

非均匀变厚度圆盘的定常热传导

叶开沅 刘平

(兰州大学, 1984年1月6日收到)

摘 要

本文采用阶梯折算法, 求得了任意非均匀变厚度圆盘定常热传导问题的一般解, 并通过算例, 对阶梯折算法的误差进行了分析. 结果表明, 该方法对于求解各类变系数常微分方程是十分有效的.

一、引 言

非均匀变厚度圆盘的定常热传导问题, 在工程中具有重要意义. 例如在燃气轮机中旋转圆盘的传热, 各种环形散热片等等.

由于该问题最后归结为一个变系数常微分方程, 直接求解是异常困难的. 本文采用叶开沅^[1]提出的阶梯折算法(1965)求解这类方程, 得到了解答的离散解析表达式. 本文首次给出了估计阶梯折算法误差的方法.

算例表明, 阶梯折算法具有物理概念清晰, 方法简便, 精度高, 误差易估计, 易于编制计算机程序等优点, 是求解变系数常微分方程一个有效的方法.

二、问题的提出和求解

用图1所示的圆盘剖面图. 设温度场为轴对称分布, 圆盘的表面按牛顿定律进行对流热交换

$$Q_h(r) = \alpha_h(r)(t(r) - t_0) \quad (2.1)$$

其中 $Q_h(r)$ 为表面单位面积上散出的热流, $\alpha_h(r)$ 为表面对流热交换系数, $t(r)$ 为盘内的温度, t_0 为周围介质的统计温度.

考察半径为 r , 宽为 dr , 厚为 $h(r)$ 的圆环的热平衡, 不难得到非均匀变厚度圆盘的定常热传导方程,

$$\frac{d}{dr} \left(h(r)k(r)r \frac{dt(r)}{dr} \right) + 2\alpha_h(r)(t_0 - t(r))r = 0 \quad (2.2)$$

其中 $k(r)$ 为圆盘的热传导系数, 并假定圆盘内无热源.

令:

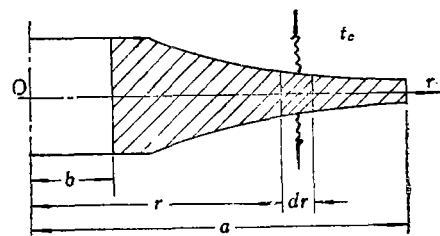


图 1

$$T(r) = i(r) - t_0 \quad (2.3)$$

此时, 方程(2.2)可写成

$$\frac{d}{dr} \left(h(r)k(r)r \frac{dT(r)}{dr} \right) - 2\alpha_h(r)rT(r) = 0 \quad (2.4)$$

或

$$\frac{d^2T(r)}{dr^2} + \frac{1}{h(r)k(r)r} \frac{d}{dr} (h(r)k(r)r) \frac{dT(r)}{dr} - \frac{2\alpha_h(r)}{h(r)k(r)} T(r) = 0 \quad (2.5)$$

直接求解方程(2.5)不是一桩容易的事, 现在我们用阶梯折算法^[1]对(2.5)进行求解.

阶梯的划分如图2所示.

阶梯折算后, 方程(2.5)变成:

$$\frac{d^2T_i(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_i(r)}{dr} - m_i^2 T_i(r) = 0, \quad a_i \leq r < a_{i+1} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.6)$$

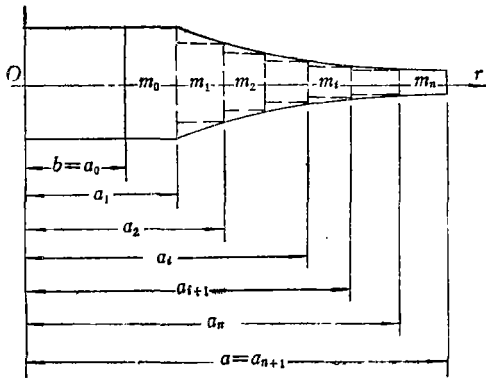


图 2

其中

$$T_i(r) = T(r) \quad a_i \leq r < a_{i+1} \quad (2.7)$$

$$m_i = \sqrt{\frac{2\alpha_{hi}}{h_i k_i}} \quad (2.8)$$

这里 α_{hi} , h_i , k_i 分别为第 i 段的折算系数, 它们可以在 $a_i \leq r < a_{i+1}$ 上分别取 $\alpha_h(r)$, $h(r)$, $k(r)$ 的任何值. 为了进一步说明阶梯折算法的应用, 并对得到的阶梯折算解进行误差估计, 我们引入以下的概念:

1. 若所有的 m_i 都取上界值, 即:

$$m_i = \max \left\{ \sqrt{\frac{2\alpha_h(r)}{h(r)k(r)}} \mid a_i \leq r < a_{i+1} \right\} \quad (2.9)$$

这时所得到的方程(2.6)的解称为上阶梯折算解.

2. 若所有的 m_i 都取下界值, 即

$$m_i = \min \left\{ \sqrt{\frac{2\alpha_h(r)}{h(r)k(r)}} \mid a_i \leq r < a_{i+1} \right\} \quad (2.10)$$

这时所得到的方程(2.6)的解称为下阶梯折算解.

3. 若所有的 m_i 都取中值, 即

$$m_i = \left\{ \sqrt{\frac{2\alpha_h(r)}{h(r)k(r)}} \mid r = \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \right\} \quad (2.11)$$

这时所得到的方程(2.6)的解称为中阶梯折算解.

从直观上容易看出, 精确解一定在上、下阶梯折算解之间. 如果分段足够多, 上、下阶梯折算解都将逼近精确解. 为了以较少的分段获得较高的精度, 恰当地选取折算系数是十分重要的. 实际计算表明, 按中值选取折算系数时, 精度最高. 在本文的计算中, 我们给出了这三种阶梯折算解的比较.

方程(2.6)属于零阶变型贝塞尔方程, 其解为

$$T_i(r) = C_i^{(1)} I_0(m_i r) + C_i^{(2)} K_0(m_i r) \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.12)$$

这里 $I_0(m_i r)$, $K_0(m_i r)$ 分别称为第一类、第二类变型贝塞尔函数^[2], $C_i^{(1)}$, $C_i^{(2)}$ 为待定常数。

将(2.12)式写成初参数形式:

$$T_i(r) = f_i F_i(r) + g_i G_i(r) \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.13)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F_i(r) &= -\frac{1}{\Delta_i} [K_1(m_i a_i) I_0(m_i r) + I_1(m_i a_i) K_0(m_i r)] \\ G_i(r) &= \frac{1}{m_i k_i \Delta_i} [K_0(m_i a_i) I_0(m_i r) - I_0(m_i a_i) K_0(m_i r)] \\ \Delta_i &= \begin{vmatrix} I_0(m_i a_i) & K_0(m_i a_i) \\ I_1(m_i a_i) & -K_1(m_i a_i) \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

初参数 f_i, g_i 为待定常数, 分别为

$$f_i = T_i(a_i), \quad g_i = Q_i(a_i) = -h_i k_i \frac{dT_i(a_i)}{dr} \quad (2.15)$$

这些常数由阶梯连接处的连续条件确定。

对于厚度及材料都连续变化的圆盘, 阶梯连接处的连续条件为

$$\left. \begin{aligned} T_{i-1}(a_i) &= T_i(a_i) \\ -k_{i-1} h_{i-1} \frac{dT_{i-1}(a_i)}{dr} &= -k_i h_i \frac{dT_i(a_i)}{dr} \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

写成矩阵形式

$$X_i = [c_i] X_{i-1} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.17)$$

其中

$$X_i = [f_i \quad g_i]^T \quad (2.18)$$

$$[c_i] = \begin{bmatrix} F_{i-1}(a_i) & G_{i-1}(a_i) \\ -k_{i-1} h_{i-1} F'_{i-1}(a_i) & -k_{i-1} h_{i-1} G'_{i-1}(a_i) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\left. \begin{aligned} F'_i(r) &= -\frac{m_i}{\Delta_i} [K_1(m_i a_i) I_1(m_i r) - I_1(m_i a_i) K_1(m_i r)] \\ G'_i(r) &= \frac{1}{\Delta_i k_i h_i} [K_0(m_i a_i) I_1(m_i r) + I_0(m_i a_i) K_1(m_i r)] \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

由(2.17)递推可得

$$X_n = [c_n][c_{n-1}][c_{n-2}] \cdots [c_1] X_0 \quad (2.21)$$

记

$$X_{n+1} = [T(a) \quad Q(a)]^T = [f_{n+1} \quad g_{n+1}]^T \quad (2.22)$$

显然

$$X_{n+1} = [c_{n+1}] X_n \quad (2.23)$$

将(2.21)代入上式:

$$X_{n+1} = [c] X_0 \quad (2.24)$$

其中

$$[c] = [c_{n+1}][c_n] \cdots [c_1] \quad (2.25)$$

(2.24)也可写成

$$\begin{bmatrix} T(a) \\ Q(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(b) \\ Q(b) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

(2.26)和边界条件一起,可完全确定4个待定常数 $T(b)$, $Q(b)$, $T(a)$, $Q(a)$.

在工程实际中,圆盘的内、外缘常有连接物(例如燃气轮机的圆盘,内缘连接轴,外缘有叶片)。这时在连接处往往存在着热阻。若边界条件给定:

$r=b-0$ 处的相对于 t_c 的温升为 T_{bs} ,

$r=a+0$ 处的相对于 t_c 的温升为 T_{ar} ,

则边界条件可写成

$$Q(b) = c_{s1}h_0(T_{bs} - T(b)), \quad Q(a) = c_{s2}h_n(T(a) - T_{ar}) \quad (2.27)$$

其中 c_{s1} , c_{s2} 分别为 $r=b$ 与 $r=a$ 处的热接触系数。在理想接触时(热阻为零),它们为 ∞ ,在绝热接触时为零。

由(2.26)、(2.27)容易解出:

$$\left. \begin{aligned} f_0 = T(b) &= \frac{1}{W_1 + c_{s1}h_0} (c_{s1}h_0T_{bs} + W_2) \\ g_0 = Q(b) &= \frac{W_1}{W_1 + c_{s1}h_0} (c_{s1}h_0T_{bs} + W_2) - W_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

其中

$$W_1 = \frac{c_{s2}h_n c_{11} - c_{21}}{c_{22} - c_{s2}h_n c_{12}}, \quad W_2 = \frac{c_{s2}h_n T_{ar}}{c_{22} - c_{s2}h_n c_{12}} \quad (2.29)$$

求得 f_0 , g_0 之后,即可由(2.17)求得全部的待定系数 X_i ($i=1, 2, \dots, n$), 最后得到整个圆盘的温度表达式

$$t(r) = t_c + \sum_{i=0}^n \{r - a_i\}^0 \{a_{i+1} - r\}^0 T_i(r) \quad (2.30)$$

这里 $\{r - a_i\}^0$, $\{a_{i+1} - r\}^0$ 均为Heaviside函数, 定义为

$$\{x - y\}^0 = \begin{cases} 0 & x < y \text{ 时} \\ 1 & x \geq y \text{ 时} \end{cases} \quad (2.31)$$

对于环形散热片, 单位时间内散热量为

$$Q_{\text{散}} = 2\pi b g_0 \quad (2.32)$$

对于燃气轮机中的圆盘, 单位时间内圆盘(包括连接轴)的散热量为

$$Q_{\text{散}} = -2\pi a g_{n+1} \quad (2.33)$$

其中圆盘传给连接轴的热量为

$$Q_{\text{轴}} = -2\pi b g_0 \quad (2.34)$$

三、算 例

设有一非均匀变厚度环形散热片, 内半径为 $b=10$ cm, 外半径为 $a=60$ cm, 厚度分布为

$$h(r) = \frac{1}{r} \text{ cm, 热传导系数为 } k(r) = \frac{r}{500} \text{ (Cal/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{°C)}, \text{ 表面散热系数为 } \alpha_h(r) = \frac{1}{1000} \frac{1}{r}$$

(Cal/cm²·s·°C), 周围介质的平均统计温度为 $t_0=0^\circ\text{C}$, 边界条件为:

$$\left. \begin{array}{l} \text{内边缘温度已知 } T(b)=100^\circ\text{C} \\ \text{外缘对流放热 } -k(a)\frac{dT(a)}{dr}=\alpha_h(a)T(a) \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

求该环形散热片内部的温度场。

设温度在圆环内部的厚度方向均匀分布, 这时基本方程(2.5)变成:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{1}{r^2}T=0 \quad (3.2)$$

满足该方程和边界条件(3.1)的精确解为

$$T(r)=0.2702r + \frac{972.9803}{r} \quad (3.3)$$

下面用阶梯折算法求解:

阶梯划分 ($n=12$)

$$\left. \begin{array}{l} b=a_0=10, a_1=11, a_2=12, a_3=13, a_4=15 \\ a_5=17.5, a_6=20, a_7=22.5, a_8=25, a_9=30 \\ a_{10}=35, a_{11}=40, a_{12}=50, a=a_{13}=60 \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

上阶梯折算时:

$$m_i = \frac{1}{a_i} \quad (3.5)$$

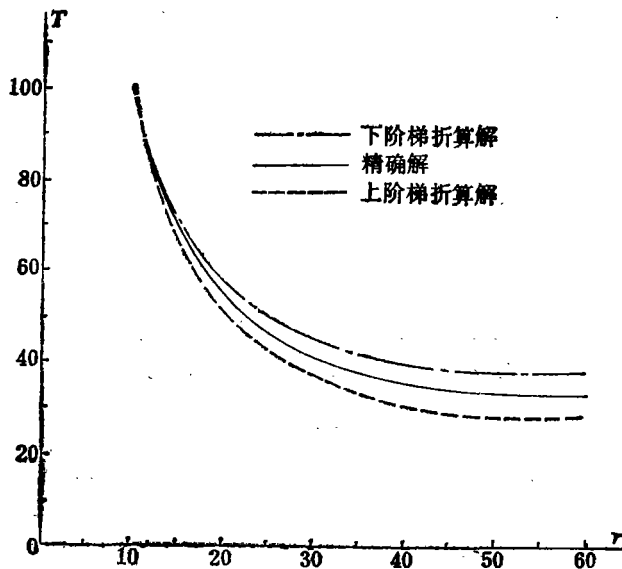
下阶梯折算时:

$$m_i = \frac{1}{a_{i+1}} \quad (3.6)$$

中阶梯折算时:

$$m_i = \frac{2}{a_i + a_{i+1}} \quad (3.7)$$

上、中、下三种阶梯折算解的计算结果及误差如表 1 及图 3 所示。



中阶梯折算解几乎与精确解重合, 故未画出

图 3

表 1

r	精确解	上阶梯折算解		下阶梯折算解		中阶梯折算解	
	T	T	误差%	T	误差%	T	误差%
10	100	100	0	100	0	100	0
15	88.91	66.55	-3.4	71.18	+3.3	88.73	-0.3
20	54.05	50.73	-6.1	57.22	+5.9	53.80	-0.5
25	45.67	41.88	-8.3	49.34	+8.0	45.36	-0.7
30	40.53	36.42	-10.1	44.49	+9.7	40.18	-0.8
35	37.25	32.96	-11.5	41.38	+11.1	36.87	-1.0
40	36.13	30.71	-12.6	39.98	+12.1	34.72	-1.2
45	33.78	29.24	-13.4	38.10	+12.8	33.34	-1.3
50	32.97	28.36	-14.0	37.31	+13.2	32.50	-1.4
60	32.42	27.77	-14.4	36.77	+13.4	31.93	-1.5

由图及表可知, 精确解确实被夹在上、下阶梯折算解之间, 而中阶梯折算解已非常接近精确解, 而仅仅 $n=12$ 。

四、结 束 语

本文采用阶梯折算法解决了非均匀变厚度圆盘的轴对称定常热传导问题, 利用本文的方法编制的计算程序可以直接为工程设计服务。

参 考 文 献

- [1] 叶开沅、许剑云, 非均匀变厚度弹性体力学的若干问题的一般解 I. 在非均匀定常温度场下的非均匀变厚度高速度旋转圆盘的弹塑性应力分析, 兰州大学学报(自然科学版), 力学专号, 1 (1979), 60—74; 力学学报, 专号, (1981), 78—89.
- [2] 王竹溪、郭敦仁, 《特殊函数概论》, 科学出版社, (1979).
- [3] 竹内洋一郎, 《热应力》, 科学出版社, (1977).
- [4] Carslaw, H. S. and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford (1959).

Steady Heat Conduction of a Disc with Non-Homogeneity and Variable Thickness

Yeh Kai-yuan Lieu Ping
(Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract

In this paper, we use the stepped reduction method suggested by Yeh Kai-yuan in 1965 to obtain the general solution of steady heat conduction of a disc with non-homogeneity and variable thickness. Through an illustrative example, the error of Yeh's method is analysed. The result shows that it is effective for solving ordinary differential equation with variable coefficients.