应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

弹性理论中各种变分原理的分类

钱 伟 长

（上海工业大学，1984年2月20日收到）

摘　要

本文按弹性理论中各种变分原理的约束条件的不同，对所有变分原理进行分类．我们在前文[4]中业已指出，应力应变关系这样的约束条件是不能用拉氏乘子法解除的．剩下的可能约束条件共有四种：（1）平衡方程，（2）应变位移关系，（3）边界外力已知的边界条件，和（4）边界位移已知的边界条件．弹性理论的各种变分原理中，有的只有一种约束条件，有的有两种或三种，最多只能有四种约束条件．这样一共可能有15种变分原理，但是每种变分原理既可以用应变能 A 表示，又可以用余能 B 表示．这样，我们一共应有30种形式完全不同的变分原理，我们全部列出了这三十种形式的变分原理．

一、引　言

胡海昌(1981)[1]，(1983)[2]曾"按照变分法所反映的客观规律进行分类"，把弹性力学平衡问题的变分原理划分为11类，其中有第6第11两类，是"目前还未搞出来"的．

胡海昌的分类有两方面的缺点，（1）胡氏误认为胡海昌-鹫津久一郎变分原理是一个完全解除了约束条件的广义变分原理，其实应力应变关系仍为胡-鹫原理的约束条件（证明见钱伟长(1983)[3]，[4]）．本文作者曾证明[4]，不论海林格-赖斯纳原理，或是胡-鹫原理，或是其它原理，人们都无法通过线性拉氏乘子法，解除应力应变关系的变分约束条件．胡氏分类法中，把应力应变关系看作为"变分原理所（可能）反映的客观规律"看待，就是承认我们有办法消除这类约束的．胡氏的分类法就是建立在这种错误的认识基础上的，无怪按胡氏的分类中，会出现"目前还未搞出来"的两大类变分原理这样的怪事．（2）胡氏把变分所得的自然条件分为三类，即平衡条件，连续条件，和应力应变关系三种．称之谓"变分原理所反映的客观规律"．除了应力应变关系不可能按线性拉氏乘子法化为自然条件从而使它被当作自然条件不合理外，胡氏把平衡方程和外力已知边界条件都归入平衡条件一类，应变位移关系和位移已知边界条件都归入连续条件一类，这样就排除了平衡方程和位移已知边界条件作为约束条件，应变位移关系和外力已知的边界条件作为自然条件的一类变分原理，也排除了应变位移关系和外力已知边界条件作为约束条件，平衡方程和位移已知边界条件作为自然条件的一类变分原理．还有一些不完全的广义变分原理也排除在这种分类之外．

本文按泛函所受的变分约束条件的不同来分类．在这种分类的结果中，一切都有明确泛函表达式，没有出现像胡氏分类法中那些"目前还未搞出来"的情况．

二、按变分约束条件分类

本文将对弹性理论中各种变分原理按变分约束条件来进行分类。我们可以看见：

（1） 所有各种变分原理，除了采用高阶拉氏乘子法求得的更一般的广义原理外，在变分时，泛函都受到应力应变关系的约束(见[4])。

（2） 在受到应力应变关系约束的上述各种变分原理中，只涉及剩下的四个物理条件，即

(a) 平衡方程 $\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0$ （在τ中） （1）

(b) 应变位移方程 $e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0$ （在τ中） （2）

(c) 外力已知边界条件 $\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i=0$ （在S_p上） （3）

(d) 位移已知边界条件 $u_i-\bar{u}_i=0$ （在S_u上） （4）

（3） 在受到应力应变关系的上述变分原理中，设尚有n个约束条件，和设由变分导出的自然条件为m个，则

$$n+m=4 \qquad (5)$$

（4） 在泛函内，不论应用应变能密度或用余能密度表示，只要所受约束条件相同，变分导出的自然条件也必相同，而这两者的变分泛函一定等价。

除$n=4$（即全部都是约束条件）外，其它一共有$n=3$的4种，$n=2$的6种，$n=1$的4种，$n=0$的1种，共15种不同约束条件的泛函。每一种泛函都有用应变能密度表示和余能密度表示两种表示方法，但这两种表示法都是一一等价的。所以，在受到应力应变关系约束的变分原理中，理论上共有30种不同的泛函，其中有一半用应变能密度表示，一半用余能密度表示。例如海林格-赖斯纳变分原理（Π_{HR}）和胡-鹫原理（Π_{HW}）就是除了应力应变关系的约束外，不再受有任何其它约束（$n=0$）的广义变分原理，而且又是相互等价的变分原理。最小位能原理（Π_P）除了应力应变关系的约束外，还受有(b)应变位移关系和(d)位移已知边界条件的两种约束的，并以应变能密度表示的变分原理，$n=2$。最小余能原理的n也等于2，但所受约束不同，它除了应力应变关系外，还受有(a)平衡条件和(c)外力已知的边界约束条件。为了简单标明各种不同的变分原理，我们用5标号法。第一标号在泛函标号Π的右上角，或为P或为C，P表示采用应变能密度的表达式，C表示采用了余能密度的表达式，第2，3，4，5标号写在右下角。右下角的第一标号为a或o，a表示以平衡方程为约束，o表示不以平衡方程为约束。第二标号为b或o，b表示以应变位移关系为约束，o表示不以应力应变关系为约束。第三标号为c或o，c表示以外力已知边界条件为约束，o表示不以外力已知边界条件为约束。最后一个标号为d或o，d表示以位移已知边界条件为约束，o表示不以位移已知边界条件为约束。于是海林格-赖斯纳原理的泛函标号可以写成Π^C_{oooo}，而胡-鹫原理的泛函标号可以写成Π^P_{oooo}，最小位能的泛函标号为Π^P_{obod}，最小余能原理的标号为Π^C_{aoco}。

根据这个标号原则，我们制成下列分类表，即表1。

三、分类表中各泛函的建立

分类表中的第一号和第二号，标号为Π^C_{oooo}和Π^P_{oooo}，分别为海林格-赖斯纳原理和胡-鹫

表 1　　各种广义变分原理（其约束条件除应力应变关系外还有下列各项）

约束条件（除应力应变关系外）

(a) $\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0$ （在τ内），　　(c) $\sigma_{ij}n_j=\bar{p}_i$ （在S_p上）

(b) $e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$ （在τ内），　　(d) $u_i=\bar{u}_i$ （在S_u上）

$A(e)$＝应变能密度，$B(\sigma)$＝余能密度

编号	标号（原用标号）	变分原理泛函
1	Π^C_{oooo} (Π_{HR})	$\iiint_\tau \{B+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)u_i\}d\tau-\iint_{S_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i dS-\iint_{S_p}u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS$
2	Π^P_{oooo} (Π_{HW})	$\iiint_\tau \left\{A-\sigma_{ij}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)-\bar{F}_iu_i\right\}d\tau-\iint_{S_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS-\iint_{S_p}\bar{p}_iu_i dS$
3	Π^C_{aooo}	$\iiint_\tau B(\sigma)d\tau-\iint_{S_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i dS-\iint_{S_p}u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS$
4	Π^P_{aooo}	$\iiint_\tau (A-e_{ij}\sigma_{ij})d\tau+\iint_{S_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i dS+\iint_{S_p}u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS$
5	Π^C_{oboo}	$\iiint_\tau (B-e_{ij}\sigma_{ij}+\bar{F}_iu_i)d\tau+\iint_{S_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS+\iint_{S_p}\bar{p}_iu_i dS$
6	Π^P_{oboo}	$\iiint_\tau (A-\bar{F}_iu_i)d\tau-\iint_{S_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS-\iint_{S_p}\bar{p}_iu_i dS$
7	Π^C_{ooco}	$\iiint_\tau \{B+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)u_i\}d\tau-\iint_{S_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i dS$
8	Π^P_{ooco}	$\iiint_\tau \{A-e_{ij}\sigma_{ij}-(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)u_i\}d\tau+\iint_{S_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i dS$
9	Π^C_{oood}	$\iiint_\tau (B-\sigma_{ij}u_{i,j}+\bar{F}_iu_i)d\tau+\iint_{S_p}\bar{p}_iu_i dS$
10	Π^P_{oood}	$\iiint_\tau \left\{A-\sigma_{ij}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)-\bar{F}_iu_i\right\}d\tau-\iint_{S_p}\bar{p}_iu_i dS$
11	Π^C_{aboo}	$\iiint_\tau (B-\sigma_{ij}e_{ij}-\sigma_{ij,j}u_i)d\tau+\iint_{S_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS+\iint_{S_p}\bar{p}_iu_i dS$
12	Π^P_{aboo}	$\iiint_\tau (A+\sigma_{ij,j}u_i)d\tau-\iint_{S_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS-\iint_{S_p}\bar{p}_iu_i dS$
13	Π^C_{aoco} (Π_C)	$\iiint_\tau B d\tau-\iint_{S_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i dS$

续表

编 号	标 号（原用标号）	变 分 原 理 泛 函
14	Π^{P}_{aoco}	$\iiint\limits_{\tau}(A-e_{ij}\sigma_{ij})d\tau+\iint\limits_{S_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i dS$
15	Π^{C}_{aood}	$\iiint\limits_{\tau} B d\tau-\iint\limits_{S_u}\sigma_{ij}n_j u_i dS-\iint\limits_{S_p}u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS$
16	Π^{P}_{aood}	$\iiint\limits_{\tau}(A-e_{ij}\sigma_{ij})d\tau+\iint\limits_{S_u}\sigma_{ij}n_j u_i dS+\iint\limits_{S_p}u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS$
17	Π^{C}_{obco}	$\iiint\limits_{\tau}(B-e_{ij}\sigma_{ij}+\bar{F}_i u_i)d\tau+\iint\limits_{S_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS+\iint\limits_{S_p}\sigma_{ij}n_j u_i dS$
18	Π^{P}_{obco}	$\iiint\limits_{\tau}(A-\bar{F}_i u_i)d\tau-\iint\limits_{S_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS-\iint\limits_{S_p}\sigma_{ij}n_j u_i dS$
19	Π^{C}_{obod}	$\iiint\limits_{\tau}(B-e_{ij}\sigma_{ij}+\bar{F}_i u_i)d\tau+\iint\limits_{S_p}\bar{p}_i u_i dS$
20	Π^{P}_{obod} (Π_P)	$\iiint\limits_{\tau}(A-\bar{F}_i u_i)d\tau-\iint\limits_{S_u}\bar{p}_i u_i dS$
21	Π^{C}_{oocd}	$\iiint\limits_{\tau}\{B+(\sigma_{ij,j}+F_i)u_i\}d\tau-\iint\limits_{S_u}\sigma_{ij}n_j u_i dS$
22	Π^{P}_{ooca}	$\iiint\limits_{\tau}\{A-e_{ij}\sigma_{ij}-(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)u_i\}d\tau+\iint\limits_{S_u}\sigma_{ij}n_j u_i dS$
23	Π^{C}_{obca}	$\iiint\limits_{\tau}(B+F_i u_i-\sigma_{ij}e_{ij})d\tau+\iint\limits_{S_p}\sigma_{ij}n_j u_i dS$
24	Π^{P}_{obcd}	$\iiint\limits_{\tau}(A-F_i u_i)d\tau-\iint\limits_{S_p}\sigma_{ij}n_j u_i dS$
25	Π^{C}_{aocd}	$\iiint\limits_{\tau}B d\tau-\iint\limits_{S_u}\sigma_{ij}n_j u_i dS$
26	Π^{P}_{aoca}	$\iiint\limits_{\tau}(A-e_{ij}\sigma_{ij})d\tau+\iint\limits_{S_u}\sigma_{ij}n_j u_i dS$
27	Π^{C}_{aboa}	$\iiint\limits_{\tau}(B-e_{ij}\sigma_{ij}-\sigma_{ij,j}u_i)d\tau+\iint\limits_{S_p}\bar{p}_i u_i dS$
28	Π^{P}_{aboa}	$\iiint\limits_{\tau}(A+\sigma_{ij,j}u_i)d\tau-\iint\limits_{S_p}\bar{p}_i u_i dS$

续表

编号	标号(原用标号)	变分原理泛函
29	Π^{c}_{abco}	$\iiint_\tau(B-e_{ij}\sigma_{ij}-\sigma_{ij,j}u_i)d\tau+\iint_{S_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS+\iint_{S_p}\sigma_{ij}n_ju_idS$
30	Π^{p}_{abco}	$\iiint_\tau(A+\sigma_{ij,j}u_i)d\tau-\iint_{S_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS-\iint_{S_p}\sigma_{ij}n_ju_idS$

原理．它们都是已知的，还有第十三号 Π^{c}_{aooo} 和第二十号 Π^{p}_{obod}，分为位能原理和余能原理，它们也都是已知的．

从第三号至第十号泛函中，都只有一个约束条件．它们都可以从 Π^{c}_{oooo}和Π^{p}_{oooo} 中推导求得．例如，如果把约束条件(a)，即 $\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0$，代入 Π^{c}_{oooo}，亦即把 Π^{c}_{oooo} 的第二项 $(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)u_i$置于零，即得$\Pi^{c}_{aooo}$，这就求得了第三式．由于所有这些泛函都是受应力应变关系约束的．因此，如果用$B=-A+\sigma_{ij}e_{ij}$将 Π^{c}_{aooo} 中的B换置成$-A+\sigma_{ij}e_{ij}$，则所得泛函应该就是用应变能密度表示的并受平衡方程(a)约束的变分原理的泛函．为了使泛函中的 A 或B 都用正号表示，我们可以将这样换置后的泛函的正负号逐项改换，即得Π^{p}_{aooo}，这就是第四号泛函．

泛函五号六号可以用相同方法求得。将约束条件(b)，即$e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0$，代入$\Pi^{p}_{oooo}$，即得$\Pi^{p}_{oboo}$．将$\Pi^{p}_{oboo}$改变正负号，并用$-B+\sigma_{ij}e_{ij}$代替$A$，即得$\Pi^{c}_{oboo}$．

泛函七号八号可以将约束条件(c)，即$\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i=0$，代入 Π^{c}_{oooo}求得 Π^{c}_{oooo}，然后改变正负号，并用$A-e_{ij}\sigma_{ij}$代替$-B$，即得Π^{p}_{oooo}．

泛函九号十号可以将约束条件(d)；即 $u_i-\bar{u}_i=0$，代入 Π^{p}_{oooo} 入手，即能相似地求得Π^{p}_{oood}，Π^{c}_{oood}．

泛函十一号至十六号可以在泛函五号至十号中将$\bar{F}_iu_i$改写成$-\sigma_{ij,j}u_i$而求得．

如果把Π^{c}_{oboo}，Π^{p}_{oboo}，Π^{c}_{oood}，Π^{p}_{oood}中的$\bar{p}_i$改写为$\sigma_{ij}n_j$，即分别引进约束条件(c)，得Π^{c}_{obco}，Π^{p}_{obco}，Π^{c}_{oocd}，Π^{p}_{oocd}．或即十七，十八，二十一，二十二号诸泛函．

如果把约束条件$u_i-\bar{u}_i=0$代入Π^{c}_{oboo}，Π^{p}_{oboo}，即得Π^{c}_{obod}，Π^{p}_{obod}，即十九，廿号泛函．

从Π^{c}_{obco}，Π^{p}_{obco}中引入$u_i-\bar{u}_i=0$，即得Π^{c}_{obcd}，Π^{p}_{obcd}．或即廿三，廿四号泛函．

从Π^{c}_{aood}，Π^{p}_{aood}中引入$\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i=0$，即得$\Pi^{c}_{aocd}$ Π^{p}_{aocd}，或即廿五、廿六号泛函．

从Π^{c}_{aboo}，Π^{p}_{aboo}中引入$u_i-\bar{u}_i=0$，即得Π^{c}_{abod}，Π^{p}_{abod}，或即廿七，廿八号泛函．

从Π^{c}_{aboo}，Π^{p}_{aboo}中将$\sigma_{ij}n_j$替代$\bar{p}_i$，即得Π^{c}_{abco} Π^{p}_{abco}；或即廿九，三十号泛函．

如果在表1中各泛函上增加$\iiint_\tau\lambda(A+B-e_{ij}\sigma_{ij})d\tau$一项，即得解除了应力应变关系约束的广义变分原理的各种泛函．这类泛函也有30种．

四、按变分求得的自然条件进行分类

本文所述，是按变分约束条件来进行分类的．当然，我们也可以用变分所得自然条件进

行分类．自然条件有两种，一种是变分所得的欧拉方程，如平衡方程和应变位移关系都是欧拉方程，另一种自然条件是自然边界条件，如外力已知边界条件和位移已知边界条件都可以是自然边界条件．例如Π^C_{oocd}，Π^P_{oocd}的自然条件都是欧拉方程，而Π^C_{aboo}，Π^P_{aboo}的自然条件则都是自然边界条件．

变分中，约束条件和自然条件是互补的．这些条件合在一起是解题的全部条件．因此，用约束条件分类和用自然条件分类所得结果应该是相同的．

胡海昌所说的"按照变分法所反映的客观规律进行分类"实际上就是按变分所得自然条件进行分类．为什么胡氏分类法得到一片混乱的结果呢？主要原因还是胡海昌不肯承认在胡-鹫原理中应力应变关系是约束条件这一事实而已．当然，胡海昌也不承认有约束边界条件这一事实，而硬说，"有无条件是一个古老的数学概念．……有时甚至不包括边界条件"．

参 考 文 献

[1] 胡海昌，《弹性力学中的变分原理及其应用》，科学出版社（1981）．

[2] 胡海昌，弹性力学变分原理简介，北京力学学会印（1982年10月）．

[3] 钱伟长，高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理，应用数学和力学，4，2（1983），137—150．

[4] 钱伟长，再论弹性力学中的广义变分原理——就等价定理问题和胡海昌先生商榷，力学学报，4（1983），325—340．

Classification of Variational Principles in Elasticity

Chien Wei-zang

(Shanghai University of Technology, Shanghai)

Abstract

In this paper, variational principles in elasticity are classified according to the differences in the constraints used in these principles. It is shown in a previous paper[4] that the stress-strain relations are the constraint conditions in all these variational principles, and can not be removed by the method of linear Lagrange multiplier. The other possible constrants are four of them: (1) equations of equilibrium, (2) Strain-displacement relations, (3) boundary conditions of given external forces and boundary conditions of given boundary displacements. In variational principles of elasticity, some of them have only one kind of such constraints, some have two kinds or three kinds of constraints and at the most four kinds of constraints. Thus, we have altogether 15 kinds of possible variational principles. However, for every possible variational principle, either the strain energy density or the complementary energy density may be used. Hence, there are altogether 30 classes of functionals of variational principles in elasticity. In this paper, all these functionals are tabulated in detail.