应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

非Fuchs型方程的新理论——树级数解的表现定理*（Ⅰ）

董 明 德

（中国科学院理论物理所，1983年9月9日收到）

摘 要

在微分方程的解析理论中非Fuchs型方程的严格显式解至今并未求得（Poincaré问题）．本文提出的新理论首次给出非正则积分的一般求法和显式的精确解．

本法与经典理论的根本不同在于摈弃形式解的假定，从方程本身建立对应关系，应用留数定理自动给出非正则积分的解析结构．它由无收缩部和全、半收缩部组成，前者是通常的递推级数，后者则表为树级数．树级数是类新颖的解析函数，通常的递推级数只是它的特例而已．

本文的目的是建立非正则积分的一般理论．为此需要阐明Poincaré问题（1880T．Ⅰ．P．333）的实质[1]：无法求出非正则积分的显式$\sum_{-\infty}^{\infty}C_n\exp[(\rho+n)\zeta]$．根据以下证明的表现定理，非正则积分是类新颖的解析函数$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}D_{nk}\zeta^k\exp[(\beta+n)\zeta]$，其中系数$D_{nk}$是方程参数的常项树级数．

一、非Fuchs型方程的标准形式

设有高阶非Fuchs型方程，其一般形式为

$$\mathscr{L}\left(z,\ \frac{d}{dz}\right)\varphi(z)\equiv\sum_{\mu=0}^{l}p_\mu(z)z^\mu\left(\frac{d}{dz}\right)^\mu\varphi(z)=0 \tag{1.1}$$

系数$p_\mu(z)$在环域K_z（$\rho_1<|z|<\rho_2$）内解析，

$$p_\mu(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}p_{\mu n}z^n$$

$p_{\mu n}$是常数．

* 本文曾在第一次全国天文学会(1978．8，上海)报告，并在孤粒子会议(1979．8，波兰，耶德维辛)报告．

令$z=e^{\zeta}$，将微分算符$\mathscr{L}$分离Euler算符$L\left(\frac{d}{d\zeta}\right)$和变系数微分算符$\sum\exp[n\zeta]M_n\left(\frac{d}{d\zeta}\right)$，得到如下标准方程：

$$
\left.\begin{aligned}
&L\left(\frac{d}{d\zeta}\right)\varphi(\zeta)=\sum_n\exp[n\zeta]M_n\left(\frac{d}{d\zeta}\right)\varphi(\zeta) \qquad (n=\pm1,\pm2,\cdots)\\
&L\left(\frac{d}{d\zeta}\right)=\prod_{\sigma=1}^{l}\left(\frac{d}{d\zeta}-\beta_\sigma\right)\\
&M_n\left(\frac{d}{d\zeta}\right)=\alpha_n\prod_{j=1}^{m_n}\left(\frac{d}{d\zeta}-\gamma_{n,j}\right) \qquad (m_n\leqslant l)
\end{aligned}\right\} \tag{1.2}
$$

式中α_n，β_σ，$\gamma_{n,j}$是已知常数.

设$\mathscr{L}\varphi=0$和退化方程$L\varphi=0$的基本解系分别表为$\{\varphi_\sigma\}$和$\{\varphi_\sigma^0\}$，$(\sigma=1,2,\cdots,l)$。令$g(\zeta-\zeta')$为方程$L\varphi=\delta(\zeta-\zeta')$的Green函数，则得

等价定理 l阶非Fuchs型方程$\mathscr{L}\varphi=0$等价于l个线性独立解的微分积分方程组：

$$
\left.\begin{aligned}
&\varphi_\sigma(\zeta)-\int_{-\infty}^{\infty}H(\zeta-\zeta',\zeta')\varphi_\sigma(\zeta')d\zeta'=\varphi_\sigma^0(\zeta)\\
&H(\zeta-\zeta',\zeta')=g(\zeta-\zeta')\sum_{-\infty}^{\infty}\exp[n\zeta']M_n\left(\frac{d}{d\zeta'}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1.3}
$$

二、对应关系

利用双边积分变换解上述方程组．设原函数$\varphi_\sigma(\zeta)$的映象为$\phi_\sigma(s)$

$$
\phi_\sigma(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-s\zeta]\varphi_\sigma(\zeta)d\zeta \tag{2.1}
$$

在带域$u_1<\operatorname{Re}s<u_2$内绝对收敛，根据Laplace双边变换的基本定理，有

$$
\varphi_\sigma(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}\phi_\sigma(s)\exp[s\zeta]ds \tag{2.2}
$$

其中$u_1<u<u_2$．因此得到方程(1.3)映象$\phi_\sigma(s)$与$\phi_\sigma^0(s)$的对应关系：

$$
\left.\begin{aligned}
&\phi_\sigma(s)=\frac{1}{1-H(s)}\cdot\phi_\sigma^0(s)\\
&H(s)=\frac{1}{L(s)}\sum_n{}'\exp[-n\delta_s]M_n(s) \qquad (n=\pm1,\pm2,\cdots)
\end{aligned}\right\} \tag{2.3}
$$

非Fuchs型方程的基本特点在于$n_i\gtrless0$并存，结果在(2.3)中幂次n_i和为零时构成“收缩”，幂次n_i收缩可以引起高阶极点．一般项$\sum\limits_{n_1}{}'\sum\limits_{n_2}{}'\cdots\sum\limits_{n_\lambda}{}'$中$n_{(\lambda)}=\sum\limits_{i=1}^{\lambda}n_i$，须按下列三种情况分析：

1° 无收缩部$\phi_\sigma^*(s)$——各项所有 n_i 都不参与收缩。

$$\phi_\sigma^*(s)=\left\{\frac{1}{1-H(s)}\cdot\phi_\sigma^0(s)\right\}^*$$

2° 全收缩部 $\phi_\sigma^{**}(s)$——各项所有 n_i 都参与收缩。

$$\phi_\sigma^{**}(s)=\left\{\frac{1}{1-H(s)}\cdot\phi_\sigma^0(s)\right\}^{**}$$

3° 半收缩部 $\phi_\sigma^{***}(s)$——各项中部分 n_i 参与收缩，但部分 n_i 不参与收缩

$$\phi_\sigma^{***}(s)=\left\{\frac{1}{1-H(s)}\cdot\phi_\sigma^0(s)\right\}^{***}$$

因此，得到

$$\phi_\sigma(s)=\phi_\sigma^*(s)+\phi_\sigma^{**}(s)+\phi_\sigma^{***}(s) \tag{2.4}$$

进一步考虑左、右半平面的解析延拓

$$\phi_\sigma^\pm(s)=\phi_\sigma^{*\pm}(s)+\phi_\sigma^{**\pm}(s)+\phi_\sigma^{***\pm}(s) \tag{2.5}$$

其中 $\phi_\sigma^{*+}(s)$，$\phi_\sigma^{**+}(s)$ 和 $\phi_\sigma^{***+}(s)$ 在 $\mathrm{Re}\, s>u_1$ 正则，而 $\phi_\sigma^{*-}(s)$，$\phi_\sigma^{**-}(s)$，$\phi_\sigma^{***-}(s)$ 在 $\mathrm{Re}s<u_2$ 正则。

从$|s|\to\infty$的行为，Liouville 定理给定

$$\left.\begin{aligned}
\phi_\sigma^{*\pm}(s)&=\left\{\frac{1}{1-H(s)}\cdot\phi_\sigma^0(s)\right\}^{*\pm}\\
\phi_\sigma^{**\pm}(s)&=\left\{\frac{1}{1-H(s)}\cdot\phi_\sigma^0(s)\right\}^{**\pm}\\
\phi_\sigma^{***\pm}(s)&=\left\{\frac{1}{1-H(s)}\cdot\phi_\sigma^0(s)\right\}^{***\pm}
\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

以下在引理 1，2，3 中将根据留数定理和树图法分别求出原函数 $\varphi_\sigma^{*\pm}(\zeta)$，$\varphi_\sigma^{**\pm}(\zeta)$ 和 $\varphi_\sigma^{***\pm}(\zeta)$，最后证明表现定理

$$\varphi_\sigma(\zeta)=\varphi_\sigma^*(\zeta)+\varphi_\sigma^{**}(\zeta)+\varphi_\sigma^{***}(\zeta)=\mathscr{D}_\sigma(\zeta)\varphi_\sigma^0(\zeta) \tag{2.7}$$

其中 $\mathscr{D}_\sigma(\zeta)$ 是由方程系数显示表述的收敛树级数。

三、无 收 缩 部

3.1 引理 1

引理 1 非 Fuchs 型方程 $\mathscr{L}\varphi=0$ 的基本解系的无收缩部$\varphi_\sigma^*(\zeta)$与其退化方程 $L\varphi^0=0$ 基本解系$\varphi_\sigma^0(\zeta)$之间存在对应关系

$$\begin{aligned}
\varphi_\sigma^*(\zeta)&=\mathscr{D}_\sigma^*(\zeta)\varphi_\sigma^0(\zeta)\\
&=\{1+\sum_m{}' A_{\sigma,m}\exp[m\zeta]\}\exp[\beta_\sigma\zeta] \qquad (m=\pm1,\pm2,\cdots)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

对应函数 $\mathscr{D}_\sigma^*(\zeta)$ 是个 Fourier 级数，它在平行带域K_ζ $(\xi_1<\mathrm{Re}\,\zeta<\xi_2)$内解析，系数$A_{\sigma,m}$ 是方程参数集(α,β,γ)的常项级数

$$A_{\sigma,m}=\frac{1}{L(\beta_\sigma+m)}\left\{M_m(\beta_\sigma)+{}^*\left(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\right)_m\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)}{L(\beta_\sigma+n_1)}+\cdots\right.$$

$$+{}^*(\sum_{n_1}'\sum_{n_2}'\cdots\sum_{n_\lambda}')_m\prod_{k=1}^{\lambda}\frac{M_{n_k}(\beta_\sigma+n_{(k-1)})}{L(\beta_\sigma+n_{(k)})}L(\beta_\sigma+n_{(\lambda)})+\cdots\Bigg\}$$

$A_{\sigma,0}=1$，即自动归一. $n_0=0$，$n_{(k)}=\sum_1^k n_i$.

3.2 一般表式

应用双边 Laplace 变换来解变系数微分积分方程

展开式的无收缩部$\phi_\sigma^*(s)$按极点序列$\{\beta_\sigma,\beta_\sigma+N\}\{\beta_\sigma-N\}$ $(N=1,2,\cdots)$分为$\phi_\sigma^{*+}(s)$和$\phi_\sigma^{*-}(s)$两部分

$$\phi_\sigma^*(s)=\phi_\sigma^{*+}(s)+\phi_\sigma^{*-}(s) \tag{3.2}$$

$$\phi_\sigma^{*-}(s)=\frac{1}{s-\beta_\sigma}+\frac{1}{L(s)}\Bigg\{{}^*(\sum_{n_1}')_+\frac{M_n(s-n_1)}{s-\beta_\sigma-n_1}$$

$$+{}^*(\sum_{n_1}'\sum_{n_2}')_+\frac{M_{n_1}(s-n_1)}{L(s-n_1)}\frac{M_{n_2}(s-n_{(2)})}{s-\beta_\sigma-n_{(2)}}+{}^*(\sum_{n_1}'\sum_{n_2}'\cdots\sum_{n_\lambda}')_+$$

$$+\prod_{k=1}^{\lambda}\frac{M_{n_k}(s-n_{(k)})}{L(s-n_{(k)})}\frac{L(s-n_{(\lambda)})}{s-\beta_\sigma-n_{(\lambda)}}+\cdots\Bigg\}$$

$$\phi_\sigma^{*+}(s)=\frac{-1}{L(s)}\Bigg\{{}^*(\sum_{n_1}')_-\frac{M_n(s-n_1)}{s-\beta_\sigma-n_1}$$

$$+{}^*(\sum_{n_1}'\sum_{n_2}')_-\frac{M_{n_1}(s-n_1)}{L(s-n_1)}\frac{M_{n_2}(s-n_{(2)})}{s-\beta_\sigma-n_{(2)}}+\cdots$$

$$+{}^*(\sum_{n_1}'\sum_{n_2}'\cdots\sum_{n_\lambda}')_-\prod_{k=1}^{\lambda}\frac{M_{n_k}(s-n_{(k)})}{L(s-n_{(k)})}\frac{L(s-n_{(\lambda)})}{s-\beta_\sigma-n_{(\lambda)}}+\cdots\Bigg\}$$

其中$\phi_\sigma^{*-}(s)$在$\mathrm{Re}\,s<u_2$正则，而$\phi_\sigma^{*+}(s)$在$\mathrm{Re}\,s>u_1$正则，常数u_1,u_2分别为（设$\mathrm{Re}\,\beta_\sigma>0$）

$u_1=\mathrm{Re}\,\beta_\sigma-1+\epsilon<0$，$u_2=\mathrm{Re}\,\beta_\sigma-\epsilon>0$　（ϵ 任意小正数）

因原点沿实轴移动不影响极点序列的周期性分布，故可设$0<\mathrm{Re}\,\beta_\sigma<1$. 已知映象

$$\phi_\sigma(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\sigma(\zeta)\exp[-s\zeta]d\zeta \tag{3.3}$$

在$u_1<\mathrm{Re}\,s<u_2$内正则，函数

$$\varphi_\sigma(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}\phi_\sigma(s)\exp[s\zeta]ds \tag{3.4}$$

在$\xi_1<\mathrm{Re}\,\zeta<\xi_2$内正则，则$\varphi_\sigma(\zeta)$和$\phi_\sigma(s)$互为积分方程(3.3)和(3.4)的解.

将　$\varphi_\sigma^*(\zeta)=\varphi_\sigma^{*+}(\zeta)+\varphi_\sigma^{*-}(\zeta)$　(3.5)

$$\varphi_\sigma^{*+}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\phi_\sigma^{*+}(s)\exp[-s\zeta]ds$$

$$\varphi_\sigma^{*-}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{d-i\infty}^{d+i\infty}\phi_\sigma^{*-}(s)\exp[-s\zeta]ds$$

$(u_1<c<s<d<u_2)$代入$\phi_\sigma^*(s)$表式的右端，得到

$$\int_0^{\infty} d\zeta \exp[-s\zeta]\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds' \exp[s'\zeta]\phi_\sigma^{*+}(s)$$

$$+\int_{-\infty}^{0} d\zeta \exp[-s\zeta]\frac{1}{2\pi i}\int_{d-i\infty}^{d+i\infty} ds' \exp[s'\zeta]\phi_\sigma^{*-}(s)$$

$$=\frac{-1}{2\pi i}\int_{c+i\infty}^{c-i\infty}\frac{ds'}{s-s'}\phi_\sigma^{*+}(s')+\frac{1}{2\pi i}\int_{d-i\infty}^{d+i\infty}\frac{ds'}{s-s'}\phi_\sigma^{*-}(s')$$

$$=\phi_\sigma^{*+}(s)+\phi_\sigma^{*-}(s)=\phi_\sigma^{*}(s)$$

最后第二式是根据 Cauchy 定理而得.

为求留数，选取 $\phi_\sigma^{*+}(s)$的积分回道(Γ_N^+, C_N^+)（见图1a），Γ_N^+ 是线段 $(c-iN,\ c+iN)$，C_N^+ 是在 $\mathrm{Re}\, s>u_1$ 半平面上半圆，它以原点为圆心，R_N 为半径.

同理，选 $\phi_\sigma^{*-}(s)$ 的积分回道为(Γ_N^-, C_N^-)，其中 Γ_N^- 是线段 $(d-iN,\ d+iN)$，C_N^- 是 $\mathrm{Re}\, s<u_2$ 半平面上的半圆，以原点为中心，R_N 为半径，取R_N 足够大，使极点序列$\{\beta_\sigma,\ \beta_\sigma+N\}$全部位于$C_N^+$内，而极点序列$\{\beta_\sigma-N\}$全部位于$C_N^-$内．按惯例，取逆时钟方向为正．

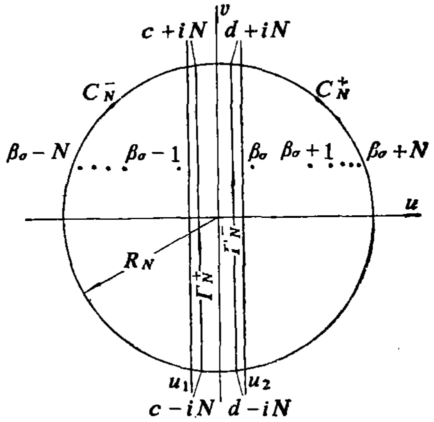

图1a 积分回道

由于$\phi_\sigma^{*\pm}(s)$式中第$(\lambda+1)$项的估值为

$$O(s^{-\lambda(l-m-1)})$$

按规定 $l-m\geqslant 0$，因此在$-\frac{\pi}{2}<\arg s<\frac{\pi}{2}$内

$$\lim_{N\to\infty}\int_{C_N^+}\exp[s\zeta]\phi_\sigma^{*\pm}(s)ds$$

一致趋于零，而在$\pi/2<\arg s<3\pi/2$内

$$\lim_{N\to\infty}\int_{C_N^-}\exp[s\zeta]\phi_\sigma^{*\pm}(s)ds$$

一致趋于零，故 Jordan 引理成立.

当$N\to\infty$时，$\phi_\sigma^{*+}(s)$在积分回道$(\Gamma_\infty^+,\ C_\infty^-)$内无穷极点序列$\{\beta_\sigma-N\}$ $(N=1,2,\cdots)$的留数记作 $\mathrm{Re}\, s\{\beta_\sigma-N\}$．同理，$\phi_\sigma^{*-}(s)$在积分回道$(\Gamma_\infty^-,\ C_\infty^+)$中无穷极点序列$\{\beta_\sigma,\ \beta_\sigma+N\}$的留数记作 $\mathrm{Re}\, s\{\beta_\sigma,\ \beta_\sigma+N\}$.故

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_\sigma^{*-}(\zeta)&=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\left\{\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}+\int_{C_\infty^-}\right\}\phi_\sigma^{*+}(s)\exp[s\zeta]ds=\mathrm{Re}\, s\{\beta_\sigma-N\} & (\xi>\xi_1)\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i}\left\{\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}+\int_{C_\infty^+}\right\}\phi_\sigma^{*+}(s)\exp[s\zeta]ds=0 & (\xi<\xi_1)\end{cases}\\
\varphi_\sigma^{*-}(\zeta)&=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\left\{\displaystyle\int_{d-i\infty}^{d+i\infty}+\int_{C_\infty^-}\right\}\phi_\sigma^{*-}(s)\exp[s\zeta]ds=0 & (\xi>\xi_2)\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i}\left\{\displaystyle\int_{d-i\infty}^{d+i\infty}+\int_{C_\infty^+}\right\}\phi_\sigma^{*-}(s)\exp[s\zeta]ds=\mathrm{Re}\, s\{\beta_\sigma,\ \beta_\sigma+N\} & (\xi<\xi_2)\end{cases}
\end{aligned}\right\}\quad(3.6)$$

从而得到$\varphi_\sigma^*(\zeta)$在K_ζ ($\xi_1<\mathrm{Re}\,\zeta<\xi_2$)域内的表示

$$\varphi_\sigma^*(\zeta)=\varphi_\sigma^{*-}(\zeta)+\varphi_\sigma^{*+}(\zeta) \tag{3.7}$$

$$\varphi_\sigma^{*-}(\zeta)=\exp[\beta_\sigma\zeta]\Big\{1+(\sum_{n_1}{}')_+\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)}{L(\beta_\sigma+n_1)}\exp[n_1\zeta]$$

$$+{}^*(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}')_+\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)}{L(\beta_\sigma+n_1)L(\beta_\sigma+n_{(2)})}\exp[n_{(2)}\zeta]$$

$$+\cdots+{}^*(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}')_+\prod_{k=1}^{\lambda}\frac{M_{n_k}(\beta_\sigma+n_{(k-1)})}{(\beta_\sigma+n_{(k)})}\exp[n_{(\lambda)}\zeta]+\cdots\Big\}$$

$$\varphi_\sigma^{*+}(\zeta)=\exp[\beta_\sigma\zeta]\Big\{{}^*(\sum_{n_1}{}')_-\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)}{L(\beta_\sigma+n_1)}\exp[n_1\zeta]$$

$$+{}^*(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}')_-\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)\exp[n_{(2)}\zeta]}{L(\beta_\sigma+n_1)L(\beta_\sigma+n_{(2)})}$$

$$+\cdots+{}^*(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}')_-\prod_{k=1}^{\lambda}\frac{M_{n_k}(\beta_\sigma+n_{(k-1)})}{L(\beta_\sigma+n_{(k)})}\exp[n_{(\lambda)}\zeta]+\cdots\Big\}$$

式中记号${}^*(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}')_\pm$分别表$n_{(\lambda)}\gtrless0$. 重新合并同幂次项，令$n_{(\lambda)}=m$ ($m=1,2,\cdots$)，得到Fourier展开

$$\varphi_\sigma^*(\zeta)=\exp[\beta_\sigma\zeta]\Big\{1+\sum_{m=1}^{\infty}(A_{\sigma,m}\exp[m\zeta]+A_{\sigma,-m}\exp[-m\zeta])\Big\} \tag{3.8}$$

Fourier 系数$A_{\sigma,m}$ ($m=\pm1,\pm2,\cdots$)为

$$A_{\sigma,m}=\frac{1}{L(\beta_\sigma+m)}\Big\{M_n(\beta_\sigma)+(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}')_m\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)}{L(\beta_\sigma+n_1)}$$

$$+\cdots+{}^*(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}')_m\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)\cdots M_{n_\lambda}(\beta_\sigma+n_{(\lambda-1)})}{L(\beta_\sigma+n_1)L(\beta_\sigma+n_{(2)})\cdots L(\beta_\sigma+n_{(\lambda-1)})}+\cdots\Big\}$$

3.3 收敛性证明

根据假定，原方程的系数函数$p_\mu(z)$ ($\mu=0,1,\cdots,l$)在公共环域K_z ($\rho_1<|z|<\rho_2$)内解析. 不失去一般性，取$\rho_2>1$，$\rho_1=1/\rho_2<1$. 因此，$p_\mu(\zeta)$在平行带域$K_\zeta(\xi_1<\mathrm{Re}\,\zeta<\xi_2)$内解析，$\xi_2=\ln\rho_2>0$，$\xi_1=\ln\rho_1=-\xi_2<0$.

由于K_ζ包含ζ的实轴 ($\zeta=\xi+i\eta$)，按积分变换的基本定理，当ζ由实轴向复域延拓时，可证无收缩部$\varphi_\sigma^*(\zeta)$在K_ζ域内解析. 见图1b.

显然，原方程的系数

$$\left.\begin{aligned}&p_\mu(z)=p_\mu^+(z)+p_\mu^-(z)\\&p_\mu^-(z)=\sum_{0}^{\infty}p_{\mu n}z^n,\qquad p_\mu^+(z)=\sum_{+1}^{\infty}p_{\mu,-n}z^{-n}\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

$p_\mu^-(z)$在圆$|z|<\rho_2$内解析，$p_\mu^+(z)$在圆$|z|>\rho_1$外解析. 设$p_\mu^-(z)$在圆$|z|=\rho$上最大模为

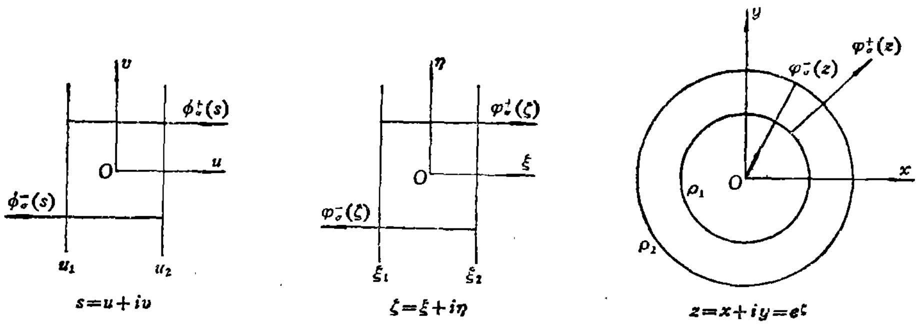

图1b　$\phi_\sigma^\pm(s)$，$\varphi_\sigma^\pm(\zeta)$，$\varphi_\sigma^\pm(z)$的解析域

$\mathfrak{M}_\mu(\rho)$．取$\rho=\rho_2-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$，ρ在环域K_z内可以无限接近外径ρ_2．

令

$$\max_{(\mu=0,1,\cdots,l)} \mathfrak{M}_\mu(\rho)=\mathfrak{M}(\rho) \tag{3.10}$$

$$\max_{(\mu=0,1,\cdots,l)} |\alpha_{\mu n}|=\alpha_n \tag{3.11}$$

从积分式

$$\alpha_{\mu m}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho}\frac{dz}{z^{n+1}}p_\mu^-(z) \tag{3.12}$$

得Cauchy不等式

$$|\alpha_n|\leqslant\frac{\mathfrak{M}(\rho)}{\rho^n} \tag{3.13}$$

对于确定的β_σ，结构参数只与L，M的结构有关

$$q_\sigma=\sum_n{}'\frac{M_n(\beta_\sigma+n)}{L(\beta_\sigma+n)}$$

级数解的收敛条件是

$$|q_\sigma|<1 \tag{3.14}$$

此条件在相当广泛情况下是成立的．实际上，它相当于方程系数$\sum\limits_n\alpha_n z^n$在$K_z$内单位圆上的绝对收敛条件．由(3.8)式得到

$$|A_{\sigma,m}|\leqslant\left|\frac{M_n(\beta_\sigma)}{L(\beta_\sigma+n)}\right|[1-|q_\sigma|]^{-1} \tag{3.15}$$

故对于确定的β_σ，$A_{\sigma,m}$是个绝对收敛的常项级数．

为求$\sum\limits_m A_{\sigma,m}z^m$的外收敛半径，先考虑$\varphi_\sigma^{*-}(z)=\sum\limits_0^\infty A_{\sigma,m}z^{m+\beta_\sigma}$．利用系数$\alpha_n$的Cauchy不等式，注意，$A_{\sigma,m}$中各项均含公因子$\rho^{-m}$．例如，第$\lambda$项的估值

$$*(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}')_m(\cdots)\leqslant\frac{1}{\rho^m}\ \frac{\mathfrak{M}^\lambda(\rho)}{|L(\beta_\sigma+n)|}\ \sum_n{}'\left|\frac{M_n(\beta_\sigma+n)}{L(\beta_\sigma+n)}\right|^\lambda$$

因此有

$$|A_{\sigma,m}|\leqslant\frac{\mathfrak{M}(\rho)}{\rho^m}\ \frac{1}{|L(\beta_\sigma+n)|}\left\{1+\mathfrak{M}(\rho)|q_\sigma|+\mathfrak{M}^2(\rho)|q_\sigma|^2+\cdots\right\}$$

$$\leqslant \frac{\mathfrak{M}(\rho)}{\rho^m} \frac{1}{|L(\beta_\sigma+n)|} \frac{1}{1-\mathfrak{M}(\rho)|q_\sigma|} \tag{3.16}$$

最后一式要求$\mathfrak{M}(\rho)<|q_\sigma|^{-1}$.

根据 Cauchy-Hadamard 公式，得到$\varphi_\sigma^{*-}(z)$的收敛半径为

$$R=\lim_{m\to\infty}|A_{\sigma,m}|^{-\frac{1}{m}}=\rho \tag{3.17}$$

即$\varphi_\sigma^{*-}(z)$在$|z|<\rho_2$内解析.

完全同理，可证 $\varphi_\sigma^{*+}(z)=\sum\limits_1^\infty A_{\sigma,-m}z^{\beta_\sigma-m}$ 的收敛半径为

$$r=\lim_{m\to\infty}|A_{\sigma,-m}|^{1/m}=\frac{1}{\rho} \tag{3.18}$$

即$\varphi_\sigma^{*+}(z)$在$|z|>\rho_1$外解析. 综上得知，$\varphi_\sigma^*(z)$在环域$K_z(\rho_1<|z|<\rho_2)$内解析，也即$\varphi_\sigma^*(\zeta)$在平行带域$K_\zeta(\xi_1<\mathrm{Re}\,\zeta<\xi_2)$内解析. 故引理 1 得证.

四、全 部 收 缩

4.1 引理 2

引理 2 非正则积分的全收缩部$\varphi_\sigma^{**}(\zeta)$与其退化方程的基本解系$\varphi_\sigma^0(\zeta)$之间存在对应关系

$$\varphi_\sigma^{**}(\zeta)=\varPhi_\sigma^{**}(\zeta)\varphi_\sigma^0(\zeta)=\{B_{\sigma,0}+B_{\sigma,1}\zeta+B_{\sigma,2}\zeta^2+\cdots\}\exp[\beta_\sigma\zeta] \tag{4.1}$$

对应函数$\varPhi_\sigma^{**}(\zeta)$是$\zeta$的整函数，展开系数$B_{\sigma,k}$是方程参数$(\alpha,\beta,\gamma)$的树级数:

$$B_{\sigma,k}=\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\sum_{\lambda,\delta,m}\frac{1}{(p_\lambda+m-k)!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{(p_\lambda+m-k)}\{A_\lambda(\beta,\Omega)\varDelta_p^m(\beta)\} \qquad k\leqslant p$$

$$=\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\sum_{\lambda,\delta,m}\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^m\{A_\lambda(\beta|\Omega)\varDelta_\delta^{k+m-p_\lambda}(\beta)\}, \qquad k>p$$

(记号意义见后).

4.2 树图法

为证引理 2，先述求全收缩部的树图法. 考虑第λ项，对幂次$(n_1,n_2,\cdots,n_\lambda)$构成一切可能全收缩

$$**\Big(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}'\Big)\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{ds}{s-\beta_\sigma}\exp[s\zeta]\frac{M_{n_\lambda}(s)}{L(s)}\cdot\prod_{k=1}^{\lambda-1}\frac{M_{n_k}(s-n_k)}{L(s-n_{(k)})} \tag{4.2}$$

根据对应原理，只须考虑式中与因子$(s-\beta_\sigma)^{-1}$相应的高阶极点求留数，而不必考虑乘子$\left\{L(s)\prod\limits_{k=1}^{\lambda-1}L(s-n_{(k)})\right\}^{-1}$中其它“哑”极点的贡献. 计算留数和时，这一简化十分重要. 对于正则积分，通过直接计算，可以证明这些“哑”极点的贡献只使解式乘上一个无关紧要的常项级数，因此可以略而不计. 对于非正则积分，这种简化计算则通过验证最后结果来加以确立[4].

显然，对一已知收缩项求留数，并不存在原则性困难，问题在于求得级数解的整体结构。由于相邻两项之间的收缩并不存在完全确定的通常的递推关系，数学归纳法并不完全成立．因为第 λ 代收缩与第 $(\lambda+1)$ 代收缩之间不存在完全确定的递推关系，即后者第 $(\lambda+1)$ 代中一部份是前者第 λ 代收缩方式的延伸，作为序列可与前者直接归并，而另一部分则与前项的收缩截然不同，不能直接归纳，须将它作为树图的领先项，利用树图法进行间接归纳．

树图法的构造程序如下：

（1） 作出全收缩部逐代的一切项，从 $\lambda=2$ 起，按收缩项的本身结构，归纳成序列．序列可有多种，其后继项符合确定的数学归纳法可与领先项归併．以 $\lambda=2$ 为领先项的树图称为“主图”（见图 2 全收缩部树图）．

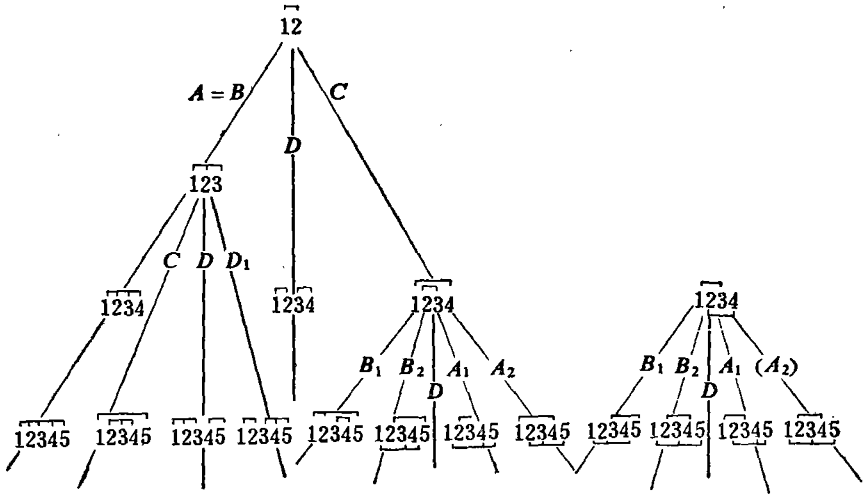

图 2　全收缩部树图

（2） 再作“分支图”，即对 $\lambda=N(N=3,4,\cdots)$ 各代的领先项（它不属于 $\lambda<N$ 代的序列）分别按确定的序列进行归纳．

（3） 将 $N=2$ 主图与所有 $N=3,4,\cdots,\lambda$ 代分支图相加得到包括 λ 代的总树图，这相当于 λ 代的树级数，其中包括第 1 代至第 λ 代项，并计及 $(\lambda+1)$，$(\lambda+2)$，$\cdots$各代中序列的后继项．

（4） 当 λ 甚大时，由于收缩方式不断增加，可构成新型序列，以保证 λ 代的领先项的总数为有限．

（5） 按照序列的构成，导出相应的求和公式，归纳求和公式得到树算符．

（6） 树算符对逐代领先项作用后，得到一般表式．

（7） 进一步证明当 $\lambda\to\infty$ 时所得级数的收敛性．

简言之，对逐代领先项应用树图归纳法，对各领先项所属的序列应用直接归纳法．两者的结合给出非正则积分收缩部的显示表述．同理，可求半收缩部．

图 2 表示全收缩部由第 2 代至第 5 代的树图．同理，可作 $\lambda>5$ 代的分支图，暂从略．为表述方便，引进若干记号和术语．

第 2 代领先项记作 $\langle\overset{\frown}{1\,2}\rangle$，表示 $n_1+n_2=0$ 之项：

$$\langle\overset{\frown}{1\,2}\rangle=\lim_{\beta\to\beta_0}\frac{\partial}{\partial\beta}\{\exp[\beta\zeta]A_2(\beta)\}\tag{4.3}$$

$$A_2(\beta)=\sum_{n_1}\sum_{n_2}\frac{M_{n_1}(\beta-n_1)M_{n_2}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta-n_1)}$$

$A_2(\beta)$ 称为第 2 代的领先因子．参与收缩的指标 n_1, n_2 上加一联线表明 $n_1+n_2=0$．同理，第 4 代的领先项为

$$\langle \overline{1\;2\;3}\;4\rangle=\lim_{\beta\to\beta_0}\frac{\partial}{\partial\beta}\{\exp[\beta\zeta]A_4(\beta)\} \tag{4.4}$$

$$A_4(\beta)=\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\frac{M_{n_1}(\beta-n_1)M_{n_2}(\beta-n_{(2)})M_{-n_1}(\beta+n_1)M_{-n_2}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta-n_1)L(\beta-n_{(2)})L(\beta-n_2)}$$

由图 2 可见各阶的领先项

第 2 代　$\langle\overline{1\;2}\rangle$

第 3 代　无（$\overline{1\;2}\;3$ 属于 $\overline{1\;2}$ 的 A 序列）

第 4 代　$\langle 1\;2\;3\;4\rangle$（$1\;2\;3\;4$, $1\;2\;3\;4$ 分别属于 $\overline{1\;2}$ 的 DC 序列）

第 5 代　无（各项均属于第 2, 3, 4 代的序列）

以此类推．图中采用以下序列算符 A, B, C, D, …

$$A\langle\overline{1\;2}\rangle=\langle\overline{1\;2}\rangle+\langle 1\;2\;3\rangle+\langle 1\;2\;3\;4\rangle+\cdots$$

$$B\langle 1\;2\;3\;4\rangle=\langle 1\;2\;3\;4\rangle+\langle 1\;2\;3\;4\;5\rangle+\langle 1\;2\;3\;4\;5\;6\rangle+\cdots$$

$$C\langle\overline{1\;2}\rangle=\langle\overline{1\;2}\rangle+\langle 1\;2\;3\;4\rangle+\langle 1\;2\;3\;4\;5\;6\rangle+\cdots$$

一般情况，第 λ 代领先项记作 $\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle$．当同一 λ 代中有 N 个领先项，另加下标 i 以示区别，即 $\langle\overset{\lambda_i}{\cdots}\rangle$ ($i=1,2,\cdots,N$; N 为有限)．以后将讨论当 λ 增大时，通过增加序列算符，总可使第 λ 代领先项的总数 N 的估值为有限．有时为简化符号，证明时略去下标 i，但当涉及树图的精细结构时，所有领先项必须逐一列举．

设领先项 $\langle\overset{\lambda_i}{\cdots}\rangle$ 具有 $(p_{\lambda_i}+1)$ 阶极点 $s=\beta_0$，其中 $p_{\lambda_i}\leqslant[\lambda/2]$，且领先项因子记作 $A_{\lambda_i}(\beta)$，即

$$\langle\overset{\lambda_i}{\cdots}\rangle=\lim_{\beta\to\beta_0}\frac{1}{p_{\lambda_i}!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{p_{\lambda_i}}\{\exp[\beta\zeta]A_{\lambda_i}(\beta)\} \tag{4.5}$$

为简明起见，有时采用序列的求和指标与序列算符相对应：

$$(a_i,\ b_i,\ c_i,\ d_i,\ \cdots)\to(n_i)$$

4.3 求和公式和树算符

（1） 简单序列的求和公式

A 序列

领先项中收缩与其后继项中逐代所增的 n_i 依次构成全收缩而组成的序列．

$$A\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle=\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle+\langle\overset{\lambda}{\cdots}\;a_1\rangle+\langle\overset{\lambda}{\cdots}\;a_1\;a_2\rangle+\cdots$$

$$=\lim_{\beta\to\beta_0}\frac{1}{p_\lambda!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{p_\lambda}\{\exp[\beta\zeta]A_\lambda(\beta|A)\} \tag{4.6}$$

其中序列因子$A_\lambda(\beta|A)$与领先因子$A_\lambda(\beta)$有关系

$$A_\lambda(\beta|A)=A_\lambda(\beta)\exp[-n_1\partial]\left[1-\sum_{n_i}\exp[-n_i\partial]\frac{M_{n_i}(\beta)}{L(\beta)}\right]^{-1}_{n_{(k)}}$$

$$=\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\frac{M_{n_1}(\beta-n_1)M_{n_2}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta-n_1)}+\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\sum_{n_3}{}'\frac{M_{n_1}(\beta-n_1)M_{n_2}(\beta-n_2)M_{n_3}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta-n_1)L(\beta-n_{(2)})}$$

$$+\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\sum_{n_3}{}'\sum_{n_4}{}'\prod_{k=1}^{3}\frac{M_{n_k}(\beta-n_{(k)})}{L(\beta-n_{(k)})}\frac{M_{n_4}(\beta)}{L'(\beta)}+\cdots$$

简化记号理解为按二项式展开，且各项的所有指标n_k都参加同一收缩$\sum n_k=0$

当领先项由几个子收缩构成，则序列算符A与子收缩逐一构成子序列，分别记为A_1，$A_2\cdots$。

例：对于$\langle 1\ 2\ 3\ 4\rangle$，有

$$A_1\langle 1\ 2\ 3\ 4\rangle=\langle 1\ 2\ 3\ 4\rangle+\langle 1\ 2\ 3\ 4\ 5\rangle+\langle 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\rangle+\cdots$$

$$=\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{A_4(\beta|A_1)\exp[\beta\zeta]\right\}$$

$$A_2\langle 1\ 2\ 3\ 4\rangle=\langle 1\ 2\ 3\ 4\rangle+\langle 1\ 2\ 3\ 4\ 5\rangle+\langle 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\rangle+\cdots$$

$$=\frac{\partial}{\partial\beta}\{A_4(\beta|A_2)\exp[\beta\zeta]\}$$

$$A_4(\beta|A_1)=A_4(\beta)[1+\sum_a M_a(\beta)\exp[-(n_1+n_3)\partial]_{n_3,-n_2}$$

$$\cdot\left[1-\sum\exp[-a_1\partial]\frac{M_{a_1}(\beta)}{L(\beta)}\right]^{-1}_0$$

$$A_4(\beta|A_2)=A_4(\beta)\left[1+\sum_a M_a(\beta)\exp[-(n_2+n_4)\partial]\frac{1}{L(\beta)}\right]_{n_4}$$

$$\cdot\left[1-\sum\exp[-a_1\partial]\frac{M_{a_1}(\beta)}{L(\beta)}\right]^{-1}_0$$

$A_4(\beta|A_1)$中$[\quad]_{n_3,-n_2}$表示位移算符也对左边$M_{n_3}M_{-n_2}$作用，$[\quad]^{-1}_0$表示二项式展开中逐项取$n_1+n_3+\sum a_i=0$。$A_4(\beta|A_2)$中记号同此。

B序列

领先项的收缩形式保持不变，但逐代后移，前边所增之n_i依次构成收缩，即与A序列反向。

$$B\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle=\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle+\langle b_1\ \overset{\lambda}{\cdots}\rangle+\langle b_1\ \ b_2\ \ \overset{\lambda}{\cdots}\rangle+\cdots$$

$$=\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\frac{1}{p_\lambda!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{p_\lambda}\{\exp[\beta\zeta]A_\lambda(\beta|B)\}\tag{4.7}$$

例：显然$B\langle 1\ 2\rangle=A\langle 1\ 2\rangle$。对于$\langle 1\ 2\ 3\ 4\rangle$有

$$B_1\langle 1\ 2\ 3\ 4\rangle=\langle 1\ 2\ 3\ 4\rangle+\langle b_1\ 1\ 2\ 3\ 4\rangle+\langle b_1\ b_2\ 1\ 2\ 3\ 4\rangle+\cdots$$

$$=\lim_{\beta\to\beta_0}\frac{\partial}{\partial\beta}\{\Lambda_4(\beta|B_1)\exp[\beta\zeta]\}$$

$$B_2\langle 1\ 2\ 3\ 4\rangle=\langle 1\ 2\ 3\ 4\rangle+\langle b_1\ 1\ 2\ 3\ 4\rangle+\langle b_1\ b_2\ 1\ 2\ 3\ 4\rangle+\cdots$$

$$=\lim_{\beta\to\beta_0}\frac{\partial}{\partial\beta}\{\Lambda_4(\beta|B_2)\exp[\beta\zeta]\}$$

$$\Lambda_4(\beta|B_1)=\left[1-\Sigma\exp[-b_1\partial]\frac{M_{b_1}(\beta)}{L(\beta)}\right]^{-1}$$

$$\cdot\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\sum_{n_3}{}'\frac{M_{n_1}(\beta-n_1)M_{n_2}(\beta-n_{(2)})M_{n_3}(\beta-n_2)M_{-n_2}(\beta)}{L(\beta-n_1)L(\beta-n_{(2)})L(\beta-n_2)L'(\beta)}$$

$$(n_1+n_3+\Sigma b_i=0)$$

$$\Lambda_4(\beta|B_2)=\left[1-\Sigma\exp[-b_1\partial]\frac{M_{b_1}(\beta)}{L(\beta)}\right]^{-1}$$

$$\cdot\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\sum_{n_3}\frac{M_{n_1}(\beta-n_1)M_{n_2}(\beta-n_{(2)})M_{-n_1}(\beta-n_2)M_{n_4}(\beta)}{L(\beta-n_1)L(\beta-n_{(2)})L(\beta-n_2)L'(\beta)}$$

$$(n_2+n_4+\Sigma b_i=0)$$

C 序列

领先项的收缩保持不变，每增两代其前后两个 n 单独构成收缩.

$$C\langle\overset{\lambda}{\ldots}\rangle=\langle\overset{\lambda}{\ldots}\rangle+\langle c_1\ \overset{\lambda}{\ldots}\ c_2\rangle+\langle c_3\ c_1\ \overset{\lambda}{\ldots}\ c_2\ c_4\rangle+\cdots$$

$$=\lim_{\beta\to\beta_0}\frac{1}{p_\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{p_\lambda}\{\exp[\beta\zeta]\Lambda_\lambda(\beta|C)\}\tag{4.8}$$

$$\Lambda_\lambda(\beta|C)=\left[1-\sum_{c_1}{}'M_{-c_1}(\beta)\exp[-c_1\partial]\frac{M_{c_1}(\beta)}{L^2(\beta)}\right]\Lambda_\lambda(\beta)$$

例：

$$C\langle 1\ 2\rangle=\langle 1\ 2\rangle+\langle c_1\ 1\ 2\ c_2\rangle+\langle c_3\ c_1\ 1\ 2\ c_2\ c_4\rangle+\cdots$$

$$=\left[1-\Sigma M_{-c}(\beta)\exp[c\partial]\frac{M_c(\beta)}{L^2(\beta)}\right]^{-1}\Lambda_2(\beta)$$

$$=\left\{1+\sum_{c_1}{}'\frac{M_{-c_1}(\beta)M_{c_1}(\beta-c_1)}{L^2(\beta-c_1)}\right.$$

$$+\sum_{c_1}{}'\sum_{c_2}{}'\frac{M_{-c_1}(\beta)M_{c_1}(\beta-c_1)M_{-c_2}(\beta-c_1)M_{c_2}(\beta-c_{(2)})}{L^2(\beta-c_1)L^2(\beta-c_{(2)})}$$

$$\left.\cdot\exp[-c_2\partial]+\cdots\right\}\left(\sum_{n_1}\frac{M_{n_1}(\beta-n_1)M_{-n_1}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta-n_1)}\right)$$

D 序列

对一已知收缩的领先项，按代所增的相邻两个（或 δ 个）n_i 互相收缩，从而构成高阶极点的序列。当 $\delta=2$ 时，有二联收缩：

$$D\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle=\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle+\langle\overset{\lambda}{\cdots}\ \overbrace{d_1\ d_2}\rangle+\langle\overset{\lambda}{\cdots}\ \overbrace{d_1\ d_2}\ \overbrace{d_3\ d_4}\rangle+\cdots$$

$$=\exp[\beta_\sigma\zeta]\sum_k d_{\sigma k}\zeta^k \tag{4.9}$$

$$d_{\sigma k}=\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(p_\lambda-k+m)!}\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{p_\lambda+m-k}\{\Lambda_\lambda(\beta)\Delta_2^m(\beta)\}\qquad k\leqslant p_\lambda$$

$$=\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^m\{\Lambda_\lambda(\beta)\Delta_2^{k+m-p_\lambda}(\beta)\}\qquad k>p_\lambda$$

式中二联收缩因子$\Delta_2(\beta)$为

$$\Delta_2(\beta)=\overbrace{\sum_{n_1}\sum_{n_2}}\frac{M_{n_1}(\beta-n_1)M_{n_2}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta-n)} \tag{4.10}$$

对于多联收缩，$\overbrace{d_1\ d_2\ \cdots\ d_\delta}$用$\Delta_\delta(\beta)$代替$\Delta_2(\beta)$，即有$\delta$-联收缩因子$\Delta_\delta(\beta)$

$$\Delta_\delta(\beta)=\overbrace{\sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots\sum_{n_\delta}}\frac{M_{n_1}(\beta-n_1)M_{n_2}(\beta-n_{(2)})\cdots M_{n_\delta}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta-n_1)\cdots L(\beta-n_{(\delta-1)})} \tag{4.11}$$

现证明上式(p_λ简化作 p)

$$D\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle=\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\left\{\frac{1}{p!}\partial_\beta^p+\frac{1}{(p+1)!}\partial_\beta^{p+1}+\frac{1}{(p+2)!}\partial_\beta^{p+2}+\cdots\right\}\cdot\Lambda_\lambda(\beta)\exp[\beta\zeta]$$

$$=\frac{1}{p!}\exp[\beta_\sigma\zeta]\left\{\Lambda_\lambda^{(p)}(\beta_\sigma)+p\zeta\Lambda_\lambda^{(p-1)}(\beta_\sigma)+\frac{p(p-1)}{2!}\zeta^2\Lambda_\lambda^{(p-2)}(\beta_\sigma)+\cdots\right\}$$

$$+\frac{1}{(p+1)!}\exp[\beta_\sigma\zeta]\left\{(\Lambda_\lambda\Delta)^{p+1}+(p+1)\zeta(\Lambda_\lambda\Delta)^p\right.$$

$$\left.+\frac{(p+1)p}{2!}\zeta^2(\Lambda_\lambda\Delta)^{p-1}+\cdots\right\}+\frac{1}{(p+2)!}\exp[\beta_\sigma\zeta]$$

$$\cdot\left\{(\Lambda_\lambda\Delta^2)^{p+2}+(p+2)\zeta(\Lambda_\lambda\Delta)^{p+1}+\frac{(p+2)(p+1)}{2!}\zeta^2(\Lambda_\lambda\Delta^2)^p+\cdots\right\}+\cdots$$

$$=\exp[\beta_\sigma\zeta]\sum_{k=0}^{\infty}d_{\sigma k}\zeta^k$$

记号 $\Lambda_\lambda^{(p)}(\beta_\sigma)=\left[\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^p(\Lambda_\lambda(\beta))\right]_{\beta=\beta_\sigma}$

例 $D\langle\overbrace{1\ 2}\rangle=\exp[\beta_\sigma\zeta]\sum d_{\sigma k}^{(2)}\zeta^k$

$$d_{\sigma 0}^{(2)}=\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\left\{\partial_\beta+\frac{1}{2!}\partial_\beta^2\Delta+\frac{1}{3!}\partial_\beta^3\Delta^2+\cdots\right\}\cdot\Lambda_2(\beta)$$

$$d_{\sigma k}^{(2)}=\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\frac{1}{k!}\left\{1+\partial_\beta\Delta+\frac{1}{2!}\partial^2\Delta^2+\cdots\right\}\cdot\Lambda_2(\beta)\Delta^{k-1}(\beta)\qquad(k\geqslant 1)$$

$D\langle\overbrace{1\ \underbrace{2\ 3}}\ 4\rangle=\exp[\beta_\sigma\zeta]\sum d_{\sigma k}^{(4)}\zeta^k$

$$d_{\sigma 0}^{(4)}=\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\left\{\partial_\beta+\frac{1}{2}\partial_\beta^2\Delta+\frac{1}{3!}\partial_\beta^3\Delta^2+\cdots\right\}\cdot\Lambda_4(\beta)$$

$$d_{ok}^{(4)}=\lim_{\beta\to\beta_c}\frac{1}{k!}\left\{1+\partial_\beta\Delta+\frac{1}{2}\partial_\beta^2\Delta^2+\cdots\right\}\cdot A_4(\beta)\Delta^{k-1}(\beta)\qquad(k\geqslant1)$$

4.4 一般表式

当Ω作用于第λ代领先项$\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle$时，则得第$\lambda$代分支图的树级数

$$\left.\begin{aligned}\Omega_\lambda\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle&=\exp[\beta_o\zeta]\sum_{k=0}^{\infty}B_{ok}^{(\lambda)}\zeta^k\\ B_{ok}^{(\lambda)}&=\frac{1}{k!}\sum_{m,\delta}\frac{1}{(p_\lambda+m-k)!}\lim_{\beta\to\beta_o}\partial_\beta^{p_\lambda+m-k}\{A_\lambda(\beta|\Omega)\Delta_\delta^m(\beta)\},\qquad k\leqslant p_\lambda\\ &=\frac{1}{k!}\sum_{m,\delta}\frac{1}{m!}\lim_{\beta\to\beta_c}\partial_\beta^m\{A_\lambda(\beta|\Omega)\Delta_\delta^{m+k-p_\lambda}(\beta)\}\qquad k>p_\lambda\end{aligned}\right\}\tag{4.12}$$

式中$\Omega=ABC$只对系数有贡献

当λ甚大时，尚须计及其它新序列算符，这时，有

$$\Omega_\gamma^*=ABC\cdots XYZD=\Omega_\lambda D$$

将树算符Ω_λ作用于领先项$\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle$，对$\lambda$求和$\sum$则得全收缩部的树级数：

$$\varphi_o^{**}(\zeta)=\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{2}^{\lambda}\Omega_{\lambda'}\langle\overset{\lambda'}{\cdots}\rangle=\exp[\beta_o\zeta]\sum_{0}^{\infty}B_{ok}\zeta^k\tag{4.13}$$

$$B_{ok}=\lim_{\beta\to\beta_o}\sum_{\lambda=2}^{\infty}\sum_{\delta=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(p_\lambda+m-k)!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{p_\lambda+m-k}\{A_\lambda(\beta|\Omega)\Delta_\delta^m(\beta)\}\qquad k\leqslant p_\lambda$$

$$=\lim_{\beta\to\beta_o}\sum_{\lambda=2}^{\infty}\sum_{\delta=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^m\{A_\lambda(\beta|\Omega)\Delta_\delta^{m+k}(\beta)\}\qquad k>p_\lambda$$

4.5 收敛性证明

为了证明上述级数的收敛性，关键是将β向整个复域作解析延拓。显然，(4.13)式右端每一项可视为β的复变函数。这样，根据 Goursat 定理：有一复变函数$F(\beta)$在域G解析，则$F(\beta)$的m阶导数为

$$\lim_{\beta\to\beta_o}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^m F(\beta)=\frac{m!}{2\pi i}\int_{\Gamma_o}\frac{F(\beta)d\beta}{(\beta-\beta_o)^{m+1}}\tag{4.14}$$

Γ_o是G域内一条简单光滑曲线，包围极点$\beta=\beta_o$。

因此系数B_{ok}可表为积分形式

$$B_{ok}=\frac{1}{k!}\sum_{m,\delta}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_o}A_\lambda(\beta|\Omega)\Delta_\delta^{k+m-p_\lambda}(\beta)\frac{d\beta}{(\beta-\beta_o)^{m+1}}$$

$$=\sum_{\delta}\frac{1}{k!}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_o}A_\lambda(\beta|\Omega)\Delta_\delta^{k-p_\lambda}(\beta)\left\{1+\frac{\Delta_\delta(\beta)}{\beta-\beta_o}+\left(\frac{\Delta_\delta(\beta)}{\beta-\beta_o}\right)^2+\cdots\right\}\frac{d\beta}{\beta-\beta_o}\tag{4.15}$$

当$|q_\sigma|<1$时，从$\Delta_\delta(\beta)$表式知

$$\left|\frac{\Delta_\delta(\beta)}{\beta-\beta_\sigma}\right|\leqslant|q_\sigma|^\delta<1$$

故

$$\left|B_{\sigma k}^{(\lambda)}\right|\leqslant\sum\frac{1}{k!}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\sigma}\frac{d\beta}{\beta-\beta_\sigma}\psi(\beta)\right|$$

$$\psi(\beta)=A_\lambda(\beta|\Omega)\Delta_\delta^{k-p_\lambda}(\beta)\left[1-\frac{\Delta_\delta}{\beta-\beta_\sigma}\right]^{-1}$$

取Γ_σ为圆，以$\beta=\beta_\sigma$为圆心，以R为半径，当$\beta_\sigma^0\in\Gamma_\sigma$时，则有

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\sigma}\psi(\beta)\frac{d\beta}{\beta-\beta_\sigma}\right|\leqslant|\psi(\beta_\sigma^0)|$$

因此

$$\left|B_{\sigma k}^{(\lambda)}\right|\leqslant\sum_\delta\frac{1}{k!}A_\lambda(\beta_\sigma^0|\Omega)\Delta_\delta^{k-p_\lambda}(\beta_\sigma^0)[1-|q_\sigma|^\delta]^{-1} \tag{4.16}$$

进一步求和$\sum\limits_\delta$：

$$\sum_{\delta=2}^{\infty}\frac{\Delta_\delta(\beta)}{1-|q_\sigma|^\delta}\leqslant|\Delta_2(\beta_\sigma)|^{k-p_\lambda}/[1-|q_\sigma|^2][1-|q_\sigma|^{k-p_\lambda-1}] \tag{4.17}$$

再求$A_\lambda(\beta|\Omega)$的估值．考虑第λ代树算符Ω_λ．由于

$$|A\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle|\leqslant\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle\{1+|q_\sigma|+|q_\sigma|^2+\cdots\}$$

$$\leqslant\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle/\{1-|q_\sigma|\}$$

故

$$|A|\leqslant\frac{1}{1-|q_\sigma|} \tag{4.17a}$$

与A同理、每隔一代参与收缩的算符B

$$|B|\leqslant\frac{1}{1-|q_\sigma|} \tag{4.17b}$$

每隔两代收缩的算符有C

$$|C|\leqslant\frac{1}{1-|q_\sigma|^2} \tag{4.17c}$$

显见，树算符为

$$|\Omega_\lambda|\leqslant1/[1-|q_\sigma|]^{a_\lambda}[1-|q_\sigma|^2]^{c_\lambda} \tag{4.18}$$

整数a_λ，c_λ分别表Ω_λ中算符（如A，C，…）的个数．由此得

$$|A_\lambda(\beta|\Omega)|=|\Omega_\lambda A_\lambda(\beta)|\leqslant|\Omega_\lambda|\cdot|A_\lambda(\beta)| \tag{4.19}$$

进一步对λ求和，$\sum\limits_\lambda$实际上包括对λ，对$\lambda_{(i)}$同代的项数和对p_λ极点阶数求和：$\sum\limits_{\lambda(i,p)}=\sum\limits_\lambda\sum\limits_{\lambda(i)}\sum\limits_{p_\lambda}$第$\lambda$代极点阶数$p_\lambda=1$，…，$[\lambda/2]$．故有

$$\sum_{p_\lambda=1}^{[\lambda/2]}\frac{|\Delta_2(\beta_\sigma)^{k-p_\lambda}}{1-|q_\sigma|^2}[1-|q_\sigma|^{k-p_\lambda-1}]^{-1}$$

$$\leqslant\frac{|\Delta_2|^k}{|q_\sigma|^{k+1}}\left|\frac{\Delta_2}{q_\sigma}\right|^{-[\lambda/2]}\left\{1+\left|\frac{\Delta}{q_\sigma}\right|+\cdots+\left|\frac{\Delta}{q_\sigma}\right|^{[\lambda/2]}\right\}^{-1}$$

$$\leqslant\left|\frac{\Delta_2}{q_\sigma}\right|^{k-[\lambda/2]}\frac{1}{|q_\sigma|}\left[1-\left|\frac{\Delta_2}{q_\sigma}\right|\right]^{-1}\qquad\left(k>\left[\frac{\lambda}{2}\right]\right)\tag{4.20}$$

现在来估算$N(\lambda)$，设$N(\lambda)$表λ代领先项的个数，因

$$\sum_\lambda\sum_i|\Lambda_{\lambda_{(i)}}(\beta|\Omega)\leqslant|N(2)\Omega_2\Lambda_2(\beta)|$$
$$+|N(3)\Omega_3\Lambda_3(\beta)|+\cdots+|N(\lambda)\Omega_\lambda\Lambda_\lambda(\beta)|+\cdots\tag{4.21}$$

由树图2知

$$N(2)=1$$
$$|\Omega_2|\leqslant1/(1-|q_\sigma|)(1-|q_\sigma|^2)$$

故

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\lambda'=2}^{\lambda}\sum_i\Lambda_{\lambda'_{(i)}}(\beta_\sigma|\Omega)\leqslant|\Lambda_2(\beta_\sigma)|\cdot\{N(2)|\Omega_2|$$
$$+N(3)|\Omega_3|\cdot|q_\sigma|+\cdots+N(\lambda)|\Omega_\lambda||q_\sigma|^{\lambda-2}+\cdots\}\tag{4.22}$$

显然

$$a_{\lambda+1}\geqslant a_\lambda$$

即

$$|\Omega_\lambda|\geqslant|\Omega_{\lambda+1}|$$

当满足下列条件时，级数$\sum\limits_\lambda\sum\limits_i|\Lambda_{\lambda_{(i)}}|$收敛．

$$\frac{N(\lambda)|\Omega_\lambda|}{N(\lambda+1)|\Omega_{\lambda+1}|}\geqslant|q_\sigma|\tag{4.23}$$

当λ增大时，增加新序列算符，使$N(\lambda)$为有限

$$N(\lambda)<\frac{1}{|\Omega_\lambda||q_\sigma|^\lambda}\tag{4.24}$$

这与绝对收敛条件(4.23)不矛盾．故表式(4.22)对λ收敛，且与k无关，因此得到$B_{\sigma k}$的估值：

$$|B_{\sigma k}|\leqslant\frac{1}{k!}\left|\frac{\Delta_2(\beta_\sigma^0)}{q_\sigma}\right|^k|\Lambda_2(\beta_\sigma^0)|f(q_\sigma)\tag{4.25}$$

$$\frac{1}{f(q_\sigma)}=\left|\frac{\Delta_2}{q_\sigma}\right|^{+[\lambda/2]}|q_\sigma|\left[1-\left|\frac{\Delta_2}{q_\sigma}\right|\right](1-|q_\sigma|^2)(1-|q_\sigma|)^3$$

由此得知上述树级数的收敛半径R为

$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}|B_{\sigma k}|^{\frac{1}{k}}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{|\Delta_2(\beta_\sigma^0)|}{|q_\sigma|}\left\{\frac{1}{k!}|\Lambda_2(\beta_\sigma^0)|f(q_\sigma)\right\}^{\frac{1}{k}}=0\tag{4.26}$$

因此，当$|q_\sigma|<1$时，树级数是ζ的整函数，它在平行带域K_ζ内解析．故引理2得证．

参 考 文 献

[1] Poincaré, H., *Acta Math.*, 10(1887), 310—312; or *Oeuvres*, 1(1928), 333—335.

[2] Hill, G. W., *Am. J. Math.*, 1(1878); *Acta Math.*, 8(1886), 1—36.

[3] Dong Ming-de, *Acta Astronomica Sinica*. 21, 1(1980).

[4] Dong Ming-de, *Poincaré*'s Problem of Irregular Integrals, Lecture Notes (unpublished).

New Theory for Equations of Non-Fuchsian Type Representation Theorem of Tree Series Solution (Ⅰ)

Dong Ming-de

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In the analytic theory of differential equations the exact explicit analytic solution has not been obtained for equations of non-Fuchsian type (Poincaré's problem). The new theory proposed in this paper affords the first time a general method of finding exact analytic expression for irregular integrals.

By discarding the assumption of formal solution of classical theory, our method consists in deriving a correspondence relation from the equation itself and providing the analytic structure of irregular integrals naturally by residue theorem. Irregular integrals are made up of three parts: non-contracted part, represented by ordinary recursion series, all-and semicontracted part—by the so-called tree series. Tree series solutions belong to analytic function of new kind with recursion series as the special case only.