

空化问题中的相变现象与接近 平衡的速率

蔡树棠 吴敦楷

(中国科学技术大学近代力学系) (杭州商学院物理教研室)

(1984年1月17日收到)

摘 要

前文^[9]我们已经说明用单个空泡的急剧膨胀和收缩来说明空化现象是不合适的. 原因是空化现象中的实际气泡的变动与急剧膨胀和收缩的变化情形差距很大, 而和平衡状态比较接近. 本文紧接着前文^[9]给出了气泡趋于平衡的速率和弛豫时间, 并且给出空化现象中气泡可以作为平衡状态的判断准则.

一、前 言

一般讨论空化的理论都仅仅用到Rayleigh-Plesset方程^[1~4], 并且利用这个方程仅仅讨论了急剧膨胀和急剧收缩的情形. 前文^[9]我们已经指出, 通常讨论的情形和实际空化时候的情况差距颇大. 相反, 实际情况应该认为这些气泡是基本上接近平衡状态的, 前文并且给出了平衡状态和初生空穴的条件. 本文继续前文^[9]的观点, 利用Rayleigh-Plesset方程和分子运动论中相变率的关系式, 推导出这些气泡趋向于平衡的速率, 并且给出了趋于平衡的特征时间和气泡可以认为处于平衡状态的判据.

二、球对称单个气泡所满足的方程式

我们仍旧和以前一样, 认为实际存在的水为理想稀溶液. 它包含有三种组成成份, 即水、氧和氮. 其他物质认为可以略去不计. 同样气泡内的空气也认为是由这三种成份组成的, 即水蒸汽, 氧和氮, 其他成份也可以略去不计. 我们用拉丁字母来代表这三种成份, $i=1$ 表示水, $i=2$ 表示氧, $i=3$ 表示氮. 用希腊字母表示相, α 表示气相, β 表示液相. 我们用指标 e 表示平衡状态. 我们用 u_i^α , u_i^β 表示 α 相和 β 相 i 组份的偏克分子内能, s_i^β 表示 β 相 i 组份的偏克分子熵, P^α , P^β 各自代表气相和液相的压强, P_i^α 表示气相 i 组份的分压, ρ_i^α 为气相 i 组份的密度, μ_i^α 和 μ_i^β 各自代表气相和液相的化学势. σ 表示水的表面张力系数, η 表示水的粘性系数, 空气的粘性系数认为可以略去不计. a 表示空气泡的半径.

我们现在来讨论充满水的无限空间中的一个球对称气泡. 这时我们有Rayleigh-Plesset方程^[1~4]

$$P^a - P^b - \frac{3}{2} \rho^b \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \rho^b a \frac{d^2 a}{dt^2} - 4\eta \frac{da}{a} - \frac{2\sigma}{a} = 0 \quad (2.1)$$

另外还有质守恒关系式

$$\frac{d}{dt} \left(\rho_i^a \frac{4}{3} \pi a^3 \right) = \frac{dN_i^a}{dt} m_i^+ \quad (2.2)$$

式中 N_i^a 为气泡的空气中 i 组份的克分子数, m_i^+ 为 i 组份的克分子量。按照不可逆热力学的理论^[8]

$$\frac{dN_i^a}{dt} = 4\pi a^2 K_i (\mu_i^g - \mu_i^a) \quad (2.3)$$

式中 K_i 为已知的系数, 原则上应该从实验上确定。在没有实验数据时, 我们可以从分子运动论来推导它的近似表达式。

按照分子运动理论^[6], 我们知道在单位面积上从气体流向液体的气体分子数目为

$$\Gamma_i = \frac{1}{4} n_i \bar{V}_i = \frac{P_i^a}{\sqrt{2\pi m_i kT}} \quad (2.4)$$

式中 n_i 为单位体积中 i 组份气体分子的数目, \bar{V}_i 为气体 i 组份的热运动平均速率, m_i 为 i 组份分子的质量, k 为玻尔兹曼常数。所以在单位面积上气体流向液体的克分子数为

$$\frac{\Gamma_i}{N_0} = \frac{1}{4} \frac{n_i \bar{V}_i}{N_0} = \frac{P_i^a}{\sqrt{2\pi m_i kT} N_0} = \frac{P_i^a}{\sqrt{2\pi m_i^+ RT}} \quad (2.5)$$

式中 N_0 为阿佛加德罗数, R 为每克分子的气体常数, 在平衡状态时, 单位面积气体流向液体的克分子数为

$$\frac{\Gamma_{i,e}}{N_0} = \frac{P_{i,e}^a}{\sqrt{2\pi m_i^+ RT}} \quad (2.5)'$$

由于处在热力学平衡状态, 这时液体回到气体的克分子数, 也是

$$\frac{\Gamma_{i,e}}{N_0} = \frac{P_{i,e}^a}{\sqrt{2\pi m_i^+ RT}}$$

处在不平衡状态的时候, 我们假定

$$\mu_i^g = \mu_{i,e}^a \quad (2.6)$$

这样从液体回到气体的克分子数为

$$\frac{\Gamma_{i,e}}{N_0} = \frac{P_{i,e}^a}{\sqrt{2\pi m_i^+ RT}}$$

而气体流向液体的分子数为

$$\frac{\Gamma_i}{N_0} = \frac{P_i^a}{\sqrt{2\pi m_i^+ RT}}$$

相减, 我们得到流过单位面积气体净增加的克分子数为

$$\frac{1}{4\pi a^2} \frac{dN_i^a}{dt} = \frac{P_{i,e}^a - P_i^a}{\sqrt{2\pi m_i^+ RT}} \quad (2.7)$$

另一方面, 气体的化学势^[9]

$$\mu_i^g = RT(\varphi_i + \ln P_i^a) \quad (2.8)$$

式中 φ_i 和 [9] 中的意义一样。这时由于

$$\mu_i^{\beta} = \mu_i^{\alpha}$$

得到

$$\begin{aligned} \mu_i^{\beta} - \mu_i^{\alpha} &= \mu_{i\beta}^{\alpha} - \mu_i^{\alpha} = RT(\varphi_i + \ln P_{i\beta}^{\alpha}) - RT(\varphi_i + \ln P_i^{\alpha}) \\ &= RT \ln \frac{P_{i\beta}^{\alpha}}{P_i^{\alpha}} = -RT \ln \frac{P_i^{\alpha}}{P_{i\beta}^{\alpha}} = -RT \ln \left(1 - \frac{P_{i\beta}^{\alpha} - P_i^{\alpha}}{P_{i\beta}^{\alpha}} \right) \\ &\approx -RT \left(-\frac{P_{i\beta}^{\alpha} - P_i^{\alpha}}{P_{i\beta}^{\alpha}} \right) = \frac{RT}{P_{i\beta}^{\alpha}} (P_{i\beta}^{\alpha} - P_i^{\alpha}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

但从不可逆热力学角度来看

$$\frac{1}{4\pi a^2} \frac{dN_i^{\alpha}}{dt} = K_i (\mu_i^{\beta} - \mu_i^{\alpha}) = K_i \frac{RT}{P_{i\beta}^{\alpha}} (P_{i\beta}^{\alpha} - P_i^{\alpha}) \quad (2.10)$$

所以比较(2.9)和(2.10)两式得到

$$K_i = \frac{P_{i\beta}^{\alpha}}{RT} \frac{1}{\sqrt{2\pi m_i^{\dagger} RT}} \quad (2.11)$$

所以

$$\frac{dN_i^{\alpha}}{dt} = 4\pi a^2 \frac{P_{i\beta}^{\alpha}}{RT} \frac{1}{\sqrt{2\pi m_i^{\dagger} RT}} (\mu_i^{\beta} - \mu_i^{\alpha}) = 4\pi a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi m_i^{\dagger} RT}} (P_{i\beta}^{\alpha} - P_i^{\alpha}) \quad (2.12)$$

代入(2.2)式, 得到

$$\frac{d}{dt} \left(\rho_i^{\alpha} \frac{4}{3} \pi a^3 \right) = 4\pi a^2 \sqrt{\frac{m_i^{\dagger}}{2\pi RT}} (P_{i\beta}^{\alpha} - P_i^{\alpha}) \quad (2.13)$$

同时理想气体物态方程为

$$P_i^{\alpha} \frac{4}{3} \pi a^3 = N_i^{\alpha} RT \quad (2.14)$$

而另外质量关系式为

$$\rho_i^{\alpha} \frac{4}{3} \pi a^3 = N_i^{\alpha} m_i^{\dagger} \quad (2.15)$$

所以

$$\frac{P_i^{\alpha}}{\rho_i^{\alpha}} = \frac{RT}{m_i^{\dagger}} \quad (2.16)$$

如果温度为不变, 代入(2.13), 得到

$$\frac{d}{dt} \left(P_i^{\alpha} \frac{4}{3} \pi a^3 \right) = 4\pi a^2 \frac{RT}{\sqrt{2\pi m_i^{\dagger} RT}} (P_{i\beta}^{\alpha} - P_i^{\alpha})$$

即我们有

$$\frac{d}{dt} \left(P_i^{\alpha} \frac{4}{3} \pi a^3 \right) = 4\pi a^2 \sqrt{\frac{RT}{2\pi m_i^{\dagger}}} (P_{i\beta}^{\alpha} - P_i^{\alpha}) \quad (2.17)$$

公式(2.1)和(2.17)为求解单个气泡运动的基本方程式, 这样共有4个微分方程式, 有4个未知函数 P_i^{α} 和 a , 刚好可以求解.

三、平衡半径和平衡压强

我们假定流体流入处的原始状态为温度 T , 压强 P_0 . 这时水和空气处于平面的平衡状

态。因为液相和气相的化学势^[6]分别为

$$\mu_i^g = RT(\varphi_i + \ln P_i^g) \quad (3.1)$$

$$\mu_i^l = g_i + P^\beta V_i + RT \ln x_i^l \quad (3.2)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= \frac{h_{i0}}{RT} - \int \frac{dT}{RT^2} \left[c_{pi} dT - \frac{s_{i0}}{R} \right] \\ g_i &= u_i^l - T s_i^{*l}, \quad x_i^l = \frac{N_i^l}{N^\beta}, \quad N^\beta = \sum_i N_i^l \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

于是在初始平衡状态有

$$RT(\varphi_i + \ln P_{i0}^g) = g_i + P_0 V_i^l + RT \ln x_{i0}^l \quad (3.4)$$

如果气泡也处于平衡状态，由于气泡的质量是有限值，无限空间中水的质量为无限值，所以气泡中气体质量的改变并不能使 x_i^l 值改变。也就是

$$x_i^l = x_{i0}^l \quad (3.5)$$

所以有

$$RT(\varphi_i + \ln P_{ie}^g) = g_i + P^\beta V_i^l + RT \ln x_{i0}^l \quad (3.6)$$

相减就得到

$$-RT \ln \frac{P_{ie}^g}{P_{i0}^g} = (P_0 - P^\beta) V_i^l \quad (3.7)$$

展开，得到近似表达式

$$RT \frac{P_{i0}^g - P_{ie}^g}{P_{i0}^g} = (P_0 - P^\beta) V_i^l \quad (3.8)$$

解出

$$P_{ie}^g = P_{i0}^g - \frac{P_{i0}^g \cdot V_i^l}{RT} (P_0 - P^\beta) \quad (3.9)$$

相加，得到

$$P_i^g = P_0^g - \frac{P_0 - P^\beta}{RT} \sum_i P_{i0}^g V_i^l \quad (3.10)$$

我们再考虑力的平衡条件

$$P_i^g - P^\beta = \frac{2\sigma}{a_e} \quad (3.11)$$

把(3.10)式代入(3.11)，得到

$$P_0 - P^\beta - \frac{(P_0 - P^\beta)}{RT} \sum_i P_{i0}^g V_i^l = \frac{2\sigma}{a_e} \quad (3.12)$$

解出 a_e ，得到

$$a_e = \frac{2\sigma}{(P_0 - P^\beta) \left(1 - \frac{\sum_i P_{i0}^g V_i^l}{RT} \right)} \quad (3.13)$$

四、气泡半径的变化

把(2.17)式写成下列形式

$$\frac{da}{dt} P_i^a + \frac{1}{3} a \frac{dP_i^a}{dt} = \sqrt{\frac{RT}{2\pi m_i^+}} (P_{i,e}^a - P_i^a) \quad (4.1)$$

加起来得到

$$\frac{da}{dt} P^a + \frac{1}{3} a \frac{dP^a}{dt} = \sum_i \sqrt{\frac{RT}{2\pi m_i^+}} (P_{i,e}^a - P_i^a) \quad (4.2)$$

或

$$\frac{da}{dt} + \frac{1}{3} a \frac{d \ln P^a}{dt} = \frac{1}{P^a} \sum_i \sqrt{\frac{RT}{2\pi m_i^+}} (P_{i,e}^a - P_i^a) \quad (4.3)$$

再由Rayleigh-Plesset方程, 得到

$$P^a - P_e^a + \frac{2\sigma}{a_e} - \frac{2\sigma}{a} - \frac{3}{2} \rho^\beta \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \rho^\beta a \frac{d^2 a}{dt^2} - 4\eta \frac{da}{dt} = 0 \quad (4.4)$$

但是在空化问题中, a 和 a_e 的差别是由于流动过程中分压 P_i^a 和气泡中质量跟不上水压力 P^β 的变化产生的, 所以 $a - a_e$ 比 a_e 本身要来得小. 气泡的 $P^a - P_e^a$ 也是由于滞后现象造成的. 但 $P_{i,e}^a$ 和 P_i^a 的比值为 $\left[1 - \frac{(P_0 - P^\beta)}{RT} V_i^a \right]$, 而因子 $\frac{(P_0 - P^\beta) V_i^a}{RT}$ 的量级为 10^{-3} , 所以 $\ln \frac{P^a}{P_0}$ 变化也

是在 10^{-3} 量级之内. 因此 $\frac{d}{dt} \ln P^a$ 是一个很小的量. 这样我们可以把 $\frac{d}{dt} \ln P^a$ 项略去, 略去

$\frac{d}{dt} \ln P^a$ 项和分母中从 P_0 代 P^a 以后, 就得到

$$\frac{d}{dt} a = \frac{1}{P_0} \sum_i \sqrt{\frac{RT}{2\pi m_i^+}} (P_{i,e}^a - P_i^a) \quad (4.5)$$

因为水的饱和蒸汽压在室温时候在整个压力中所占比重不过2~3%, 它的分子量为18, 与空气和氮气的平均分子量29.5来比, 约为0.6倍, 取平方根以后约为0.8倍, 再要乘上2~3%, 所以引起误差不过 10^{-3} 量级. 另外氧和氮的分子量相差不多, 用平均分子量29.5代入, 引起的误差也不过 10^{-3} 量级. 所以我们可以用一个平均分子量 m^+ 项来代替三种分子的加和项, 于是得到

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{P_0} \sqrt{\frac{RT}{2\pi m^+}} (P_e^a - P^a) \quad (4.6)$$

因为 a 和 a_e 相差不是太大, 我们就可以把(4.4)式加以近似, 得到

$$P_e^a - P^a \approx \frac{2\sigma}{a_e^2} (a - a_e) - \rho^\beta a_e \frac{d^2 a}{dt^2} - 4\eta \frac{da}{dt} \quad (4.7)$$

代入(4.6)式, 我们得到

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{P_0} \sqrt{\frac{RT}{2\pi m^+}} \left[\frac{2\sigma}{a_e^2} (a - a_e) - \rho^\beta a_e \frac{d^2 a}{dt^2} - 4\eta \frac{da}{dt} \right] \quad (4.8)$$

化简得到

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{4\eta}{a_e} + \frac{P_0}{\sqrt{\frac{RT}{2\pi m^+}}} \frac{da}{dt} - \frac{2\sigma}{\rho^\beta a_e^3} (a - a_e) = 0 \quad (4.9)$$

我们给出初始条件和边界条件为

$$\left. \begin{aligned} t=0, & \quad a=a_0 \\ t \rightarrow \infty, & \quad a \rightarrow a_e \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

解 (4.9) 和 (4.10) 得到

$$a = a_e + (a_0 - a_e) \exp\left[-\frac{t}{T}\right] \quad (4.11)$$

式中 T 就是气泡趋于平衡的弛豫时间, 而

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{4\eta}{a_e} + \frac{P_0}{\sqrt{\frac{RT}{2\pi m^2}}}}{\rho^\beta a_e} + \sqrt{\left(\frac{\frac{4\eta}{a_e} + \frac{P_0}{\sqrt{\frac{RT}{2\pi m^2}}}}{\rho^\beta a_e} \right)^2 + \frac{8\sigma}{\rho^\pi a_e^3}} \right] \quad (4.12)$$

五、滞后现象的判别准则

我们现在来讨论在什么情况下, 气泡可以认为是处于平衡状态. 我们假定我们所讨论的问题中气泡半径的允许百分误差为 r . 我们有

$$\frac{\Delta a}{a_e} \approx \frac{\frac{\partial a_e}{\partial x_i} V_i T}{a_e} \approx \frac{\frac{\partial a_e}{\partial P^\beta} \frac{\partial P^\beta}{\partial x_i} V_i T}{a_e} \approx \frac{2\sigma}{(P_0 - P^\beta)^2} \frac{\partial P^\beta}{\partial x_i} V_i T \quad (5.1)$$

式中 x_i 表示直角坐标, V_i 表示水流速度, 如果 $\frac{\Delta a}{a_e}$ 远远小于允许百分误差, 即

$$\frac{\Delta a}{a_e} \ll r \quad (5.2)$$

则我们就可以认为气泡没有滞后现象. 反过来如果不满足条件 (5.2), 我们就认为气泡并不处于平衡状态, 有一定的滞后现象. 在通常的情形里, 条件 (5.2) 都能满足, 所以通常情形, 我们都能认为气泡处于平衡状态, 而可以用平衡状态的方程来讨论空化现象.

参 考 文 献

- [1] Lamb, H., *Hydrodynamics*, (1924), 114—115.
- [2] Knapp, R. T., J. W. Daily and F. G. Hammitt, *Cavitation* (1970).
- [3] Hammitt, F. G., *Cavitation and Multiphase Flow Phenomena* (1981).
- [4] Rogen, E. A. Arndt, *Recent Advances in Cavitation Research* (1980).
- [5] 王竹溪, 《热力学简程》, (1964), 107—108, 155—156, 189—193, 199, 209—210.
- [6] 王竹溪, 《统计物理学导论》(1956), 61, 186, 190.
- [7] 黄福赐, 《工程热力学原理和应用》(1982).
- [8] 钱学森, 《物理力学讲义》(1962), 285.
- [9] 蔡树棠、刘一心, 热力学理论与空化现象, 应用数学和力学, 4, 6(1983), 737—742.

Phase Transition in Cavitation Problem and the Speed Approaching to Equilibrium

Tsai Shu-tang

*(Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology
of China, Hefei)*

Wu Den-kai

(Division of Physics, Hangzhou Commercial College, Hangzhou)

Abstract

In the previous article^[9], we mentioned that the cavitation phenomenon cannot be described both by the fast expansion and compression of a single gas bubble, because the actual fact is departed far from these kinds of description but close to the equilibrium condition. In this article, we shall go on to tackle the problem, which was discussed in the previous paper^[9]. We get the speed and the relaxation time of approaching to the equilibrium state of a gas bubble, and give out the criterion that the gas bubble may be considered as in equilibrium condition in cavitation phenomenon.