应用数学和力学，第5卷第5期（1984年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

一般随机不动点定理及其应用*

丁 协 平

（四川师范学院数学系，1983年8月12日收到）

摘 要

在本文中我们得到了一个一般的随机不动点定理，推广了Engl[4,7]和Bocsan[8]的主要结果。这一定理的有用性在于目前由许多作者用特殊方法得到的随机不动点定理[1,4,5~13]均能利用我们的一般定理（定理1和系1，2）得到，最后给出了我们的定理对随机积分和微分方程的应用。

一、引 言

在最近十几年中，由于随机分析的发展随机积分和微分方程已广泛应用于许多学科领域。例如遗传工程、电话通讯理论、扰动理论、人口动态、随机控制、生物学、化学动力学和蒸汽温度模型等等（参见[1～3]和[4，p226]）。为了研究这些从实际问题中提出的各类随机积分和微分方程解的存在唯一性和其他性质，映射的随机不动点理论将是必不可少的有力工具之一。因此 Bharucha-Reid[5] 指出：得到各类决定性不动点定理的随机类似及其推广将是有兴趣和有价值的。

王梓坤[6]早在二十年前就已向国内介绍了这一研究方向并作了若干工作，近几年国内外已有不少作者从事这一方向的研究。

最近 Engl[4,7] 和 Bocsan[8] 在各自的假设下对点值和集值连续随机映射已分别得到了某些一般随机不动点定理。

在本文中，我们首先改进和推广[4,7,8]中的结果，提供了一个更一般的随机不动点定理，使得目前由许多作者[1,4,5~13]用各种特殊方法得到的随机不动点定理都能应用我们的一般随机不动点定理（定理1）作统一处理。换句话说，对 Polish 空间，即可分完备距离空间，和可分 Banach 空间上的点值和集值连续映射，一旦决定性不动点定理成立，则作为定理1的推论，相应的随机不动点定理也成立。因此作为定理1的应用，我们得到了若干决定性不动点定理的随机推广。最后给出了我们的结果对随机积分和微分方程的一些应用。

二、一般随机不动点定理

设 (X, d) 是一 Polish 空间，$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ 是一完备σ-有限正测度空间。显然每一完备概率测度空间是一完备σ-有限正测度空间。我们用 $\mathrm{CL}(X)$ 表X的一切非空闭子集的族，

* 钱伟长推荐。

$H(\cdot,\cdot)$表距离d在$\mathrm{CL}(X)$上诱导的 Hausdorff 距离．对任意$x\in X$，$A\subset X$，记$d(x, A)=\inf\{d(x, y): y\in A\}$．

定义1 称映射$E:\Omega\to\mathrm{CL}(X)$是可测的（紧可测的），如果对每一开集（紧集）$D\subset X$，有$E^{-1}(D)=\{\omega\in\Omega: E(\omega)\cap D\neq\phi\}\in\mathcal{A}$．

注意到这里的可测性定义在[14]中称为弱可测．我们用$G_r(E)=\{(\omega,x)\in\Omega\times X: x\in E(\omega)\}$表映射$E$的图．

定义2 称映射$T:G_r(E)\to\mathrm{CL}(X)$是“具有随机定义域$E$的连续集值随机映射”如果

(i) 对每一$\omega\in\Omega$，$T(\omega,\cdot):E(\omega)\to(\mathrm{CL}(X), H(\cdot,\cdot))$是连续映射．

(ii) 对一切$x\in X$和一切开集$D\subset X$，

$$\{\omega\in\Omega: x\in E(\omega)\text{ 和 }T(\omega,x)\cap D\neq\phi\}\in\mathcal{A}$$

称映射$x:\Omega\to X$是“T的广义不动点”，如果对一切$\omega\in\Omega$，$x(\omega)\in E(\omega)$和$x(\omega)\in T(\omega,x(\omega))$；称它是“$T$的随机不动点”如果它是$T$的广义不动点且是可测的．称映射$T:G_r(E)\to X$是“具有随机定义域$E$的连续点值随机映射”，如果由$\tilde{T}(\omega,x)=\{T(\omega,x)\}$定义的映射$\tilde{T}:G_r(E)\to\mathrm{CL}(X)$是具有随机定义域$E$的连续集值随机映射．

定理1 令$\{T_i\}_{i\in I}$（I表任意指标集）是具有随机定义域E的连续集值随机映射的族．如果$\{T_i\}_{i\in I}$有一广义公共不动点，则$\{T_i\}_{i\in I}$有一随机公共不动点．由

$$F(\omega)=\{x: x\in E(\omega)\text{和}x\in T_i(\omega,x),\ \forall i\in I\}$$

定义的映射$F:\Omega\to\mathrm{CL}(X)$是紧可测的且存在$\{T_i\}_{i\in I}$的（至多）可数个随机公共不动点$x_m$ $(m=1,2,\cdots)$使得对一切$\omega\in\Omega$有$F(\omega)=\overline{\{x_m(\omega)\}}_{m\geq1}$其中$\overline{\{x_m(\omega)\}}_{m\geq1}$表集$\{x_m(\omega)\}_{m\geq1}$的闭包．

证明 因为E和每一T_i都是闭值映射且对一切$\omega\in\Omega$，每一T_i关于$x\in E(\omega)$是连续的．又因$\{T_i\}_{i\in I}$有广义公共不动点，所以对每一$\omega\in\Omega$，$F(\omega)$有非空闭值．因为(X, d)是Polish空间和$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$是完备$\sigma$-有限正测度空间且对一切开集$D\subset X$，有$\{\omega\in\Omega: E(\omega)\cap D\neq\phi\}\in\mathcal{A}$．由[15,定理Ⅲ,30]推得对一切闭集$C\subset X$，有$\{\omega\in\Omega: E(\omega)\cap D\neq\phi\}\in\mathcal{A}$．现在对任意固定的紧集$C\subset X$，令$C(\omega)=E(\omega)\cap C$，$\forall\omega\in\Omega$和令$\Omega_0=\{\omega\in\Omega: C(\omega)\neq\phi\}$．于是有$\Omega_0\in\mathcal{A}$．因此由下式定义的映射

$$\omega\mapsto C(\omega)\qquad\forall\omega\in\Omega_0$$

是一非空紧值映射且在$(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \mu)$上是可测的，其中$\mathcal{A}_0$由既是$\mathcal{A}$的元素又是$\Omega_0$的子集的那些集组成．由[15，定理Ⅲ，8]知存在$\omega\mapsto C(\omega)$的可测选择序列$\{\sigma_k\}_{k\geq1}$使得$C(\omega)=\overline{\{\sigma_k(\omega)\}}_{k\geq1}$，$\forall\omega\in\Omega_0$．另一方面，由[10]或[11]的引理2知对每一$T_i$和对每一可测映射$x:\Omega\to X$，$x(\omega)\in E(\omega)$，有$T_i(\omega, x(\omega))$是可测的且有非空闭值．又因$T_i$是连续集值随机映射，从而对每一$\omega\in\Omega$，$\sup\limits_{i\in I} d(\cdot,T_i(\omega,\cdot))$关于$x\in E(\omega)$是下半连续的和$\sup\limits_{i\in I} d(x(\cdot),T_i(\cdot, x(\cdot)))$是一可测函数．

所以由下式定义的函数

$$\begin{aligned}\eta(\omega)&=\inf_{x\in C(\omega)}\{\sup_{i\in I} d(x, T_i(\omega, x))\}\\&=\inf_{k\geq1}\{\sup_{i\in I} d(\sigma_k(\omega), T_i(\omega, \sigma_k(\omega)))\}\end{aligned}$$

是$(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \mu)$上的可测实值函数．注意到$F(\omega)\subset E(\omega)$和$C(\omega)=E(\omega)\cap C$，$\forall\omega\in\Omega$，我们有

$$\{\omega\in\Omega: F(\omega)\cap C\neq\phi\}=\{\omega\in\Omega_0: F(\omega)\cap C(\omega)\neq\phi\}$$

$=\{\omega\in\Omega_0:\eta(\omega)=0\}\in\mathscr{A}_0\subset\mathscr{A}$

这蕴含 $F:\Omega\to CL(X)$ 是一紧可测闭值映射，又由[16]的定理 1 或 [8] 知存在F的一可测选择序列x_m ($m=1, 2,\cdots$) 使得对一切$\omega\in\Omega$，有 $F(\omega)=\overline{\{x_m(\omega)\}}_{m\geq1}$。于是每一 $x_m:\Omega\to X$，$m\geqslant1$都是$\{T_i\}_{i\in I}$的随机公共不动点。定理证毕。

系1 令T是具有随机定义域E的连续集值随机映射，如果T有广义不动点，则 T 有随机不动点，由

$$F(\omega)=\{x:x\in E(\omega) \text{ 和 } x\in T(\omega, x)\}$$

定义的映射 $F:\Omega\to CL(X)$ 是紧可测的且存在 T 的（至多）可数个随机不动点 x_m ($m=1, 2,\cdots$) 使得对一切 $\omega\in\Omega$，有 $F(\omega)=\overline{\{x_m(\omega)\}}_{m\geq1}$。

注1 系1改进和推广了[4]的定理8，[7]的定理 6 和 [8] 的定理1。

系2 令$\{T_i\}_{i\in I}$是具有随机定义域E的连续点值随机映射的族，如果$\{T_i\}_{i\in I}$有广义公共不动点，则$\{T_i\}_{i\in I}$有随机公共不动点。由

$$F(\omega)=\{x:x\in E(\omega) \text{ 和 } x=T_i(\omega,x),\ \forall i\in I\}$$

定义的映射 $F:\Omega\to CL(X)$ 是紧可测的且存在$\{T_i\}_{i\in I}$的（至多）可数个随机公共不动点 x_m ($m=1, 2,\cdots$) 使得对一切$\omega\in\Omega$有 $F(\omega)=\overline{\{x_m(\omega)\}}_{m\geq1}$。

注2 系2也是[4]的定理 8 和[8]的定理 1 的改进和推广。

三、随机不动点定理

在本节内，我们利用定理1、系1和系 2 来获得某些最近由各个作者得到的决定性不动点定理的随机推广。

定义3 如果函数 $\Phi:\Omega\times[0, \infty)^5\to[0, \infty)$ 满足：

(i) 对每一$\omega\in\Omega$，$\Phi(\omega, t_1,\cdots, t_5)$ 关于$t_i(i=1,\cdots,5)$是上半连续和严格增的。

(ii) 对每一 $\omega\in\Omega$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi^n(\omega,t)<\infty$，$\forall t>0$，其中 $\varphi(\omega,t)=\Phi(\omega, t, t, t, 0, 2t)$，

$\varphi^{n+1}(\omega,t)=\varphi(\omega,\varphi^n(\omega,t))$，$\forall n\geqslant1$，则称$\Phi$为$\Phi$-压缩尺度函数。

定理2 设$\{T_n\}_{n\in N}$（N表自然数集）是具有随机定义域E 的连续集值随机映射序列。假设对每一 $\omega\in\Omega$ 和对一切 $x\in E(\omega)$，$T_n(\omega,x)\subset E(\omega)$，$\forall n\in N$，如果存在$\Phi$-压缩尺度函数$\Phi$使得对一切$(\omega,x)$，$(\omega,y)\in G_r(E)$，$i$，$j\in N$，$i\neq j$有

$$H(T_i(\omega,x),T_j(\omega,y))\leqslant\Phi(\omega,d(x,y),d(T_i(\omega,x),x),d(T_j(\omega,y),y),$$
$$d(T_j(\omega,y),x),d(T_i(\omega,x), y))$$

则$\{T_n\}_{n\in N}$有随机公共不动点。由

$$F(\omega)=\{x:x\in E(\omega)\text{和}x\in T_n(\omega,x),\forall n\in N\}$$

定义的映射$F:\Omega\to CL(X)$是紧可测的且存在$\{T_n\}_{n\in N}$的（至多）可数个随机公共不动点 x_m ($m=1,2,\cdots$) 使得对一切 $\omega\in\Omega$ 有 $F(\omega)=\overline{\{x_m(\omega)\}}_{m\geq1}$。

证明 注意到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi^n(\omega,t)<\infty$，$\forall\omega\in\Omega$和$t>0$，蕴含$\varphi(\omega,t)<t$，$\forall\omega\in\Omega$和$t>0$。因此由[17,系2]推得$\{T_n\}_{n\in N}$有一广义公共不动点；再由定理1知本定理结论成立。

注3 [11]的定理1和 [9] 的定理都是定理 2 的特殊情形。

定理3 设(X,d)是紧距离空间，$\{T_n\}_{n\in N}$是具有随机定义域E的连续集值随机映射的序列使得对一切$(\omega,x)\in G_r(E)$，有$T_n(\omega,x)\subset E(\omega)$，$\forall n\in N$。如果对一切$(\omega,x)$，$(\omega,y)\in G_r(E)$，$x\neq y$，$i,j\in N$，$i\neq j$，

$$H(T_i(\omega,x),T_j(\omega,y))<\max\{d(x,y),d(T_i(\omega,x),x),d(T_j(\omega,y),y),\frac{1}{2}[d(T_j(\omega,y),x)+d(T_i(\omega,x),y)]\} \tag{3.1}$$

则$\{T_n\}_{n\in N}$有一随机公共不动点和定理2的全部结论成立。

证明 对任意固定的i，$j\in N$，$i\neq j$，由[18]的定理6容易推得T_i和T_j有广义公共不动点。又由(3.1)式容易证明T_i和T_j的广义不动点集是重合的。因此$\{T_n\}_{n\in N}$有广义公共不动点；再由定理1知定理3的结论成立。

注4 易知定理3对具有随机定义域E的连续集值随机映射族$\{T_i\}_{i\in I}$（I为任意指标集）也成立。[11]的定理2是定理3的特殊情形。

定理4 设(X,d)是距离凸Polish空间，S，T是具有随机定义域E的连续集值随机映射。假设对每一$\omega\in\Omega$，$x\in\partial E(\omega)$（$\partial E(\omega)$表$E(\omega)$的边界）有$S(\omega,x)\cup T(\omega,x)\subset E(\omega)$。如果存在$h:\Omega\to(0,1)$和$q:\Omega\to(0,\infty)$满足$q(\omega)>\max\left\{\frac{h(\omega)(1+h(\omega))}{1-h(\omega)},\ 1+h(\omega)\right\}$，$\forall\omega\in\Omega$，使得对一切$(\omega,x),(\omega,y)\in G_r(E)$

$$H(S(\omega,x),T(\omega,y))\leqslant h(\omega)\max\left\{d(x,y),\frac{1}{q(\omega)}[d(S(\omega,x),x)+d(T(\omega,y),y)],\frac{1}{q(\omega)}[d(T(\omega,y),x)+d(S(\omega,x),y)]\right\}$$

则S和T有一随机公共不动点。由

$$F(\omega)=\{x:x\in E(\omega)\text{ 和 }x\in T(\omega,x)\cap S(\omega,x)\}$$

定义的映射$F:\Omega\to CL(X)$是紧可测的且存在S和T的（至多）可数个随机公共不动点x_m（$m=1,2,\cdots$）使得$F(\omega)=\overline{\{x_m(\omega)\}}_{m\geq1}$。

证明 利用[19]的定理1和本文定理1容易证得本定理结论。

注5 定理4是[19]中定理1和[20;21]中相应结果的随机化推广。自然我们也能陈述[19]中其余结果的随机类似，这里从略。

定理5 设(X,d)是紧距离空间，T是具有随机定义域E的连续点值随机映射使得对一切$(\omega,x)\in G_r(E)$，有$T(\omega,x)\in E(\omega)$。如果对一切$(\omega,x),(\omega,y)\in G_r(E)$，$x\neq y$，

$$d(T^p(\omega,x),T^q(\omega,y))<\delta(O_T(\omega,x)\cup O_T(\omega,y)) \tag{3.2}$$

其中p，$q\in N$，$O_T(\omega,x)=\{T^i(\omega,x):i\geqslant0\}$和$\delta(A)$表$A\subset X$的直径。则$T$有唯一随机不动点。

证明 由[22]的定理4知T有唯一广义不动点，又由系2知T有一随机不动点$x^*:\Omega\to X$。x^*的唯一性容易从(3.2)式推得。

注6 定理5是[22]的定理4的随机化推广。

定义4 令$\alpha:\Omega\times[0,\infty)\to[0,\infty)$满足：

(i) 对每一$\omega\in\Omega$，$\alpha(\omega,\cdot)$是非减函数；

(ii) 对每一$\omega\in\Omega$，$\lim\limits_{t\to\infty}(t-\alpha(\omega,t))=\infty$和$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n(\omega,t)=0$，$\forall t>0$，

则称α为一α-压缩尺度函数。

注7 我们强调指出在定义4中既没有假设$\alpha(\omega,t)$关于t的某种连续性，也没有假设$\alpha(\omega,t)$关于$\omega\in\Omega$的

可测性.

定理6 设(X,d)是Polish空间，T是具有随机定义域E的连续点值随机映射使得对一切$(\omega,x)\in G_r(E)$，有$T(\omega,x)\in E(\omega)$. 如果存在$p\in N$和α-压缩尺度函数α使得对一切$(\omega,x)\in G_r(E)$和$k\in N$

$$d(T^p(\omega,x),T^{p+k}(\omega,x))\leqslant\alpha(\omega,\delta(O_T(x,0,p+k))) \tag{3.3}$$

其中$O_T(x,0,p+k)=\{T^i(\omega,x):0\leqslant i\leqslant p+k\}$，则$T$有一随机不动点. 由

$$F(\omega)=\{x:x\in E(\omega)\text{和}x=T(\omega,x)\}$$

定义的映射$F:\Omega\to CL(X)$是紧可测的且存在T的（至多）可数个随机不动点x_m $(m=1,2,\cdots)$使得对每一$\omega\in\Omega$，有$F(\omega)=\overline{\{x_m(\omega)\}}_{m\geqslant1}$.

证明 由[23]的定理1和系2知本定理结论成立.

定理7 设(X,d)是Polish空间，T是具有随机定义域E的连续点值随机映射使得对一切$(\omega,x)\in G_r(E)$，有$T(\omega,x)\in E(\omega)$.如果存在$p,q\in N$和α-压缩尺度函数α使得对一切(ω,x)，$(\omega,y)\in G_r(E)$.

$$d(T^p(\omega,x),T^q(\omega,y))\leqslant\alpha(\omega,\delta(O_T(x,0,p)\cup O_T(y,0,q))) \tag{3.4}$$

则T有唯一随机不动点.

证明 容易验证(3.4)式蕴含(3.3)式，由定理6知T有一随机不动点$x^*:\Omega\to X$. $x^*(\omega)$的唯一性容易从(3.4)式推得.

注8 我们指出由[24]的定理1和2知在定理6和7中当压缩尺度函数α换为满足下列条件的压缩尺度函数$\beta:\Omega\times[0,\infty)\to[0,\infty)$时:

(i) 对每一$\omega\in\Omega$, $\beta(\omega,\cdot)$非减右连续;

(ii) 对每一$\omega\in\Omega$, $q\in[0,\infty)$存在方程$t=\beta(\omega,t)+q$的一极大解$\mu(\omega,q)$，且$\mu(\omega,0)=0$，则定理6和定理7的结论仍然成立. 再注意到注7，容易看出定理6和7是[6,10,12,13]中相应结果的改进和推广.

系3 设(X,d)是Polish空间，T是具有随机定义域E的连续点值随机映射使得对一切$(\omega,x)\in G_r(E)$，有$T(\omega,x)\in E(\omega)$. 如果存在$k:\Omega\to[0,1)$使得对一切$(\omega,x),(\omega,y)\in G_r(E)$

$$d(T^p(\omega,x),T^q(\omega,y))\leqslant k(\omega)\delta(O_T(x,0,p)\cup O_T(y,0,q))$$

其中$p,q\in N$。则T有唯一随机不动点.

证明 在定理7中令$\alpha(\omega,t)=k(\omega)t$，$\forall\omega\in\Omega$，由定理7知本系结论成立.

注9 系3改进和推广了[5,6,12,13]中的相应结果.

下面我们假设$(X,\|\cdot\|)$是一可分Banach空间，$CC(X)$表X的一切非空闭凸子集的族，$CB(X)$表X的一切非空有界闭子集的族. 注意到$(X,\|\cdot\|)$是Polish空间，故定理1～7和系1～3对$(X,\|\cdot\|)$成立.

定理8 令$E:\Omega\to CC(X)\cap CB(X)$是一可测映射和$k:\Omega\to(0,1)$. 假设$T$和$S$是具有随机定义域$E$的点值随机映射使得

(i) 对每一$(\omega,x)\in G_r(E)$，$T(\omega,x)+S(\omega,x)\in E(\omega)$,

(ii) 对一切$(\omega,x),(\omega,y)\in G_r(E)$有$\|S(\omega,x)-S(\omega,y)\|\leqslant k(\omega)\|x-y\|$,

(iii) 对每一$\omega\in\Omega$，$T(\omega,\cdot)$是全连续的，则$T+S$有一随机不动点. 由

$$F(\omega)=\{x:x\in E(\omega)\text{和}x=T(\omega,x)+S(\omega,x)\}$$

定义的映射$F:\Omega\to CL(X)$是紧可测的且存在$T+S$的（至多）可数个随机不动点x_m $(m=1,2,\cdots)$使得对每一$\omega\in\Omega$，有$F(\omega)=\overline{\{x_m(\omega)\}}_{m\geqslant1}$。

证明 由[25, p115,引理]和系2知本定理结论成立.

注10 定理8改进了[4]的定理14.

四、某 些 应 用

设$(X,\|\cdot\|)$是可分 Banach 空间，$C_J(X)=\{x:J\to X\mid x$连续，$\|x(t)\|_J=\max\limits_{t\in J}\|x(t)\|\}$其中$J=[0,a]\subset\mathbf{R}$。显然$(C_J(X),\|\cdot\|_J)$是可分 Banach 空间。

引理1 ([26])令$x:\Omega\times J\to X$使得对每一$\omega\in\Omega$，$x(\omega,\cdot)$连续和对每一$t\in J$，$x(\cdot,t)$可测，则$x(\omega,t)$是$C_J(X)$-值可测映射。

引理2 ([26])设$K:\Omega\times J\times J\times X\to X$使得对每一$\omega\in\Omega$，$K(\omega,\cdot,\cdot,\cdot)$连续和对每一$(t,s,x)\in J\times J\times X$，$K(\cdot,t,s,x)$可测。则对每一$C_J(X)$-值可测映射$x(\omega,s)$，$\int_0^t K(\cdot,t,s,x(\cdot,s))ds$是$C_J(X)$-值可测映射。

引理3 设$x_0:\Omega\times J\to X$是一给定的$C_J(X)$-值可测映射，$M:\Omega\to(0,\infty)$是可测函数。则由

$$E(\omega)=\{x\in C_J(X):\|x-x_0(\omega,t)\|_J\leqslant M(\omega)\}$$

定义的映射$E:\Omega\to \mathrm{CL}(C_J(X))$是可测的。

证明 对任意固定的$x\in C_J(X)$，映射

$$\omega\mapsto d(x,E(\omega))=\max\{0,\|x-x_0(\omega,t)\|_J-M(\omega)\}$$

是可测的，其中$d(x,E(\omega))=\inf\limits_{y\in E(\omega)}\|x-y\|_J$。由[15,定理Ⅲ,30]，$E(\omega)$是$\mathrm{CL}(C_J(X))$-值可测的。

定理9 设$x_0:\Omega\times J\to X$是$C_J(X)$值可测映射，$K:\Omega\times J\times J\times X\to X$满足引理2内假设。假设$M:\Omega\to(0,\infty)$是可测函数，$m:\Omega\to(0,\infty)$，$L:\Omega\to[0,\infty)$使得对一切$(\omega,t,s)\in\Omega\times J\times J$和对一切$x\in E(\omega)$（$E(\omega)$在引理3内被定义）有

$$\|K(\omega,t,s,x(s))\|_J\leqslant m(\omega),\ \forall\,\omega\in\Omega$$

如果下列条件成立：

(i) $m(\omega)\cdot a\leqslant M(\omega)$，$\forall\,\omega\in\Omega$，

(ii) 存在$p\in N$使得对一切$(\omega,t,s)\in\Omega\times J\times J$，$x\in C_J(X)$和$k\in N$，

$$\|K(\omega,t,s,T^{p-1}(\omega,x(s)))-K(\omega,t,s,T^{p+k-1}(\omega,x(s)))\|\leqslant L(\omega)\delta_{\|\cdot\|}(O_T(x(s),0,p+k))$$

其中 $T^{n+1}(\omega,x(t))=x_0(\omega,t)+\int_0^t K(\omega,t,s,T^n(\omega,x(s)))ds,\ \forall\,n\geqslant 0$

和 $O_T(x(s),0,p+k)=\{T^i(\omega,x(s)):0\leqslant i\leqslant p+k\}$

则随机积分方程

$$x(t)=x_0(\omega,t)+\int_0^t K(\omega,t,s,x(s))ds \tag{4.1}$$

有一随机解。由

$$F(\omega)=\{x:x\in E(\omega)\text{和}\ x(t)=x_0(\omega,t)+\int_0^t K(\omega,t,s,x(s))ds\}$$

定义的映射$F:\Omega\to\mathrm{CL}(C_J(X))$是紧可测映射且存在随机积分方程(4.1)的（至多）可数个随机解$x_m:\Omega\times J\to X$ $(m=1,2,\cdots)$使得对每一$\omega\in\Omega$，有$F(\omega)=\overline{\{x_m(\omega,t)\}}_{m\geqslant 1}$。

证明 令$E(\omega)=\{x\in C_J(E):\|x-x_0(\omega,t)\|_J\leqslant M(\omega)\}$

由引理3知$E:\Omega\to\mathrm{CL}(C_J(X))$是可测映射。由

$$\widetilde{T}(\omega,x(t))=x_0(\omega,t)+\int_0^t K(\omega,t,s,x(s))ds$$

定义映射$\widetilde{T}:\Omega\times C_J(X)\to C_J(X)$。由引理2知对每一$x\in C_J(X)$，$\widetilde{T}(\cdot,x(t))$是可测的，又由[27]的引理4知对每一$\omega\in\Omega$，$\widetilde{T}(\omega,\cdot)$是连续的．现在令$T=\widetilde{T}|_{G_r(E)}$，则$T$是具有随机定义域$E$的连续点值随机映射，又对一切$(\omega,x)\in G_r(E)$有

$$\|T(\omega,x(t))-x_0(\omega,t)\|_J=\|\int_0^t K(\omega,t,s,x(s))ds\|_J\leqslant am(\omega)\leqslant M(\omega)$$

因此有对一切$(\omega,x)\in G_r(E)$，有$T(\omega,x(t))\in E(\omega)$，于是由[27]定理1知$T$有广义不动点．再由具有$\alpha(\omega,t)=k(\omega)t$，$k:\Omega\to(0,1)$的定理6知$T$有随机不动点．注意到$T$的每一随机不动点都是随机积分方程(4.1)的一随机解．故定理9的结论成立．

定理10 设$x_0:\Omega\times J\to X$；$K:\Omega\times J\times J\times X\to X$；$M:\Omega\to(0,\infty)$；$m:\Omega\to(0,\infty)$和$L:\Omega\to[0,\infty)$满足定理9内的假设，如果下列条件成立：

(i) $m(\omega)\cdot a\leqslant M(\omega),\forall\omega\in\Omega$，

(ii) 存在$p,q\in N$，使得对一切$(\omega,t,s)\in\Omega\times J\times J$，$x(s),y(s)\in C_J(X)$，

$$\|K(\omega,t,s,T^{p-1}(\omega,x(s)))-K(\omega,t,s,T^{q-1}(\omega,y(s)))\|$$
$$\leqslant L(\omega)\delta_{\|\cdot\|}(O_T(x(s),0,p)\cup O_T(y(s),0,q))$$

则随机积分方程(4.1)有唯一随机解$x^*(\omega,t)$．即有

$$x^*(\omega,t)=x_0(\omega,t)+\int_0^t K(\omega,t,s,x^*(\omega,t))ds$$

和$x^*(\omega,t)$是$C_J(X)$-值可测映射．

证明 如在定理9内一样定义$E(\omega)$及映射$\widetilde{T}$和T，由[27]的定理2知T有广义不动点再由系3知T有唯一随机不动点．因此定理10的结论成立．

定理11 设$x_0:\Omega\to X$可测，$f:\Omega\times J\times X\to X$使得对每一$\omega\in\Omega,f(\omega,\cdot,\cdot)$连续和对每一$(t,x)\in J\times X$，$f(\cdot,t,x)$可测．假设$M:\Omega\to(0,\infty)$可测，$m:\Omega\to(0,\infty)$和$L:\Omega\to[0,\infty)$使得对一切$(\omega,t)\in\Omega\times J$，$x\in E(\omega)=\{x\in C_J(X):\|x-x_0(\omega)\|_J\leqslant M(\omega)\}$，有

$$\|f(\omega,s,x(s))\|_J\leqslant M(\omega),\forall\omega\in\Omega$$

如果下列条件成立：

(i) $m(\omega)\cdot a\leqslant M(\omega),\forall\omega\in\Omega$，

(ii) 存在$p\in N$使得对一切$(\omega,s)\in\Omega\times J$，$x\in C_J(X)$和$k\in N$，有

$$\|f(\omega,s,T^{p-1}(\omega,x(s)))-f(\omega,s,T^{p+k-1}(\omega,x(s)))\|$$
$$\leqslant L(\omega)\delta_{\|\cdot\|}(O_T(x(s),0,p+k))$$，

其中$T^{n+1}(\omega,x(t))=x_0(\omega)+\int_0^t f(\omega,s,T^n(\omega,x(s)))ds,\forall n\geqslant 0$．则随机初值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx(\omega,t)}{dt}=f(\omega,t,x(\omega,t))\\&x(\omega,0)=x_0(\omega)\end{aligned}\right\}\tag{4.2}$$

有一随机解．且存在（至多）可数个$C_J(X)$-值可测映射$x_m:\Omega\times J\to X$ ($m=1,2,\cdots$) 使得

(a) $$\left\{\begin{aligned}&\frac{dx_m(\omega,t)}{dt}=f(\omega,t,x_m(\omega,t))\\&x_m(\omega,0)=x_0(\omega)\end{aligned}\right.$$

(b) $$\|x_m(\omega,t)-x_0(\omega)\|_J\leqslant M(\omega),\forall\omega\in\Omega$$

证明 注意到求随机初值问题(4.2)的随机解等价于求下面随机积分方程的随机解：

$$x(\omega,t)=x_0(\omega)+\int_0^t f(\omega,s,x(\omega,s))ds$$

于是在定理9中令$x_0(\omega,t)=x_0(\omega)$ 和 $K(\omega,t,s,x)=f(\omega,s,x)$, $\forall t\in J$. 则由定理9知本定理结论成立.

定理12 设$x_0:\Omega\to X$; $f:\Omega\times J\times X\to X$; $M:\Omega\to(0,\infty)$; $m:\Omega\to(0,\infty)$和$L:\Omega\to[0,\infty)$满足定理11内的假设，如果下列条件成立:

(i) $m(\omega)\cdot a\leqslant M(\omega)$, $\forall\omega\in\Omega$,

(ii) 存在$p,q\in N$使得对一切$(\omega,s)\in\Omega\times J$, $x,y\in C_J(X)$,

$$\|f(\omega,s,T^{p-1}(\omega,x(s)))-f(\omega,s,T^{q-1}(\omega,y(s)))\|$$
$$\leqslant L(\omega)\delta_{\|\cdot\|}(O_T(x(s),0,p)\cup O_T(y(s),0,q)),$$

则随机初值问题(4.2)有唯一随机解$x^*(\omega,t)$，即$x^*(\omega,t)$是$C_J(X)$-值可测映射且满足:

$$\begin{cases}\dfrac{dx^*(\omega,t)}{dt}=f(\omega,t,x^*(\omega,t))\\ x^*(\omega,0)=x_0(\omega),\ \forall\omega\in\Omega,\end{cases}$$

和
$$\|x^*(\omega,t)-x_0(\omega)\|_J\leqslant M(\omega)$$

证明 利用定理10，仿定理11的证明可证得本定理结论成立.

定理13 令$U\subset\mathbf{R}$是零点的一开邻域; $h,g:\Omega\times U\times X\to X$使得对每一$\omega\in\Omega$, $h(\omega,\cdot,\cdot)$ 和 $g(\omega,\cdot,\cdot)$都是连续的和对每一$(t,x)\in U\times X$, $h(\cdot,t,x)$和 $g(\cdot,t,x)$ 都是可测的; 对一切 $\omega\in\Omega$ 和(t,x_1), $(t,x_2)\in U\times X$, 有

$$\|h(\omega,t,x_1)-h(\omega,t,x_2)\|\leqslant K(\omega,t)\|x_1-x_2\|$$

其中$K:\Omega\times U\to\mathbf{R}$满足: 对每一$t\in U$, $K(\cdot,t)$可测和对每一$\omega\in\Omega$, $K(\omega,\cdot)$ 是 Riemann 可积的; 对每一$\omega\in\Omega$, $g(\omega,\cdot,\cdot):U\times X\to X$ 是全连续的. 令 $f(\omega,t,x)=h(\omega,t,x)+g(\omega,t,x)$, $t_0\in U$和$x_0:\Omega\to X$是可测映射. 如果存在可测函数$r:\Omega\to(0,\infty)$和$d\in\mathbf{R}$, $d>0$使得

(i) $\displaystyle\int_{t_0-d}^{t_0+d}K(\omega,t)dt<1$, $\forall\omega\in\Omega$,

(ii) $B(\omega)\times I\subset X\times U$

其中 $B(\omega)=\{x\in X:\|x-x_0(\omega)\|\leqslant r(\omega)\}$, $I=\{t\in\mathbf{R}:|t-t_0|\leqslant d\}$.

(iii) 对每一$\omega\in\Omega$, 有

$$d.\sup_{(t,x)\in I\times B(\omega)}\|g(\omega,t,x(\omega))\|+\int_{t_0-d}^{t_0+d}(r(\omega)K(\omega,t)+\|h(\omega,t,x_0(\omega))\|)dt\leqslant r(\omega)$$

则存在（至多）可数个 $C_{[0,d]}(X)$-值可测映射 $x_m:\Omega\times[0,d]\to X$ $(m=1,2,\cdots)$ 使得对一切 $(\omega,t)\in\Omega\times[0,d]$

$$\begin{cases}\dfrac{dx_m(\omega,t)}{dt}=h(\omega,t,x_m(\omega,t))+g(\omega,t,x_m(\omega,t))\\ x_m(\omega,0)=x_0(\omega)\end{cases}$$

即$x_m(\omega,t)$ $(m=1,2,\cdots)$ 是随机初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{dx(\omega,t)}{dt}=h(\omega,t,x(\omega,t))+g(\omega,t,x(\omega,t))\\ x(\omega,0)=x_0(\omega)\end{cases}$$

的随机解.

证明 令$E:\Omega\to\mathrm{CL}(C_{[0,d]}(X))$由下式定义:

$$E(\omega)=\{x\in C_{[0,a]}(X):\|x-x_0(\omega)\|_{[0,a]}\leqslant r(\omega)\}$$

由引理3知E是可测的。由

$$(T+S)(\omega,x(t))=T(\omega,x(t))+S(\omega,x(t))$$

定义映射$T+S:G_r(E)\to C_{[0,a]}(X)$，其中

$$T(\omega,x(t))=\int_{t_0}^{t}h(\omega,s,x(s))ds$$

和

$$S(\omega,x(t))=x_0(\omega)+\int_{t_0}^{t}g(\omega,s,x(s))ds$$

由本定理假设，利用与[25,p116]的定理3的证明相类似的推证，容易验证T和S满足定理8的一切假设。因此由定理 8 容易推得本定理结论成立。

注11　定理13是 Krasnoselskii 和 Krein 的定理([25,p116])推广到可分 Banach 空间和随机化的情形。

参 考 文 献

[1] Bharucha-Reid, A. T., *Random Integral Equations*, Acad. Press, New York (1972).

[2] Tsokos, C. P. and W. J. Padgett, *Random Integral Equation, with Applications to Life Sciences and Engineering*, Acad. Press, New York (1974).

[3] Morse, W. L., The dishonest method in stream temperature modeling, *Water Resour. Res.*, 14 (1978), 45—51.

[4] Engl, H. W., A general stochastic fixed-point theorem for continuous random operators on stochastic domains, *J. Math. Anal. Appl.*, 66 (1978), 220—231.

[5] Bharucha-Reid, A. T., Fixed point theorems in probabilistic analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82 (1976), 641—657.

[6] 王梓坤，随机泛函分析引论，数学进展，5 (1962)，45—71.

[7] Engl, H. W., Random fixed point theorems, in *Nonlinear Equations in Abstract Spaces*, Acad. Press, New York (1978), 67—80.

[8] Bocsan, Gh., A general random fixed point theorem and applications to random equations, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, 26 (1981), 381—384.

[9] Iton, S., A random fixed point theorem for a multivalued contraction mappling, *Pacific J. Math.*, 68 (1977), 85—90.

[10] 丁协平，连续随机算子的不动点定理，数学进展，12 (1983)，294—298.

[11] 刘作述、陈绍仲，随机集值映象的不动点定理，科学通报，27 (1982)，1161—1162.

[12] 张石生、陈绍仲，概率分析中的随机不动点定理及其对随机逼近论的应用，应用数学学报，5 (1982)，300—309.

[13] Chang, S. S., Random fixed point theorem in probabilistic analysis, *Nonlinear Anal.*, 5 (1981), 113—122.

[14] Himmeberg, C. J., Measurable relations, *Fund. Math.*, 87 (1975), 53—72.

[15] Castaing, C. and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer-Verlag (1977), 580.

[16] Himmeberg, C. J. and F. S. Van Vleck, Multifunctions on abstract measurable spaces and application to stochastic decision theory, *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, 101 (1974), 229—236.

[17] 丁协平，集值压缩型映象的公共不动点定理，四川师院学报，数学专辑 (1981)，26—34.

[18] 丁协平，非扩展型映射的某些不动点定理，数学进展，12 (1983)，133—140.

[19] 丁协平，集值非自映射的某些不动点定理，数学研究与评论，(将发表).

[20] Assad, N.A. and W.A. Kirk, Fixed point theorems for set-valued mappings of contractive type, *Pacific J. Math.*, 43 (1972), 553—562.

[21] Khan, M. S., Common fixed point theorems for multivalued mappings, *Pacific J. Math.*, 95 (1981), 337—347.

[22] 丁协平，某些压缩映象的不动点定理及其相互关系，数学学报，(待发表).

[23] 丁协平，轨道压缩映射的不动点定理，数学年刊，2 (1981)，511—517.

[24] Ding Xie-ping, Fixed point theorems of generalized contractive type mappings (I), *Chin. Ann. of Math.*, 4B (1983), 153—163.

[25] Roseau, M., (叶彦谦译)，《常微分方程》，上海科技出版社 (1981).

[26] 丁协平，随机集值映射的不动点定理及其应用，应用数学和力学，5, 4 (1984).

[27] 丁协平，关于抽象非线性 Volterra 积分方程解的存在唯一性定理，数学汇刊，3 (1982)，56—61.

General Random Fixed Point Theorem and Its Applications

Ding Xie-ping

(*Sichuan Normal College, Chengdu*)

Abstract

In this paper, we obtain a general random fixed point theorem which generalizes the main results of Engl[4,7] and Bocsan[8]. The usefulness of this theorem seems to lie in the fact that unlike many random fixed point theorems obtained by using special methods[1,4,5~13] can be proved by using our general theorem (Theorem 1 and Corollaries 1 and 2). Finally, we indicate some possible applications of our results to nonlinear random integral and differential equations.