应用数学和力学，第5卷第5期（1984年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

考虑横向剪切变形时圆截面悬臂梁的广义变分原理*

李家仁　　张慎学

（吉林大学，1983年3月14日收到）

摘　要

本文通过二类变量广义变分原理导出了考虑横向剪切变形时圆截面等直悬臂梁的近似理论，给出了对应于该理论的具有两个广义位移的二类变量广义余能的算式．

考虑一个均匀的各向同性的圆截面等直梁在其一个主平面——$(x,\ z)$ 平面内的弯曲问题．设x轴是梁横截面的中心线；它的矩形对称水平的纵截面是平面弯曲问题的中性层；B_1和B_2是中性层上边和下边梁的侧表面；$D(x)$是 x 处半径为r的圆形横截面；$B_3=D(0)$，$B_4=D(l)$（l 为梁的长度）分别为梁的左端面和右端面．于是梁的表面方程及其外法线方向单位矢量$\vec{n}=(n_x,n_y,n_z)$可分别表示如下（见图示）：

$$B_1:\ z=-\sqrt{r^2-y^2},\ 0\leqslant x\leqslant l,\ -r\leqslant y\leqslant r,\ \vec{n}=\left(0,\ \frac{y}{r},\ \frac{z}{r}\right)$$

$$B_2:\ z=\sqrt{r^2-y^2},\ 0\leqslant x\leqslant l,\ -r\leqslant y\leqslant r,\ \vec{n}=\left(0,\ \frac{y}{r},\ \frac{z}{r}\right)$$

$$B_3:\ x=0,\ -r\leqslant y\leqslant r,\ -r\leqslant z\leqslant r,\ \vec{n}=(-1,0,0)$$

$$B_4:\ x=l,\ -r\leqslant y\leqslant r,\ -r\leqslant z\leqslant r,\ \vec{n}=(1,0,0)$$

关于梁的变形作如下假设：变形前垂直中心线的截面，变形后仍保持为平面，但不再假设它一定垂直变形后梁的中心线．本理论有两个广义位移，一个是中心线的挠度$w(x)$（以与z轴同向者为正），另一个是横截面的转角$\varphi(x)$（以从x轴经90°到z轴的转向为正）．

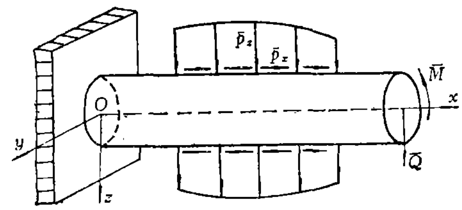

图　1

为把梁的理论纳入到弹性力学空间问题中近似求解，对梁中位移和应力作如下假设：

$$u=-z\varphi(x),\ v=0,\ w=w(x) \tag{1}$$

* 钱伟长推荐．

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x=\frac{zM(x)}{J},\quad \sigma_y=\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{xy}{}^{1)}=0\\&\tau_{xz}=\frac{S(z)Q(x)}{b(z)J}+\frac{\bar{m}(x)}{2J}\left(\frac{r^2-y^2}{3}-z\right)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中$M(x)$为$D(x)$内的弯矩，并以使$z>0$一边产生正的σ_x值时规定为正；$Q(x)$为$D(x)$内的剪力，并以使$D(x)$中产生正的τ_{xz}值时规定为正；

$$J=\frac{1}{4}\pi r^4\tag{3}$$

为$D(x)$对中性轴的惯性矩；

$$b(z)=2\sqrt{r^2-z^2}\tag{4}$$

是$D(x)$中点(y,z)处平行于y轴的弦长；

$$S(z)=\frac{2}{3}(r^2-z^2)^{3/2}\tag{5}$$

是$D(x)$中点(y,z)处平行于y轴的弦以外的面积对y轴的面积矩；

$$\bar{m}(x)=-\int_{\partial D(x)}z\bar{p}_x dS\qquad(\partial D(x)\text{为}D(x)\text{的边界})\tag{6}$$

是梁的单位长度上作用的与x方向平行的面力分量对y轴的力矩（正向与$\varphi(x)$相同），它是已知的对应于$\varphi(x)$的广义载荷．

梁的边界条件可写成

$$B_1,\ B_2:\quad p_x=\bar{p}_x,\ \ p_y=0,\ \ p_z=\bar{p}_z\tag{7a}$$

$$B_3:\quad u=\bar{u}=-z\bar{\varphi},\ \ v=0,\ \ w=\bar{w}\tag{7b}$$

$$B_4:\quad \sigma_x=\bar{\sigma}_x,\ \ \tau_{xy}=0,\ \ \tau_{xz}=\bar{\tau}_{xz}\tag{7c}$$

要求外载荷合力作用线在(x,z)平面内以保证梁只产生平面弯曲；$\bar{p}_x$关于(x,y)平面反对称分布在B_1和B_2上[2)]；(7c)中$\bar{\sigma}_x$和$\bar{\tau}_{xz}$在B_4上分别静力等效于$\bar{M}$和$\bar{Q}$；从而(7c)可表为

$$M=\iint_{B_4}\bar{\sigma}_x z\,dy\,dz=\bar{M},\quad Q=\iint_{B_4}\bar{\tau}_{xz}dy\,dz=\bar{Q}\tag{7c$'$}$$

$$\bar{q}(x)=\oint_{\partial D(x)}\bar{p}_z ds\tag{7a$'$}$$

是作用在梁的单位轴线上的已知横向载荷．

二类变量广义变分原理的广义余能的算式（见文献[1]中385页(9.6)）是

$$\Gamma_2=\iiint_\Omega\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\sigma}+[\mathbf{E}(\nabla)\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{f}]^T\mathbf{u}\right\}d\Omega$$

$$-\iint_{B_3}\mathbf{p}^T\bar{\mathbf{u}}dB-\iint_{B_1+B_2+B_4}(\mathbf{p}^T-\bar{\mathbf{p}}^T)\mathbf{u}dB\tag{8}$$

---

1) 在[3]的假设下也可设$\tau_{xy}=[S(z)Q_1(x)/b(z)J][-yz/(r^2-z^2)]$，但(19)及其变分后给出的方程不变($Q_1$就是$Q$．只是变分时视$Q_1$，$Q$和$M$互相独立)．下面$M$，$S\cdots$表示$M(x)$，$S(z)$，$\cdots$．

2) 从而$\oint_{\partial D(x)}y\bar{p}_x dx=0$，故$\bar{p}_x$对$\tau_{xy}$的影响可不计．

式中

$$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{yz},\tau_{xz},\tau_{xy})^T \tag{9}$$

$\boldsymbol{\alpha}$是对称矩阵，且有

$$\boldsymbol{\alpha\sigma}=\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\ \varepsilon_{yz},\varepsilon_{xz},\varepsilon_{xy})^T \tag{10}$$

ε_x 等为应变分量；

$$\mathsf{E}(\nabla)=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\mathbf{p}=(p_x,p_y,p_z)^T,\quad \mathbf{u}=(u,v,w)^T,\quad \mathbf{f}=(f_x,f_y,f_z)^T$$

f_x,f_y,f_z为体力分量.

在这个变分原理中$\boldsymbol{\sigma}$和$\mathbf{u}$中的分量为独立的自变函数，而$\mathbf{p}$由下式规定：

$$\left.\begin{aligned} p_x&=n_x\sigma_x+n_y\tau_{xy}+n_z\tau_{xz}\\ p_y&=n_x\tau_{xy}+n_y\sigma_y+n_z\tau_{yz}\\ p_z&=n_x\tau_{xz}+n_y\tau_{yz}+n_z\sigma_z \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

变分式

$$\delta\Gamma_2=0 \tag{13}$$

相当于弹性力学的全部方程和边界条件.

式(12)应用于本文应有

$$\left.\begin{aligned} &B_1,B_2: && p_x=\frac{y}{r}\tau_{xz},\quad p_y=p_z=0\\ &B_3: && p_x=-\sigma_x,\quad p_y=0,\quad p_z=-\tau_{xz}\\ &B_4: && p_x=\sigma_x,\quad p_y=0,\quad p_z=\tau_{xz} \end{aligned}\right\} \tag{12$'$}$$

显然上式在B_1和B_2上是不全满足给定的边界条件(7a)的；然而我们将看到变分式(13)能使我们所设的位移分量和应力分量满足具有两个广义位移的梁的理论的基本方程（见文献[1]中139页）和左端（广义）固支、右端自由的边界条件(7b)和(7c)$'$.

将(1)，(2)和(7)恒为零的分量代入(8)式给出（不计体力f_x,f_y,f_z）

$$\Gamma_2=\iiint_\Omega\left\{\frac{\sigma_x^2}{2E}+\frac{\tau_{xz}^2}{2G}+\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)u+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}w\right)d\Omega-\iint_{B_3}\{(p_x\bar{u}+p_z\bar{w})dydz$$

$$-\iiint_{B_1+B_2+B_4}\{(p_x-\bar{p}_x)u+(p_z-\bar{p}_z)w\}dB^{1)} \tag{14}$$

将上式体积分记为I，两个面积分分别记为I_1，I_2. 为化简(14)式右端经繁琐的数学推演首先给出

$$\iint_{D(x)}\sigma_x^2dy\,dz=\frac{1}{J}M^2,\quad \iint_{D(x)}z\sigma_xdydz=M$$

1) E和G分别为杨氏模量和剪切模量.

$$\iint_{D(x)} \tau_{xz}^2 dydz = \frac{5r^2Q}{18J} + \frac{r^2\overline{m}^2}{18J} + \frac{2r^2Q\overline{m}}{27J}$$

$$\iint_{D(x)} z\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dydz = \frac{dM}{dx}, \quad \iint_{D(x)} z\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dydz = -\frac{2}{3}Q + \overline{m}$$

$$\iint_{D(x)} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dydz = \frac{dQ}{dx}, \quad \iint_{D(x)} \tau_{xz}\, dydz = Q, \quad \oint_{\partial D(x)} z\, p_x\, ds = \frac{Q}{3} - \overline{m}$$

以上各式的结果只用到了本文对σ_x，τ_{xz}的定义和(3)、(4)、(5)、(12)′的第一个式子以及

$$\iint_{D(x)} z^4 dydz = \frac{\pi}{8}r^6, \quad \iint_{D(x)} y^2z^2 dydz = \frac{\pi}{24}r^6$$

$$\iint_{D(x)} (r^2-z^2)^2 dydz = \frac{5}{8}\pi r^6, \quad \iint_{D(x)} (r^2-z^2)(r^2-y^2) dydz = \frac{13}{24}\pi r^6$$

等积分值．

利用以上算得的结果和(6)～(7a)′有

$$I = \int_0^l \left\{ V + \left[\frac{2}{3}Q + \overline{m} - \frac{dM}{dx}\right]\varphi + \frac{dQ}{dx}w \right\} dx \tag{15}$$

其中

$$V = \frac{M^2}{2EJ} + \frac{r^2}{18GJ}\left[\frac{5}{2}Q^2 + \frac{1}{2}\overline{m}^2 + \frac{2}{3}Q\overline{m}\right] \tag{16}$$

是余应变能密度．

$$I_1 = \iint_{B_3} (p_x\bar{u} + p_z\bar{w}) dydz = (M\bar{\varphi} - Q\bar{w})|_{x=0} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{B_1+B_2} [(p_x - \bar{p}_x)u + (p_z - \bar{p}_z)w] dB \\ &\quad + \iint_{B_4} [(p_x - \bar{p}_x)u + (p_z - \bar{p}_z)w] dydz \\ &= -\int_0^l \left[\oint_{\partial D(x)} (p_x - \bar{p}_z)\, z\varphi ds + \oint_{\partial D(x)} \bar{p}_z w ds\right] dx \\ &\quad + \iint_{B_4} [(\bar{\sigma}_x - \sigma_x) z\varphi + (\tau_{xz} - \bar{\tau}_{xz}) w] dydz \\ &= -\int_0^l \left[\left(\frac{Q}{3} - \overline{m} + \overline{m}\right)\varphi + \bar{q}w\right] dx \\ &\quad + [(\overline{M} - M)\varphi + (Q - \overline{Q})w]|_{x=l} \end{aligned} \tag{18}$$

从而

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= I - I_1 - I_2 \\ &= \int_0^l \left[V + \left(Q + \overline{m} - \frac{dM}{dx}\right)\varphi + \left(\frac{dQ}{dx} + \bar{q}\right)w \right] dx \\ &\quad + (Q\bar{w} - M\bar{\varphi})|_{x=0} + [(M - \overline{M})\varphi + (\overline{Q} - Q)]|_{x=l} \end{aligned} \tag{19}$$

将上式变分（经分部积分后）给出

$$\delta\Gamma_2=\int_0^l\left(\frac{M}{EJ}+\frac{d\varphi}{dx}\right)\delta M+\left(\frac{1}{C_1}Q+\frac{2}{15C_1}\bar{m}+\varphi-\frac{dw}{dx}\right)\delta Q$$

$$+\left(Q+\bar{m}-\frac{dM}{dx}\right)\delta\varphi+\left(\frac{dQ}{dx}+\bar{q}\right)\delta w+[(\bar{w}-w)\delta Q+(\varphi-\bar{\varphi})\delta M]|_{x=0}$$

$$+[(M-\bar{M})\delta\varphi+(\bar{Q}-Q)\delta w]|_{x=l} \tag{20}$$

式中

$$C_1=\frac{9}{10}GA \tag{21}$$

A为$D(x)$的面积。

从而$\delta\Gamma_2=0$给出基本方程

$$M=-EJ\frac{d\varphi}{dx} \tag{22}$$

$$Q=\left(\frac{dw}{dx}-\varphi\right)C_1-\frac{2}{15}\bar{m} \tag{23}$$

$$\frac{dM}{dx}=Q+\bar{m} \tag{24}$$

$$\frac{dQ}{dx}=-\bar{q} \tag{25}$$

和在B_3处（广义）固支：

$$w=\bar{w},\quad \varphi=\bar{\varphi}; \tag{26}$$

在B_4处自由：

$$M=\bar{M},\quad Q=\bar{Q} \tag{27}$$

等所需要的边界条件。

(24)和(25)与文献[1]中142页的(1.7)完全一致；(22)和(23)则相当于文献[1] 中 141 页的(1.5)，且(23)式比那里的(1.5)式更为严格，它把 $\bar{m}$ 的作用也反映进去了。这一项只要和板的相应理论（见文献[1]中 406 页(13.16b)）对照一下就知道是应该在 (23) 中反映出来的，从文献[1]中146页的(2.5)式也可以看出这一点，此外我们已从弹性理论出发证得了这一事实：即在文献[2]中337页求剪切系数K所需要的公式(25)中，如果考虑到 $\bar{p}_x$ 的影响必需再加一项$(\bar{m}+\bar{Q})^{-1}\cdot 2(1+\nu)J\bar{p}_x$（$\nu$ 是泊松比）[1]。(21)中C_1相当于文献[1]中141 页(1.5)式的C[2]，用[1]中145页给出的公式取$\nu=0.33$，则对圆截面而言算得 $C=0.89GA$，与C_1只差百分之一。

以上我们利用二类变量广义余能原理，从空间弹性理论导出了考虑横向剪切变形的在左端为(广义)固支、在右端为自由的圆形截面梁的近似理论，进而给出了与该理论相对应的具有两个广义位移的二类变量广义余能的算式(19)。并指出(19)可对应 τ_{xy} 的两种分布形式[3]。

---

1) 文章另送审.

2) 如果在(21)中略去$\bar{m}$.

3) 这两种形式对应同一τ_{max}值.

参 考 文 献

[1] 胡海昌，《弹性力学的变分原理及其应用》，科学出版社(1981).

[2] Cowper, G. R., The shear coefficients in Timoshenko's beam theory, *Journal of Applied Mechanics*, 33(1966), 335.

[3] [美]S. 铁摩辛柯, J·盖尔, 《材料力学》，科学出版社 (1978), 168.

The General Variational Principle on the Cantilever Beam of Circular Cross Section Including Transverse Shear Deformation

Li Jia-ren　　Zhang Shen-xue

(Jilin University, Jilin)

Abstract

In this paper we derive the approximate theory on the straight cantilever beam of a same circular cross-section including transverse shear deformation, using the general variational principle with two class variaties, and present the expression with two class variaties containing two general displacements, of general complementary energy, corresponding to the theory.