应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

非线性边值问题的奇摄动

章国华　　林宗池

（加拿大，卡技利大学）（福建师范大学）

（1984年 2 月 5 日收到）

摘　　要

本文研究边值问题：

$$\varepsilon y''=f(x,y,y',\varepsilon,\mu)\qquad (\mu<x<1-\mu)$$
$$y(x,\varepsilon,\mu)|_{x=\mu}=\varphi_0(\varepsilon,\mu)$$
$$y(x,\varepsilon,\mu)|_{x=1-\mu}=\varphi_1(\varepsilon,\mu)$$

其中 ε，μ 是两个正的小参数．在 $f_{y'}\leqslant -k<0$ 和其他适当的限制下．存在一个解且满足

$$y(x,\varepsilon,\mu)-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\,\varepsilon^{i-j}\mu^{j}=O\left(\exp\left[-\frac{k(x-\mu)}{\varepsilon}\right]\right)+O\left(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}\right)$$

其中 $y_{0,0}(x)$ 是退化问题

$$f(x,y,y',0,0)=0\qquad (0<x<1)$$
$$y(1,0,0)=\varphi_1(0,0)$$

的解，而 $y_{i-j,j}(x)$ $(j=0,1,\cdots,i;\ i=1,2,\cdots,m)$ 能够从某些线性方程逐次求得．

一、引　　言

非线性边值问题：

$$\varepsilon y''=f(x,y,y',\varepsilon) \tag{1.1}$$
$$y(0,\varepsilon)=\alpha(\varepsilon),\quad y(1,\varepsilon)=\beta(\varepsilon) \tag{1.2}$$

曾被很多作者用某种方法研究过．例如，在 Briš 文［1］中，函数 $f(x,y,y',\varepsilon)$ 是不依赖于 ε 和 $\alpha(\varepsilon)=\beta(\varepsilon)=0$；O'malley[2],[3]研究了 $f(x,y,,y',\varepsilon)=a(x,y)y'+b(x,y)$ 的情况；K.W. Chang[4] 和F.A. Howes[5] 研究了更一般的情形．但是这些文章都没有涉及边界摄动[6~8]的情况．在工程技术问题中，我们遇见边界摄动的问题[9]．一般地说，在实际问题中方程摄动和边界摄动依赖于不同的参数．本文在上文的基础上进一步研究边界与算子双摄动的非线性方程的边值问题．在适当的假设下，我们建立了 m 阶近似解（m 是任意正整数），和给出了相应的余项估计，拓广和改正了上文的结果．

我们研究如下的非线性边值问题：

$$\varepsilon y''=f(x,y,y',\varepsilon,\mu)\qquad (\mu<x<1-\mu) \tag{1.3}$$
$$y(x,\varepsilon,\mu)|_{x=\mu}=\varphi_0(\varepsilon,\mu) \tag{1.4}$$
$$y(x,\varepsilon,\mu)|_{x=1-\mu}=\varphi_1(\varepsilon,\mu) \tag{1.5}$$

其中 $\varepsilon>0$ 和 $\mu>0$ 是两个小参数．

我们假定 $f_{y'}\leqslant -k<0$ (k 是正的常数)。当 $\varepsilon=0,\mu=0$ 时摄动问题退化为非摄动问题:

$$f(x,y,y',0,0)=0 \qquad (0<x<1) \tag{1.6}$$

$$y(1,0,0,)=\varphi_1(0,0) \tag{1.7}$$

它的解用 $y=y_{0,0}(x)$ 表示。

我们假定 $y(x,\varepsilon,\mu)$, $f(x,y,y',\varepsilon,\mu)$, $\varphi_1(\varepsilon,\mu)$ 当双参数趋于 0 时有有效的 ε, μ 的二重级数的渐近展开式，例如,

$$y(x,\varepsilon,\mu)\sim y_{0,0}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j} \tag{1.8}$$

$$f(x,y,y',\varepsilon,\mu)=F(\varepsilon,\mu)\sim F(0,0)+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}F_{i-j,j}(0,0)\varepsilon^{i-j}\mu^{j} \tag{1.9}$$

其中

$$F(0,0)=f(x,y_{0,0},y'_{0,0},0,0)$$

$$\begin{aligned}F_{i-j,j}(0,0)&=\frac{1}{(i-j)!j!}\left.\frac{\partial^{i}F(\varepsilon,\mu)}{\partial\varepsilon^{i-j}\partial\mu^{j}}\right|_{\varepsilon=\mu=0}\\&=f_y(x,y_{0,0},y'_{0,0},0,0)y_{i-j,j}+f_{y'}(x,y_{0,0},y'_{0,0},0,0)y'_{i-j,j}\\&\quad+G_{i-j,j}(x,y_{0,0},y_{1,0},y_{0,1},\cdots,y_{i-j,j-1};y'_{0,0},y'_{1,0},y'_{0,1},\cdots,y'_{i-j,j-1})\\&\qquad(j=1,2,\cdots,i;i=1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{1.10}$$

式中 $G_{l,k}$ 由 x, $y_{l,k},y'_{l,k}$ $(0\leqslant l\leqslant i-j-1,\ 0\leqslant k\leqslant j-1)$ 确定。我们略去细节。

同样地，上述记号适用于其它展式。

把(1.8)～(1.9)代入(1.3)～(1.5)我们得到

$$f_{y'}y'_{i-j,j}+f_y\,y_{i-j,j}=y''_{i-j-1,j}-G_{i-j,j}(x,y_{0,0},\cdots,y_{i-j,j-1};y'_{0,0},\cdots,y'_{i-j,j-1}) \tag{1.11}$$

$$y_{i-j,j}(1)=\frac{1}{(i-j)!j!}\varphi_1^{(i-j,j)}(0,0)-\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k}\frac{y^{(k)}_{i-j,j-k}(1)}{k!}$$
$$(j=0,1,\cdots,i;\ i=1,2,\cdots) \tag{1.12}$$

式(1.11)、(1.12)(取负标)的量看做是 0。

由于 $y_{0,0}(x)$ 是退化问题(1.6), (1.7)式的解，因此，从(1.11)～(1.12)我们能够逐次地找到 $y_{i-j,j}(x)$ $(j=0,1,\cdots,i;i=1,2,\cdots)$，把这些 $y_{i-j,j}(x)$ 代入(1.8)，我们得到问题(1.3)～(1.5)的形式渐近解。

二、定理的叙述与证明

为了叙述我们的结果，我们假设下面的条件(a)～(e)成立:

(a) 退化问题(1.6)、(1.7)的解 $y=y_{0,0}(x)\in C^{(2)}$ 存在;

(b) 函数 f 关于 x 连续和 $f\in C^{\infty}(\Omega)$ 关于 y,y',ε 和 μ，其中

Ω: $\mu\leqslant x\leqslant 1-\mu,|y|\leqslant d,|y'|<\infty,0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,\ 0\leqslant\mu\leqslant\mu_1$ (d,ε_1,μ_1 是三个正的常数);

(c) 存在二个常数 l, k，使得在 Ω 上

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant l,\ \left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right|\leqslant -k<0;$$

(d) 函数 f 在 Ω 上满足 Nagumo 条件，即存在一个定义在 $[0,\infty)$ 上正的连续函数 φ，使得当 $s\to\infty$ 时，$s^2/\varphi(s)\to\infty$ 和 $|f(x,y,y',\varepsilon,\mu)|\leqslant\varphi(|y'|)$;

(e) $\varphi_0(\varepsilon,\mu)\in C^{(0)}[0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1;\ 0\leqslant\mu\leqslant\mu_1]$，$\varphi_1(\varepsilon,\mu)\in C^{\infty}[0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1;\ 0\leqslant\mu\leqslant\mu_1]$.

在这些假设(a)～(e)的情况下我们将证明下面主要的结果.

定理1 若假设(a)～(e)成立，则存在问题(1.3)～(1.5)的一个解 $y(x,\varepsilon,\mu)$ 和下列估计成立：

$$y(x,\varepsilon,\mu)-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^j=O\left(\exp\left[-\frac{k(x-\mu)}{\varepsilon}\right]\right)+O\left(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j\right) \tag{2.1}$$

其中 $y_{0,0}(x)$ 是退化问题(1.6)，(1.7)的解，而 $y_{i-j,j}(x)$ $(j=0,1,\cdots,i;i=1,2,\cdots,m)$ 是问题(1.11)～(1.12)的解.

证明：当 $m=0$时，在文[4]、[5]中证明了上述结果. 即在假设(a)～(e)下，存在问题(1.3)～(1.5)的一个解 $y(x,\varepsilon,\mu)$，这个解满足下述的结果：

$$y(x,\varepsilon,\mu)-y_{0,0}(x)=O\left(\exp\left[-\frac{k(x-\mu)}{\varepsilon}\right]\right)+O(\varepsilon) \tag{2.2}$$

从上述结果不难指出，当 $i+j<m$ 时，若我们事先能够逐次确定出满足(1.11)～(1.12)的解 $y_{i,j}(x)\in C^2[0,1]$，则我们一定能够从相应的问题(1.11)～(1.12)唯一地找出 $y_{i,j}(x)\in C^2[0,1]$，$i+j=m$.

现在我们证明问题(1.3)～(1.5)的解存在和 $y_{0,0}(x)$，$y_{i-j,j}(x)$ $(j=0,1,\cdots,i;i=1,2,\cdots,m)$满足估计式(2.1).

现在我们构造两个函数$\alpha(x,\varepsilon,\mu)$，$\beta(x,\varepsilon,\mu)$：

$$\alpha(x,\varepsilon,\mu)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\,\varepsilon^{i-j}\mu^j-\left[\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(\mu)\varepsilon^{i-j}\mu^j-\varphi_0(\varepsilon,\mu)\right]\exp[\lambda_1(x-\mu)]\\ \displaystyle\qquad-\left(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j rl^{-1}\right)(2\exp[\lambda_2(x-1+\mu)]-1),\\ \displaystyle\qquad\text{as }\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(\mu)\varepsilon^{i-j}\mu^j\geqslant\varphi_0(\varepsilon,\mu)\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\,\varepsilon^{i-j}\mu^j-\left(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j rl^{-1}\right)(2\exp[\lambda_2(x-1+\mu)]-1),\\ \displaystyle\qquad\text{as}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(\mu)\varepsilon^{i-j}\mu^j<\varphi_0(\varepsilon,\mu)\end{cases} \tag{2.3}$$

$$\beta(x,\varepsilon,\mu)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\,\varepsilon^{i-j}\mu^j+\left(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j rl^{-1}\right)(2\exp[\lambda_2(x-1+\mu)]-1),\\ \displaystyle\qquad\text{as }\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(\mu)\varepsilon^{i-j}\mu^j\geqslant\varphi_0(\varepsilon,\mu)\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\,\varepsilon^{i-j}\mu^j-\left[\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(\mu)\varepsilon^{i-j}\mu^j-\varphi_0(\varepsilon,\mu)\right]\exp[\lambda_1(x-\mu)]\\ \displaystyle\qquad+\left[\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j rl^{-1}\right](2\exp[\lambda_2(x-1+\mu)]-1)\\ \displaystyle\qquad\text{as }\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(\mu)\varepsilon^{i-j}\mu^j<\varphi_0(\varepsilon,\mu)\end{cases} \tag{2.4}$$

其中 $\mu\leqslant x\leqslant 1-\mu$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$，$0\leqslant\mu\leqslant\mu_1$，$r$ 是将在下面确定的正的常数，而 λ_1，λ_2 是 $\varepsilon\lambda^2+k\lambda+l=0$ 的两个根，l 是使得 $|f_y|\leqslant l$ 的某个正的常数．取 ε 如此地小，使得 $\varepsilon\leqslant k^2/4l$，因此 λ_1，λ_2 是负的实数，当 $0\leqslant\varepsilon\ll 1$ 时，我们把它表为：

$$\lambda_1=-\frac{k}{\varepsilon}+\frac{l}{k}+O(\varepsilon),\quad \lambda_2=-\frac{l}{k}+O(\varepsilon) \tag{2.5}$$

取 $\varepsilon_2=\min\left\{\varepsilon_1,\mu_1,\frac{k}{4l}\right\}$，当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2$，$0<\mu\leqslant\mu_1\leqslant\varepsilon_2$ 时我们建立某些关于 $\alpha(x,\varepsilon,\mu)$，$\beta(x,\varepsilon,\mu)$ 的关系式．

因为 $y_{i-j,j}(x)\in C^2[0,1]$ $(j=0,1,\cdots,i,\ i=0,1,\cdots,m)$，因此，关于 x 我们有

$$\left.\begin{aligned}&\alpha(x,\varepsilon,\mu)\in C^2[\mu,1-\mu]\subset C^2[0,1]\\&\beta(x,\varepsilon,\mu)\in C^2[\mu,1-\mu]\subset C^2[0,1]\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

和成立不等式：

$$\alpha(x,\varepsilon,\mu)\leqslant\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^j$$

$$\beta(x,\varepsilon,\mu)\geqslant\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^j$$

因此

$$\alpha(x,\varepsilon,\mu)\leqslant\beta(x,\varepsilon,\mu) \tag{2.7}$$

和因为

$$\alpha(\mu,\varepsilon,\mu)\leqslant\varphi_0(\varepsilon,\mu)-\left(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j rl^{-1}\right)(2\exp[-\lambda_2]-1)\leqslant\varphi_0(\varepsilon,\mu)$$

$$\beta(\mu,\varepsilon,\mu)\geqslant\varphi_0(\varepsilon,\mu)+\left(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j rl^{-1}\right)(2\exp[-\lambda_2]-1)\geqslant\varphi_0(\varepsilon,\mu)$$

因此我们有

$$\alpha(\mu,\varepsilon,\mu)\leqslant\varphi_0(\varepsilon,\mu)\leqslant\beta(\mu,\varepsilon,\mu) \tag{2.8}$$

因为 $\varphi_1(\varepsilon,\mu)\in C^\infty[0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1;0\leqslant\mu\leqslant\mu_1]$，因此

$$\left|\varphi_1(\varepsilon,\mu)-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}\varphi_1^{(i-j,j)}(0,0)\varepsilon^{i-j}\mu^j/(i-j)!j!\right|\leqslant\tau\left(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j\right)$$

其中 τ 是正的常数，如此我们有

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}\varphi_1^{(i-j,j)}(0,0)\varepsilon^{i-j}\mu^j[(i-j)!j!]^{-1}\leqslant\varphi_1(\varepsilon,\mu)+\tau\left(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j\right)$$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}\varphi_1^{(i-j,j)}(0,0)\varepsilon^{i-j}\mu^j[(i-j)!j!]^{-1}\geqslant\varphi_1(\varepsilon,\mu)-\tau\left(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j\right)$$

现在选择 r 使得 $r>l\tau$，从上面两个式子我们得到

$$\alpha(1-\mu,\varepsilon,\mu)\leqslant\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(1-\mu)\varepsilon^{i-j}\mu^j-\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j rl^{-1}$$

$$\leqslant\varphi_1(\varepsilon,\mu)+\tau\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j-\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j rl^{-1}\leqslant\varphi_1(\varepsilon,\mu)$$

$$\beta(1-\mu,\varepsilon,\mu)\geqslant\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(1-\mu)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}+\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}rl^{-1}$$

$$\geqslant\varphi_1(\varepsilon,\mu)-\tau\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}+\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}rl^{-1}\geqslant\varphi_1(\varepsilon,\mu)$$

因此我们有

$$\alpha(1-\mu,\varepsilon,\mu)\leqslant\varphi_1(\varepsilon,\mu)\leqslant\beta(1-\mu,\varepsilon,\mu)\tag{2.9}$$

借助于中值定理我们得到

$$f(x,\alpha,\alpha',\varepsilon,\mu)=f\Big(x,\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j},\ \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y'_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j},\varepsilon,\mu\Big)$$
$$+f_y\{\cdot\}\Big(\alpha-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}\Big)$$
$$+f_{y'}\{\cdot\}\Big(\alpha'-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y'_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}\Big)\tag{2.10}$$

$$f(x,\beta,\beta',\varepsilon,\mu)=f\Big(x,\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j},\ \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y'_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j},\varepsilon,\mu\Big)$$
$$+f_y\{\cdot\cdot\}\Big(\beta-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}\Big)$$
$$+f_{y'}\{\cdot\cdot\}\Big(\beta'-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y'_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}\Big)\tag{2.11}$$

其中

$$\{\cdot\}=\Big\{x,\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}+\theta_1\Big(\alpha-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}\Big),$$
$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y'_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}+\theta_2\Big(\alpha'-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y'_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}\Big),\varepsilon,\mu\Big\}$$

$$\{\cdot\cdot\}=\Big\{x,\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}+\theta_3\Big(\beta-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}\Big),$$
$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y'_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}+\theta_4\Big(\beta'-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y'_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}\Big),\varepsilon,\mu\Big\}$$
$$(0<\theta_i<1,\quad i=1,2,3,4)$$

由于 $f(x,y_{0,0},y'_{0,0},0,0)=0$ 和 $y_{i-j,j}(x)$ $(j=0,1,\cdots,i;i=1,2,\cdots,m)$ 满足 (1.11)，回想起(1.10)我们得到

$$f\Big(x,\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j},\ \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y'_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j},\varepsilon,\mu\Big)$$
$$=f(x,y_{0,0},y'_{0,0},0,0)+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}[f_y(x,y_{0,0},y'_{0,0},0,0)y_{i-j,j}$$
$$+f_{y'}(x,y_{0,0},y'_{0,0},0,0)y'_{i-j,j}+G_{i-j,j}(x,y_{0,0},\cdots,y_{i-j,j-1};y'_{0,0},\cdots,y'_{i-j,j-1})$$
$$-y''_{i-j-1,j}+y''_{i-j-1,j}]\varepsilon^{i-j}\mu^{j}+O\Big(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{i-j}\mu^{j}\Big)$$

$$=\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{i}y''_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}+O\Big(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}\Big)$$

因此，我们有

$$f\Big(x,\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j},\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y'_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j},\varepsilon,\mu\Big)$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{i}y''_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}+\sigma\Big(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}\Big)\tag{2.12}$$

$$f\Big(x,\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j},\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y'_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j},\varepsilon,\mu\Big)$$

$$\geqslant\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{i}y''_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}-\sigma\Big(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}\Big)\tag{2.13}$$

其中 σ 是正的常数.

想到(2.10)～(2.13)和 $|y''_{i,j}(x)|\leqslant M$, M 是一个常数, $i+j=m$ 和 λ_1, λ_2 是 $\lambda^2+k\lambda+l=0$ 的两个根，我们进一步选择 $r=\max\{\tau,M+\sigma\}$，则当

$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(\mu)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}\geqslant\varphi_0(\varepsilon,\mu)$ 时，我们得到

$$\varepsilon\alpha''(x,\varepsilon,\mu)-f(x,\alpha,\alpha',\varepsilon,\mu)\geqslant\varepsilon\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y''_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}$$

$$-\varepsilon\lambda_1^2\Big[\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(\mu)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}-\varphi_0(\varepsilon,\mu)\Big]\exp[\lambda_1(x-\mu)]$$

$$-2\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}\varepsilon\lambda_2^2rl^{-1}\exp[\lambda_2(x-1+\mu)]-\Big(\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{i}y''_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}$$

$$+\sigma\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}\Big)-l\Big[\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(\mu)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}-\varphi_0(\varepsilon,\mu)\Big]\exp[\lambda_1(x-\mu)]$$

$$-\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}lrl^{-1}(2\exp[\lambda_2(x-1+\mu)]-1)$$

$$-k\lambda_1\Big[\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(\mu)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}-\varphi_0(\varepsilon,\mu)\Big]\exp[\lambda_1(x-\mu)]$$

$$-2\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}k\lambda_2rl^{-1}\exp[\lambda_2(x-1+\mu)]$$

$$\geqslant\Big(-\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}M-\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}\sigma+\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}r$$

$$-(\varepsilon\lambda_1^2+k\lambda_1+l)\Big[\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(\mu)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}-\varphi_0(\varepsilon,\mu)\Big]\exp[\lambda_1(x-\mu)]$$

$$-(\varepsilon\lambda_2^2+k\lambda_2+l)\cdot 2\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j r l^{-1}\exp[\lambda_2(x-1+\mu)]$$

$$=\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j(-M-\sigma+r)\geqslant 0 \qquad (\mu<x<1-\mu)$$

$$\varepsilon\beta''(x,\varepsilon,\mu)-f(x,\beta,\beta',\varepsilon,\mu)\leqslant\varepsilon\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y''_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^j$$

$$+2\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j\varepsilon\lambda_2^2 r l^{-1}\exp[\lambda_2(x-1+\mu)]$$

$$-\left(\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^j-\sigma\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j\right)$$

$$+\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j l r l^{-1}(2\exp[-\lambda_2(x-1+\mu)]-1)$$

$$+2\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j k\lambda_2 r l^{-1}\exp[\lambda_2(x-1+\mu)]$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j(M+\sigma-r)+(\varepsilon\lambda_2^2+k\lambda_2+l)\left[2\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j r l^{-1}\exp[\lambda_2(x-1+\mu)]\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j(M+\sigma-r)\leqslant 0 \qquad (\mu<x<1-\mu)$$

类似地，我们可以证明当$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(\mu)\varepsilon^{i-j}\mu^j<\varphi_0(\varepsilon,\mu)$时下列的不等式：

$$\varepsilon\alpha''(x,\varepsilon,\mu)\geqslant f(x,\alpha,\alpha',\varepsilon,\mu) \qquad (\mu<x<1-\mu) \tag{2.14}$$

$$\varepsilon\beta''(x,\varepsilon,\mu)\leqslant f(x,\beta,\beta'\varepsilon,\mu) \qquad (\mu<x<1-\mu) \tag{2.15}$$

根据关于 $\alpha(x,\varepsilon,\mu)$，$\beta(x,\varepsilon,\mu)$的关系式(2.6)～(2.9)，(2.14)～(2.15)和利用Nagumo定理[10],[11]，我们知道边值问题有一个解 $y(x,\varepsilon,\mu)$和下面的不等式成立：

$$\alpha(x,\varepsilon,\mu)\leqslant y(x,\varepsilon,\mu)\leqslant\beta(x,\varepsilon,\mu) \qquad (\mu\leqslant x\leqslant 1-\mu)$$

顾及(2.3)、(2.4)我们得到

$$\left|y(x,\varepsilon,\mu)-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^j\right|\leqslant\left|\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(\mu)\varepsilon^{i-j}\mu^j-\varphi_0(\varepsilon,\mu)\right|\exp[\lambda_1(x-\mu)]$$

$$+\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^j l^{-1}[2\exp[\lambda_2(x-1+\mu)]-1] \qquad (\mu\leqslant x\leqslant 1-\mu)$$

从(2.5)我们得到下面的估计式：

$$y(x,\varepsilon,\mu)-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}=O\left(\exp\left[-\frac{k(x-\mu)}{\varepsilon}\right]\right)+O\left(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}\right)$$

定理 1 证毕.

注：当$f_{y'}\geqslant k>0$时，在相应的假设下，边值问题(1.3)～(1.5)的退化问题如下：

$$f(x,y,y',0,0)=0 \quad (0<x<1)$$

$$y(0,0,0)=\varphi_0(0,0)$$

它的解表为$y_{0,0}(x)$和用上述类似的方法，我们逐次地找到$y_{i-j,j}(x)$ $(j=0,1,\cdots,i;i=1,2,\cdots,m)$. 则存在问题(1.3)～(1.5)的一个解$y(x,\varepsilon,\mu)$和类似的下面估计式成立：

$$y(x,\varepsilon,\mu)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}=O\left(\exp\left[\frac{-k(1-x-\mu)}{\varepsilon}\right]\right)+O\left(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}\right)$$

$$(\mu\leqslant x\leqslant 1-\mu,\ 0<\varepsilon,\mu\ll 1)$$

三、例

为了说明我们的结果，我们研究下面的边值问题：

$$\varepsilon y''=ly-ky'+\varepsilon y'^2 \tag{3.1}$$

$$y(x,\varepsilon,\mu)|_{x=\mu}=\log(1+\varepsilon+\mu),\quad y(x,\varepsilon,\mu)|_{x=1-\mu}=e^{\varepsilon+\mu} \tag{3.2}$$

其中l，m和k是正的常数.

证明：显然定理 1 的条件(a)～(e)除了(c)外都满足. 即$\dfrac{\partial f}{\partial y'}\leqslant -K<0$不是直接的. 为了检查这个条件，我们利用 Heidel[12]的结果. 即古典的 Nagumo 条件概括为这样的条件，有一个数$N>0$使得在某个区间$J\in[0,1]$上每一个解$y(t)$满足$\alpha(t)\leqslant y(t)\leqslant\beta(t)$，由此得出在$J$上$|y'(t)|\leqslant N$，其中$\alpha(t)$，$\beta(t)$是界定函数. 从而我们有当$\varepsilon<\dfrac{1}{2N}$，$0<K<k-1$时$\dfrac{\partial f}{\partial y'}=-k+2\varepsilon y'\leqslant -k+1\leqslant K<0$. 因此，借助于定理 1 得问题(3.1)、(3.2)有一个解$y(x,\varepsilon,\mu)$和成立如下的估计式：

$$y(x,\varepsilon,\mu)-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}y_{i-j,j}(x)\varepsilon^{i-j}\mu^{j}=O\left(\exp\left[-\frac{K(x-\mu)}{\varepsilon}\right]\right)+O\left(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^{m+1-j}\mu^{j}\right)$$

其中$y_{0,0}(x)=\exp\left[\dfrac{l(x-1)}{k}\right]$是退化问题：

$$ky'_{0,0}-ly_{0,0}=0$$

$$y_{0,0}(1)=1$$

的解，而$y_{i-j,j}(x)$ $(j=0,1,\cdots,i;i=1,2,\cdots,m)$是问题

$$ky'_{i-j,j}-ly_{i-j,j}=2y'_{i-j-1,0}+y'^{2}_{\frac{i-1}{2}-1,\ \frac{j}{2}}-y''_{i-j-1,j}$$

$$y_{i-j,j}(1)=\frac{1}{(i-j)!j!}-\sum_{k=1}^{j}y^{(k)}_{i-j,j-k}(1)/k!$$

的解.

参 考 文 献

[1] Брит Н. И., О краевых задачах для уравнения $\varepsilon y''=(x,y,y')$ при малых ε, *ДАН СССР*, 95(1954),429—432.

[2] O'malley, Jr., R. E., Boundary layer methods for ordinary differential equations with small coefficients multiplying the highest derivatives, *Proc. Symp. on Constructive and Computational Methods for Differential and Integral Equations*, Springer Verlag Lecture Notes in Mathematics, Vol. 430 (1974), 363—389.

[3] O'malley, R. E., *Introduction to Singular Perturbations*, Academic Press, New York (1974).

[4] Chang, K. W., Approximate solution of nonlinear boundary value problems involving a small parameter, *SIAM J. Appl. Math.*, 26, 3(1974), 554—567.

[5] Howes, F. A., Effective characterization of the asymptotic behavior of solutions of singularly perturbed boundary value problem, *SIAM J. Appl. Math.*, 30, 2 (1976), 296—306.

[6] Линь Цзун-чи, Возмущение решений дифференциального уравнения второго порядка при возмущении границы, Вестник Московского Университета, Серия 1, Математика, Механика, 6 (1964), [*Mathematical Reviews U. S. A.*, 33, 3 (1967), 2898].

[7] Линь Цзун-чи, Асимптотика решений линейных дифференциальных уравнений при сочетании возмущения границы с возмущением оператора, *УМН СССР*, 19, 5 (1964), 201—203.

[8] 林宗池、林元刚、郑永树，在边界摄动的情况下高阶常微分方程解的摄动，福建师大学报（自然科学版），2 (1978), 1—13.

[9] 林宗池，一个带有双摄动的特征值问题，应用数学学报，1, (1984), 130—135.

[10] Jackson, L. K., Subfunctions and second-order ordinary differential inequalities, *Advances in Math.*, 2 (1968), 307—363.

[11] Nagumo, M., Uber die differentialgleichung $y''=f(x,y,y')$, *Proc. Phys. Math. Soc. of Japan* (1937), 861—866.

[12] Heidel, J. W., A second-order nonlinear boundary value problem, *J. of Math. and Appl.*, 48(1974), 493—503.

Singular Perturbation of Nonlinear Boundary Value Problem

K. W. Chang

(University of Calgary, Canada)

Lin Zong-chi

(Fujian Normal University, Fuzhou)

Abstract

In this paper we consider the boundary value problem

$$\varepsilon y'' = f(x, y, y', \varepsilon, \mu) \qquad \mu < x < 1-\mu$$

$$y(x, \varepsilon, \mu)|_{x=\mu} = \varphi_0(\varepsilon, \mu)$$

$$y(x, \varepsilon, \mu)|_{x=1-\mu} = \varphi_1(\varepsilon, \mu)$$

where ε, μ are two positive parameters. Under $f_{y'} \leqslant -k < 0$ and other suitable restrictions, there exists a solution and satisfies

$$y(x, \varepsilon, \mu) - \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} y_{i-j,j}(x)\, \varepsilon^{i-j} \mu^{j} = O\left(\exp\left[-\frac{k(x-\mu)}{\varepsilon}\right]\right) + O\left(\sum_{j=0}^{m+1} \varepsilon^{m+1-j} \mu^{j}\right)$$

where $y_{0,0}(x)$ is a solution of reduced problem

$$f(x, y, y', 0, 0) = 0 \qquad 0 < x < 1$$

$$y(1, 0, 0) = \varphi_1(0, 0)$$

while $y_{i-j,j}(x)$ $(j = 0, 1, \cdots, i;\ i = 1, 2, \cdots, m)$ can be obtained successively from certain linear equations.