1977), 157—169.
- [3] Su, C. H. and R. M. Mirie, On head-on collision between two solitary waves, *J. Fluid Mech.*, 98(1980), 509—525.
- [4] Mirie, R. M. and C. H. Su, Collisions between two solitary waves. Part 2. A numerical study, *J. Fluid Mech.*, 115(1982), 475—492.
- [5] 周清甫, 孤立波的垂直相互作用, *力学学报*, (1982), 354—362.
- [6] Osborne, A. R. and T. L. Burch, Internal soliton in Andaman Sea, *Science*, 208(1980), 451—460.
- [7] 戴世强, 两层流体界面上的孤立波, *应用数学和力学*, 3, 6(1982), 721—731.
- [8] 戴世强, 两个界面孤立波之间的迎撞, *力学学报*, (1983), 623—632.
- [9] 戴世强, 一个二流体系统中两对孤立波的相互作用, *中国科学*, A辑 (1983), 1007—1017.
- [10] Mei, C. C., *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, Chap. 11, Wiley-Interscience, New York (1983).
- [11] 戴世强, PLK方法, 《奇异摄动理论及其在力学中的应用》, (钱伟长主编), 科学出版社, (1981), 33—86.
- [12] 戴世强, 约化摄动法和非线性波远场分析, *力学进展*, 12(1982), 2—23.

## The Generalized Boussinesq Equations and Obliquely Interacting Solitary Waves in a Stratified Fluid

Dai Shi-qiang

*(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)*

### Abstract

In this paper, on the basis of Boussinesq's shallow water theory, we establish the basic equations governing the motion of a stratified fluid, a kind of the generalized Boussinesq equations. And then by way of them, we study the weak interaction of two pairs of obliquely colliding solitary waves, give the second-order approximate solutions for wave profiles and maximum amplitudes, as well as conclude that when the angle between the directions of propagation of impinging solitary waves is less than  $120^\circ$ , the effect of oblique interaction is stronger than that of head-on one, but when the angle is greater than  $120^\circ$ , the former is slightly weaker than the latter.