

浅水环流问题的有限元分析*

吕玉麟 赖国璋

(大连工学院工程力学研究所, 1982年12月27日收到)

摘要

考虑涡流粘性, 底部摩擦, Coriolis力和重力作用, 以单层模型的竖直向积分建立二维流动的环流控制方程. 用 Galerkin 加权余量法建立环流边值问题的弱形式. 用有限元法和分裂时间法分别离散空间和时间进行数值近似计算. 采用线性内插的“人工光滑”处理以消除短波长噪音干扰, 而避免已有的大阻尼系数方法等缺陷. 为节省计算内存容量, 程序中建立稀疏矩阵的一维紧凑存储格式, 排除了全部“零”元素的容量要求.

一、基本方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + b_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad (1.2)$$

(i, j=1, 2, 3.)

考虑单层流场模型, 即流速 u_i 在 x_3 方向分布均匀, 将连续性方程和运动方程沿 x_3 方向积分, 并利用莱布尼兹(Leibnitz)公式

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{a_1}^{a_2} f dx_3 = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_3 + f \Big|_{a_2} \frac{\partial a_2}{\partial x_i} - f \Big|_{a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_i} \quad (1.3)$$

和波表面与底面的运动学条件

$$u_3|_s = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad (1.4)$$

$$u_3|_{-h} = u_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad (1.5)$$

并定义下列变量

$$\text{海水有效深度} \quad H = \eta + h \quad (1.6)$$

$$\text{流量率} \quad q_i = \int_{-h}^{\eta} u_i dx_3 \quad (1.7)$$

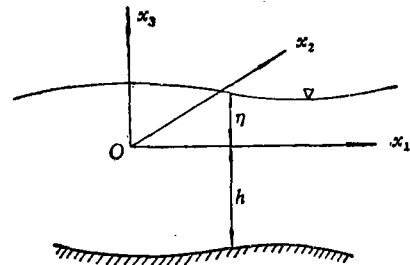


图 1

* 钱伟长推荐.

$$\text{表面法向力 } F'_{ii} = \frac{1}{\rho} \int_{-h}^{\eta} \tau_{ii} dx_3 \quad (1.8a)$$

$$\text{表面切向力 } F'_{ij} = \frac{1}{\rho} \int_{-h}^{\eta} \tau_{ij} dx_3 \quad (1.8b)$$

$$\text{表面压力 } F_p = \frac{1}{\rho} \int_{-h}^{\eta} p dx_3 \quad (1.9)$$

可以建立环流问题的二维基本方程

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho g_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} u_i u_j dx_3 - f e_{ij} q_j + \frac{\partial}{\partial x_i} (F_p - F'_{ii}) \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} F'_{ij} - \frac{\tau_i^a - \tau_i^b}{\rho} - \frac{p^a}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \frac{p^b}{\rho} \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

(i=1, 2; j=1, 2)

其中 变量的上标“s”表示波表面, 变量的上标“b”表示底面, $f=2\omega \sin\phi$ 为Coriolis系数,

ω 为地球自转角速度, ϕ 为纬度, e_{ij} 张量形式如下 $e_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, F'_{ii} 包括粘性力

和湍流雷诺应力的贡献.

流速 u_i 可分解成

$$u_i = \bar{u}_i(x_1, x_2, t) + u'_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.12)$$

其中 \bar{u}_i 为垂直方向的平均流速, u'_i 为垂直方向的速度偏差,

根据定义, 则有

$$\int_{-h}^{\eta} u'_i dx_3 = 0, \quad q_i = H \bar{u}_i \quad (1.13)$$

代入(1.10), (1.11)可以整理为下列基本方程式

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i q_j) - f e_{ij} q_j + \frac{\partial}{\partial x_i} (F_p - F_u) \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} F'_{ij} - \frac{\tau_i^a - \tau_i^b}{\rho} - \frac{p^a}{\rho} \frac{\partial H}{\partial x_i} - gH \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

这里

$$\rho F'_{ij} = \int_{-h}^{\eta} (\tau_{ij} - \rho u'_i u'_j) dx_3 \quad (1.16)$$

类似二维粘性层流流动的本构关系, 设

$$F'_{ij} = \varepsilon_{ij} \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.17)$$

考虑流场是均匀各向同性的

$$\varepsilon_{11} = 2\varepsilon, \quad \varepsilon_{1j} = \varepsilon \tag{1.18}$$

涡流粘性系数 ε ，不再是只与流体的物理属性有关，还与流态直接相关，在数值计算中， ε 系数有着“人工粘性”系数的作用。

底面摩擦力由下列公式计算

$$\tau_i^b = C_F \rho (q_1^2 + q_2^2)^{1/2} q_i / H^2$$

波表面切力 τ_i^s 严格计算应从大气环流问题中求解，近似可以用经验公式 $\tau^s = C_0 \rho_0 U^2$ 算出，式中 ρ_0 为大气密度， U 为气流速度，当只考虑海洋潮汐作用作为环流形成的外力时，可令 τ_i^s 为零

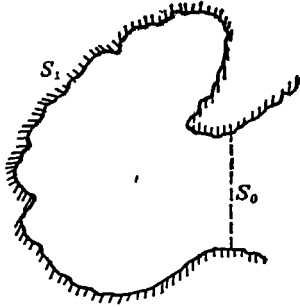


图 2

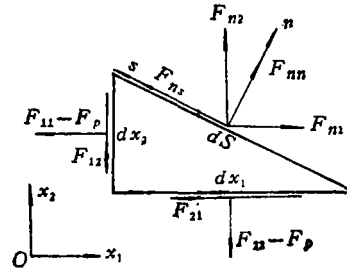


图 3

边界条件:

在边界(S_0, S_1)上

$$\begin{bmatrix} q_n \\ q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} \\ -a_{n2} & a_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

$$\begin{bmatrix} F_{n1} \\ F_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} - F_p & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} - F_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

$$\begin{bmatrix} F_{nn} \\ F_{ns} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} \\ -a_{n2} & a_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n1} \\ F_{n2} \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

$$a_{n1} = \cos(n, x_1)$$

给定的边界条件为

在陆地边界 S_1 上 $q_n = q_s = 0$ (1.22)

不计粘性时

$$q_n = 0$$

在 S_1 上的河流入海口

$$q_n = q^* \tag{1.23}$$

在开边界 (海洋边界) S_0 上

$$F_{nn} = F_{nn}^*, \quad F_{ns} = F_{ns}^* \tag{1.24}$$

二、有限元分析

前面建立的环流问题的基本方程，没有对应的泛函表达式。这里应用 Galerkin 加权余量法，分别取 $\Delta H, \Delta q$ 为加权函数，将基本方程对全域进行积分

$$\iint_A \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial t} \right\} \Delta H dA = 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \iint_A \left\{ \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (F_r - F_{11}) - \frac{\partial}{\partial x_2} F_{21} - B_1 \right\} \Delta q_1 dA \\ + \int_{S_0} \{ a_{n1}(F_{11} - F_r) + a_{n2}F_{21} - F_{n1}^* \} \Delta q_1 ds \\ + \int_{S_1} \{ a_{n1}q_n - a_{n2}q_s - q_1^* \} \Delta q_1 ds = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \iint_A \left\{ \frac{\partial q_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1} F_{12} + \frac{\partial}{\partial x_2} (F_r - F_{22}) - B_2 \right\} \Delta q_2 dA \\ + \int_{S_0} \{ a_{n1}F_{12} + a_{n2}(F_{22} - F_r) - F_{n2}^* \} \Delta q_2 ds \\ + \int_{S_1} \{ a_{n2}q_n + a_{n1}q_s - q_2^* \} \Delta q_2 ds = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

引用分部积分与格林(Green)公式

$$\iint_A \frac{\partial}{\partial x_1} (F_r - F_{11}) \Delta q_1 dA = \oint_{S_1+S_0} a_{n1}(F_r - F_{11}) \Delta q_1 ds - \iint_A (F_r - F_{11}) \frac{\partial \Delta q_1}{\partial x_1} ds$$

$$\iint_A \frac{\partial}{\partial x_2} F_{21} \Delta q_1 dA = \oint_{S_1+S_0} a_{n2}F_{21} \Delta q_1 ds - \iint_A F_{21} \frac{\partial \Delta q_1}{\partial x_2} dA$$

.....

注意到边界 S_1 上, $\Delta q = 0$

这样将得到原型边值问题的弱变分形式

$$\iint_A \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right\} \Delta H dA = 0 \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \iint_A \left\{ \left(\frac{\partial q_1}{\partial t} - B_1 \right) \Delta q_1 - (F_r - F_{11}) \frac{\partial \Delta q_1}{\partial x_1} + F_{21} \frac{\partial \Delta q_1}{\partial x_2} \right\} dA \\ - \int_{S_0} F_{n1}^* \Delta q_1 ds = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \iint_A \left\{ \left(\frac{\partial q_2}{\partial t} - B_2 \right) \Delta q_2 + F_{12} \frac{\partial \Delta q_2}{\partial x_1} - (F_r - F_{22}) \frac{\partial \Delta q_2}{\partial x_2} \right\} dA \\ - \int_{S_0} F_{n2}^* \Delta q_2 ds = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中

$$B_1 = \frac{1}{\rho} (\tau_1^i - \tau_1^b) + f q_2 - \frac{\partial}{\partial x_1} (\bar{u}_1 q_1) - \frac{\partial}{\partial x_2} (\bar{u}_1 q_2) + \frac{p^e}{\rho} \frac{\partial H}{\partial x_1} + gH \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad (2.7)$$

$$B_2 = \frac{1}{\rho} (\tau_2^i - \tau_2^b) - f q_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} (\bar{u}_2 q_1) - \frac{\partial}{\partial x_2} (\bar{u}_2 q_2) + \frac{p^e}{\rho} \frac{\partial H}{\partial x_2} + gH \frac{\partial h}{\partial x_2} \quad (2.8)$$

方程式中 Δq_i , H , $q_i \in W_2^{(1)}$, 即要求函数以及它的一阶导数平方可积, $\Delta H \in L_2$, 即

只要求函数本身平方可积。以这一组方程式作为有限元分析的出发方程。采用三节点三角形单元，对空间进行离散，令

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & 0 \\ 0 & \Phi & 0 \\ 0 & 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \\ H'_i \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

对角线元素 Φ 是线性插值函数

$$\Phi = \{\xi_i \ \xi_j \ \xi_m\} \quad (2.10)$$

$$\xi_i = \frac{1}{2A}(A_i + b_i x_1 + a_i x_2) \quad (2.11)$$

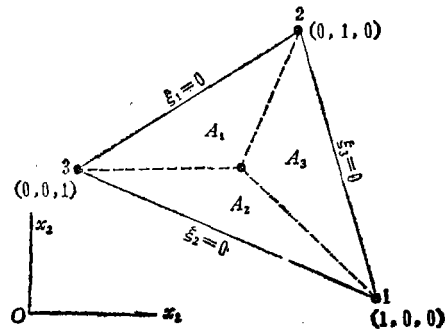


图 4

$$a_i = x_{1m} - x_{1j} \quad (2.12)$$

$$b_i = x_{2j} - x_{2m} \quad (2.13)$$

$$A_i = x_{1j}x_{2m} - x_{1m}x_{2j} \quad (2.14)$$

i, j, m 依次循环取 1, 2, 3.

$$A = \frac{1}{2}(b_1 a_2 - b_2 a_1) \quad (2.15)$$

Q'_i, H'_i 分别为节点流量率及水深

$$Q'_i = \{Q_{1i}, Q_{2i}, Q_{3i}\}^T \quad (2.16a)$$

$$H'_i = \{H_1, H_2, H_3\}^T \quad (2.16b)$$

式中下标 1, 2, 3 为单元内节点局部编号。

自由表面与底部摩擦力

$$\frac{1}{\rho} \tau_i = \Phi T_i \quad (2.17)$$

$$T_i = \{T_{1i}, T_{2i}, T_{3i}\}^T \quad (2.18)$$

在对流项中设

$$C_{ij} = \frac{q_i q_j}{H} \quad (2.19)$$

代入变分式(2.4)~(2.6)，即可建立对单元写的矩阵方程式

$$M'_1 \frac{d}{dt} H'_i + V'_1 Q'_i + V'_2 Q'_i = 0 \quad (2.20)$$

$$M'_2 \frac{d}{dt} Q'_i - (N' + D') H'_i = M'_2 (T'^a - T'^b) - (E' + M'_3) Q'_i - F' C' \quad (2.21)$$

其中

$$M'_1 = \iint \Phi^T \Phi dA \quad (3.22)$$

$$V'_1 = \iint \Phi^T \Phi \Phi_{,1} dA \quad (2.23)$$

$$V'_2 = \iint \Phi^T \Phi \Phi_{,2} dA \quad (2.24)$$

$$M'_2 = \iint (\Phi_1^T \Phi_1 + \Phi_2^T \Phi_2) dA \quad (2.25)$$

$$\Phi_1 = \{\xi_i \ 0 \ \xi_j \ 0 \ \xi_m \ 0\} \quad (2.25a)$$

$$\Phi_2 = \{0 \ \xi_i \ 0 \ \xi_j \ 0 \ \xi_m\} \quad (2.25b)$$

$$Q' = \{q_{11} \ q_{12} \ q_{21} \ q_{22} \ q_{31} \ q_{32}\}^T \quad (2.26)$$

$$N' = \iint g(\Phi_1^T \Phi_1 H_1 \Phi_1 + \Phi_2^T \Phi_2 H_2 \Phi_2) dA \quad (2.27)$$

$$H_1 = \{H_1 \ 0 \ H_2 \ 0 \ H_3 \ 0\} \quad (2.27a)$$

$$H_2 = \{0 \ H_1 \ 0 \ H_2 \ 0 \ H_3\} \quad (2.27b)$$

$$D' = \iint g(\Phi_1^T \Phi_1 h_1 \Phi_1 + \Phi_2^T \Phi_2 h_2 \Phi_2) dA \quad (2.28)$$

$$h_1 = \{h_1 \ 0 \ h_2 \ 0 \ h_3 \ 0\} \quad (2.28a)$$

$$h_2 = \{0 \ h_1 \ 0 \ h_2 \ 0 \ h_3\} \quad (2.28b)$$

$$E' = \iint e(2\Phi_1^T \Phi_1 \Phi_1 + \Phi_2^T \Phi_2 \Phi_2) dA + \iint e(\Phi_1^T \Phi_2 \Phi_2 + \Phi_2^T \Phi_1 \Phi_1) dA \\ + \iint e(2\Phi_2^T \Phi_2 \Phi_2 + \Phi_1^T \Phi_1 \Phi_1) dA \quad (2.29)$$

$$M_3' = \iint f(\Phi_1^T \Phi_1 - \Phi_2^T \Phi_2) dA \quad (2.30)$$

$$F' = \iint \Phi_1^T (\Phi_3 + \Phi_4) dA + \iint \Phi_2^T (\Phi_4 + \Phi_5) dA \quad (2.31)$$

$$\Phi_3 = \{\xi_i \ 0 \ 0 \ \xi_j \ 0 \ 0 \ \xi_m \ 0 \ 0\} \quad (2.31a)$$

$$\Phi_4 = \{0 \ \xi_i \ 0 \ 0 \ \xi_j \ 0 \ 0 \ \xi_m \ 0\} \quad (2.31b)$$

$$\Phi_5 = \{0 \ 0 \ \xi_i \ 0 \ 0 \ \xi_j \ 0 \ 0 \ \xi_m\} \quad (2.31c)$$

$$C' = \{C_{111} \ C_{112} \ C_{122} \ C_{211} \ C_{212} \ C_{222} \ C_{311} \ C_{312} \ C_{322}\}^T \quad (2.32)$$

其中元素 C_{kij} 的第一个下标“ k ”表示单元节点号，第二、三个下标“ i ”，“ j ”表示坐标 x_i , x_j 的下标。

将单元的矩阵方程(3.20), (3.21)按全部单元累加起来, 建立起全域的整体矩阵方程式

$$M_1 \dot{H}_0 = -V_1 Q_1 - V_2 Q_2 \quad (2.33)$$

$$M_2 \dot{Q} = (N+D)H_0 + M_2(T^a - T^b) - (E+M_3)Q - FC + \int_{S_0} F_n^* \Delta q ds \quad (2.34)$$

最后一项为开边界上压力的贡献。积分时沿开边界逆时针方向进行, 与开边界相连的单元其节点 i 恒在流域之内, 节点 j, m 置于边界上。

(2.33)、(2.34)式可简写成

$$M_1 \dot{H}_0 = B_1 \quad (2.35)$$

$$M_2 \dot{Q} = B_2 \quad (2.36)$$

其中 $Q = \{q_{11} \ q_{12} \ q_{21} \ q_{22} \ \dots \ q_{k1} \ q_{k2} \ \dots \ q_{N1} \ q_{N2}\}^T$
($k=1, 2, \dots, N$)

下标“ k ”表示整体坐标系中节点的编号, N 为全域节点总数。

在边界上, 节点的 q_k 按法向分量 q_{kn} 和切向分量 q_{ks} 分解, 它与直角坐标分量的关系为

$$\begin{bmatrix} q_{kn} \\ q_{ks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \\ -\alpha_{s1} & \alpha_{s2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{k1} \\ q_{k2} \end{bmatrix}$$

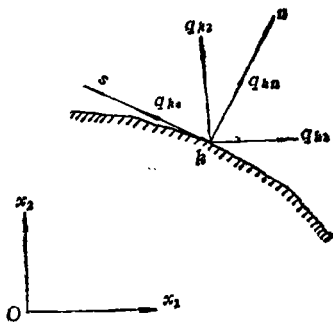


图 5

$$M_1 \dot{H}^{(0)} = B_1(t_0, Q^{(0)}) \quad (3.1)$$

式中, $\dot{H}^{(0)}$ 的上标表示 t_0 时间; $B_1(t_0, Q^{(0)})$ 表示 t_0 时间以 $Q^{(0)}$ 值形成的 B_1 .

由下列关系式计算 $H^{(\frac{1}{2})}$

$$H^{(\frac{1}{2})} = H^{(0)} + \frac{1}{2} \Delta t \dot{H}^{(0)} \quad (3.2)$$

将 $H^{(\frac{1}{2})}$, $Q^{(0)}$ 代进方程(2.37)式

$$RM_2 R^T \dot{Q}^{(1/2)} = RB_2(t_n, H^{(\frac{1}{2}), Q^{(0)})} \quad (3.3)$$

计算出 $\dot{Q}^{(1/2)}$, 由下列关系计算 $Q^{(1)}$

$$Q^{(1)} = Q^{(0)} + \Delta t \dot{Q}^{(1/2)} \quad (3.4)$$

上标“ n ”=0, 1, 2, ..., N ; $N = T/\Delta T$, 即计算次数; T 为计算的全过程时间(包括几个周期).

从第一步以后的水深按以下关系计算

$$M_1 \dot{H}^{(n-1/2)} = B_1(t_{n-1/2}, Q^{(n)}) \quad (3.5)$$

$$H^{(n+1/2)} = H^{(n-1/2)} + \Delta t \dot{H}^{(n-1/2)} \quad (3.6)$$

式中, 上标 $n=1, 2, \dots, N$,

从 $n=1$ 起由(3.5), (3.6), (3.3), (3.4)即完成一时间步长的计算, 如此循环进行直到计算结果周期性重复为止.

这种分裂时间法的计算示意如图7所示.

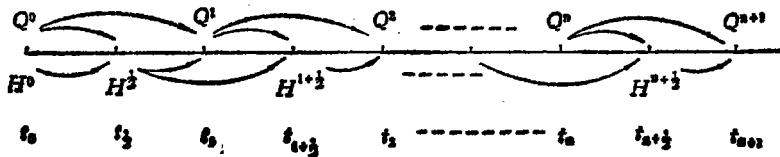


图 7

方法的特点是计算各时刻的 \dot{H} , \dot{Q} 值用到前半步时间的 H 或 Q 值可提高计算精度, 更主要的是在每前进一步, 只需分别求解(2.35)或(2.37)式各一次, 而避免了非线性方程隐式计算格式的多次迭代, 减少了计算时间, 全周期需要成百步的相同运算, 积累起来, 分裂时间法解长周期问题显得十分有效.

当网格划分以后, 时间步长 Δt 根据 Courant-Friedrich-Lewy 稳定性准则选取. 其关系为

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x_1}{\sqrt{2}c} \quad (3.7)$$

式中 c 表示波在水域中的传播速度

$$c = \sqrt{gh} \quad (3.8)$$

四、大型稀疏矩阵的紧凑存贮

方程式(2.35), (2.37)的左端质量矩阵 M_1 , M_2 是对称和正定的, 求解时先将它们分解为下三角矩阵 L 和对角矩阵 D , 即

$$M = LDL^T \tag{4.1}$$

这个分解一次形成，存贮起来以备每前进一时间步长 Δt 回代求解

$$L_k^T \dot{H} = D_k^{-1} L_k^{-1} B_1 \tag{4.2}$$

$$L_0^T \dot{Q} = D_0^{-1} L_0^{-1} B_2 \tag{4.3}$$

但是右端 B_1, B_2 在每一步中都要重新形成，其中包括 $M_k T^b$ 以及其它的矩阵相乘，因而需要另行存贮以备每步计算调用。为了有效地利用计算机的容量，我们编制了大阶数稀疏矩阵的紧凑存贮格式。具体形式是：

将矩阵中所有的“非零”元素从第一行起由左至右顺序排列，如此进行到最后一行，形成一个一维数组。按紧凑格式所需存贮的信息是

序号	CIP[1]	CIP[2]	CIP[L]	TIR
VE[k]	x x x x x x x x			
RI[k]	x x x x x x x x			

其中

VE[k]——按紧凑存贮的一维数组元素；

RI[k]——元素VE[k]在矩阵中对应的列号；

CIP[L]——第L行的第一个非零元素在VE中的地址；

TIR——最后一行末尾元素的地址，即VE数组的长度。

用这样的紧凑存贮格式，摒弃了所有的“零”元素。当矩阵的稀疏度越大，越能显示出它的优点。从计算实例表明，可节省 2/3 的存贮容量。

五、解的“人工光滑”化

为消除计算中出现的短波长噪音的干扰，我们将每一步的变量的计算值，按节点将与之相连的单元的节点变量值进行线性内插。如图 8 所示，节点 i 为所考虑的光滑处理点，与该节点相连的单元有 n 个。该节点的变量 Q_i 经过“人工光滑”处理后的值为

$$Q_i = \alpha Q_i + (1-\alpha) \sum_{k=1}^n Q_k A_k / \sum_{k=1}^n A_k \quad (0.5 \leq \alpha < 1)$$

同样，对水深 H_i 进行类似光滑处理

$$H_i = \alpha H_i + (1-\alpha) \sum_{k=1}^n H_k / n \quad (0.5 \leq \alpha \leq 1.0)$$

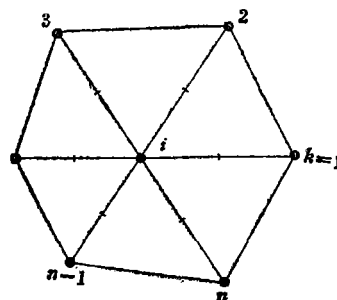


图 8

将光滑化的 $Q_i^{(j-1)}$, $H_i^{(j-1)}$ 代入 (3.5), (3.6), (3.3), (3.4) 的下一步循环计算出 $Q_i^{(j)}$, $H_i^{(j)}$ 。

六、实例计算分析

本文以文献[8]的扇形海湾为例，用TQ—16型计算机分别以几种不同条件作了数值计算，共同使用的数据是

$$t=0, \quad \eta(x_1, x_2, 0) = q(x_1, x_2, 0) = 0$$

在开边界 S_0 上 $\eta = 0.03048 \sin \omega t$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{周期 } T = 12.4 \text{ 小时}$$

其它不同条件与计算结果分析如下：

1. 陆地边界上按无粘性条件处理，底部深度沿径向线性变化， $\tau^b = 10^{-4}$ (常数)。采用网格Ⅱ (图10) 计算的波高 η 值比按网格Ⅰ (图9) 计算的结果好 (图11)。前者波高在周向分布较均匀，后者呈现沿周向的跳动。即合理的网格划分如图10，域内节点邻域的单元数目都一样，可使计算结果比较均匀变化。然而，这两种情况的计算值与解析解相比还嫌误

网格Ⅰ

$$\Delta r = 1.524 \times 10^4 \text{ m}$$

$$\Delta \theta = \pi/16$$

$$r_1 = 4\Delta r, \quad r_2 = 10\Delta r$$

$$h(r) = 6.096 + (r - r_1) \times 10^{-4} \text{ m}$$

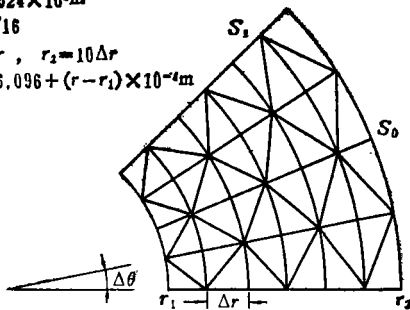


图9 典型算例的扇形海湾的几何形状 (粗边线 S_1 为陆地边界、细线 S_0 开边界) 与网格划分，海底深度为沿径向线性变化

网格Ⅱ

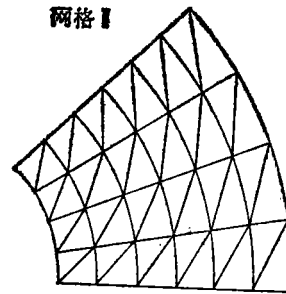


图10 同样的海湾，采用另一种网格划分

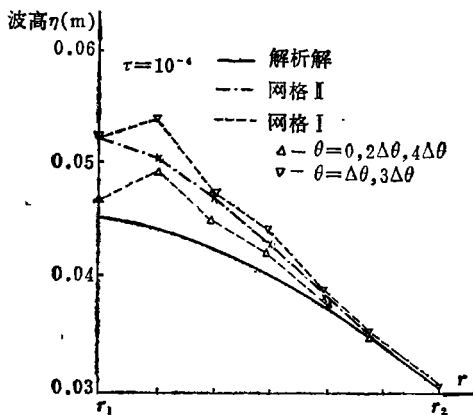


图11 按网格Ⅰ、Ⅱ分别计算的波高值与解析解的比较，底部摩擦 $\tau = 10^{-4}$

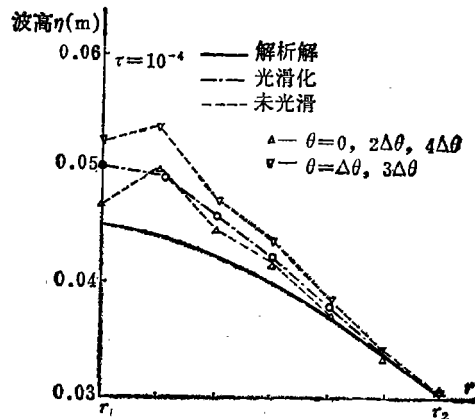


图12 “人工光滑”处理对计算波高值的影响 底部摩擦 $\tau = 10^{-4}$

差较大,这是由于底部摩擦力处理不当.可以通过调整得到较好的结果,下面将另行说明.

2. 仍用网格 I, $\tau^b=10^{-4}$, 加以“人工光滑化”处理, 计算出的波高 η 值与未经光滑化处理的结果比较, 前者不呈现周向的跳动 (图12), 且精度亦有所提高. 说明“人工光滑化”对消除短波噪音干扰效果明显. 这比文献[8]中采用将原型方程再提一次阶数的方法以消除短波长噪音干扰要简便得多.

3. 底部摩擦按公式 $\tau_i^b=C_F\rho(q_1^2+q_2^2)^{\frac{1}{2}}q_i/H^2$ 处理, 计算结果对 C_F 系数的变化反应敏感. 合理调节 C_F 值 (当 $C_F=0.11$ 相当于 $\tau=10^{-4}$ 这一量级), 可得精度较高的计算波高值 (图13), 最大误差小于3%. 这个方法比文献[5]的方法少费计算时间.

4. 取不同的涡流粘性系数值, 对计算结果影响较小. 如按无涡流粘性流动处理, 也可获得较好的计算值, 带来的效益是节省计算时间.

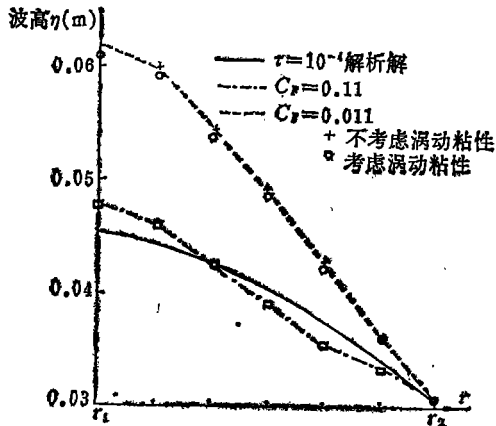


图13 底部摩擦系数 C_F , 涡流粘性系数 E 对计算波高的影响, 计算值经过“人工光滑”处理

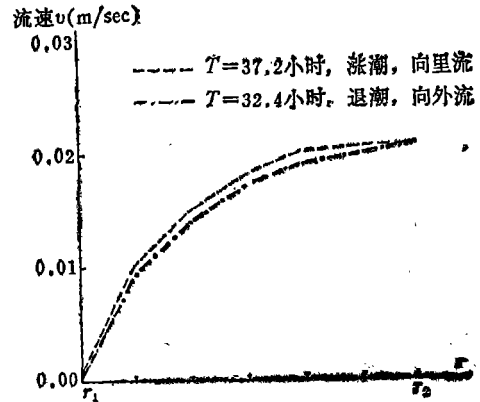


图14 计算流速值, 不考虑 Coriolis 效应时流速方向均为径向, $C_F=0.11$, “人工光滑”处理

参 考 文 献

- [1] Leendertse, J. J., Aspects of a computational model for long period water wave propagation, *Rand Corp.* RM-5294-PR. (1967).
- [2] 金子史雄、堀江毅、村上和男. ADI 法による潮流汚染拡散の数値計算——大阪湾に適用した場合につひて, 港湾技術研究所報告, 14, 1(1975).
- [3] Liggett, J. A. and D. A. Woolhiser, Difference solutions of the shallow-water equation, *Jour. Engng. Mech. Division*, ASME, EM2, April, (1967).
- [4] Taylor, C., and J. Davis, Tidal and long water propagation—A finite element approach, *Computers and Fluids*, 3 (1975).
- [5] Connor, J. J. and J. D. wang, Mathematical models of the Massachusetts Bay, Part 1, MIT Sea Grant Technical Report, MITSG (1973), 74-4.
- [6] Easton, A. K. and H. R. Milner, Comparison of two tidal model for Cario Bay, Victoria, *Einite Element Methods in Engineering*, Dec. (1976).
- [7] Kawahara, M., N. Takeuchi and T. Yoshida, Two step explicit finite element method for Tsunami wave propagation analysis, *Int J. Num. Meth. Engng.*, 12, 2, (1978).
- [8] Gray, W. G. and D. R. Lynch, On the control of noise in finite element tidal computations, *Computers and Fluids*, 7, 3, March(1979).

- [9] Grotkop, G., Finite element analysis of long-period water waves, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, 2 (1973).
- [10] Norton, W. R., I. P. King and G. T. Orlob, A finite element model for lower granite reservoir, Water Resources Engineers Inc., Walnut Creek, (1973).
- [11] Withum, D., K. P. Holz and U. Meissner, Finite element formulations for tidal wave analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 17/18, (1979).

The Mathematical Modelling of Near Coast Shallow Water Circulation

Lu Yu-lin Lai Guo-zhang

(The Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian Institute of
Technology, Dalian)

Abstract

This paper presents a finite element method to solve the shallow water circulation problem numerically.

The continuity equation and momentum equation, considering the Coriolis effect, bottom friction and eddy viscosity, are integrated vertically. Using Galerkin weighted residual method, the weak variational formulation is derived for the finite element analysis. The split-time method is applied for the numerical integration instead of iteration for nonlinear terms. Moreover, an artificial smooth approach is proposed to suppress the the short wavelength noise.

In order to save computer storage units, a dense storage scheme is formed, where all the zero elements in large scaled and sparse matrices are excluded.