

# 非线性系统动态响应的数值计算方法\*

郑兆昌 谭明一

(清华大学, 1983年12月4日收到)

## 摘 要

文[9]曾将一种模态综合技术推广到非线性系统的动态响应分析, 应用于线性子结构具有非线性连接件耦合系统的振动分析. 本文进一步把模态综合技术推广到各子结构具有非线性特性大型复杂结构的动态分析. 文末给出的算例表明本方法具有良好的精确度和很高的计算效率.

## 一、引 言

随着有限元方法和计算技术的不断发展, 对于复杂结构系统进行线性、非线性的静力分析都已有编制的通用程序可供利用. 但是对于动力分析的问题仍然面临过高的自由度和有限的存贮和机时的矛盾. 近廿年来发展起来的模态综合技术(动态子结构方法)<sup>[1]~[7]</sup>对线性系统进行自由度的减缩已取得了显著的成效, 并被广泛应用于从宇航到机械等各种工业部门对产品进行动力特性的分析. 当系统具有非线性特性时, 已发展了很多数值积分方法<sup>[8]</sup>可供计算上应用, 当自由度过高时, 这些数值方法所耗机时也是惊人的. 文[9]中提出了一种具有非线性耦合件的系统的模态综合方法, 从而把模态综合方法推广到非线性系统, 简单的算例表明模态综合法扩展到非线性系统是有效的. 本文将把模态综合方法推广到一般具有全局的非线性系统, 而后可以在较低的自由度下利用已成熟的非线性数值计算方法. 为了计算上的方便起见, 暂时我们的讨论限于一些拟线性系统(虽然这是不必要的), 此外假设载荷成份中主要是低频的, 高频成分可以略去. 简单的算例表明本方法对缩减自由度的效率很高并具有良好的计算精度.

## 二、子结构的分析

按照通常的各种模态综合方法, 对任何一个复杂结构系统可以划分为若干子结构, 或称子系统, 并对子系统进行模态分析以获得综合所需的模态信息.

现在写出任一子系统  $g$  的有限元离散方程

$$m^{(g)}\ddot{x}^{(g)} + R^{(g)}(x^{(g)}, \dot{x}^{(g)}) = r^{(g)}(t) + \bar{f}^{(g)} \quad (2.1)$$

\* 钱伟长推荐.

本文曾收集在“非线性力学论文集第四分册”, 1982. 10, 无锡.

其中角标( $g$ )表示子系统编号,为方便起见,以下在不混淆的情况下将省略,各符号分别代表如下:

$m^{(g)}$ ——质量矩阵,

$x^{(g)}$ ——位移列矢量,  $R^{(g)}(x, \dot{x})$ ——非线性力矢量,

$r^{(g)}(t)$ ——外激励力矢量,  $\bar{f}_j^{(g)}$ ——由界面力组成的力矢量,

对于一般结构系统,质量矩阵为常数矩阵,并设系统为拟线性系统,非线性力可表达为

$$R^{(g)}(x, \dot{x}) = k^{(g)}x + c^{(g)}\dot{x} + \varepsilon f_N^{(g)}(x, \dot{x}) \quad (2.2)$$

其中 $\varepsilon$ 为小参数,并记

$k^{(g)}$ ——线性刚度矩阵,  $c^{(g)}$ ——线性阻尼矩阵,  $\varepsilon f_N^{(g)}(x, \dot{x})$ ——非线性力矢量部分。

于是子系统方程(2.1)可表达为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = r(t) + \bar{f}_j - \varepsilon f_N \quad (2.1)'$$

现在来讨论方程(2.1)'的 $\varepsilon$ 零阶近似线性齐次无阻尼方程

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.3)$$

这样我们可以把各子系统的非线性方程均按 $\varepsilon$ 的零阶近似得到一组无阻尼线性常微分方程。应用任何一种成熟的模态综合技术,就可以进行自由度的缩减,现在分别以固定界面法和修正的自由界面法来说明这种缩减的步骤。

### (1) 固定界面法

把座标 $x$ 分为界面座标 $x_j$ 和内部座标 $x_i$ ,方程(2.3)可写成

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_j \end{bmatrix} = 0 \quad (2.4)$$

当界面全部约束时,即 $x_j = 0$ ,得固定界面的运动方程

$$m_{ii}\ddot{x}_i + k_{ii}x_i = 0 \quad (2.5)$$

当子结构无惯性效应时,得静力方程

$$k_{ii}x_i + k_{ij}x_j = 0$$

即

$$x_i = -k_{ii}^{-1}k_{ij}x_j \quad (2.6)$$

由(2.5)可以求得固定界面主模态,并只取低阶保留主模态 $\psi_k$ 。由(2.6)当 $x_j$ 逐个释放取单位位移时,即得全部约束模态 $\psi_j$ 。关于模态减缩的原则和线性系统中论述一样<sup>[3][17]</sup>,这里就不再叙述了。于是进行座标变换如下

$$x = \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_k & \psi_j \\ 0 & I_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_k \\ x_j \end{bmatrix} = [\psi] \begin{bmatrix} q_k \\ x_j \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

代入方程(2.1)'并前乘 $\psi^T$ 得如下方程

$$\begin{bmatrix} I_k & \bar{m}_{kj} \\ \bar{m}_{jk} & \bar{m}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_k \\ \ddot{x}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{kk} & \bar{c}_{kj} \\ \bar{c}_{jk} & \bar{c}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_k \\ \dot{x}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Lambda_k & \\ & \bar{k}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_k \\ x_j \end{bmatrix} = \psi^T \bar{f}_j + \psi^T r - \varepsilon \psi^T f_N \quad (2.8)$$

其中

$$\bar{m}_{kk} = \psi_k^T m_{ii} \psi_k = I_k$$

$$\bar{m}_{kj} = \bar{m}_{jk} = \psi_k^T m_{ij} + \psi_k^T m_{ji} \psi_j$$

$$\begin{aligned}\bar{m}_{jj} &= m_{jj} + \psi_j^T m_{ij} + m_{ji} \psi_j + \psi_j^T m_{ii} \psi_j \\ c_{hh} &= \psi_h^T c_{ii} \psi_h \\ \bar{c}_{hj} &= \bar{c}_{jh} = \psi_h^T c_{ij} + \psi_j^T c_{ii} \psi_j \\ \bar{c}_{jj} &= c_{jj} + \psi_j^T c_{ij} + c_{ji} \psi_j + \psi_j^T c_{ii} \psi_j \\ \bar{k}_{hh} &= \psi_h^T k_{ii} \psi_h = \text{diag}[p_1^2, p_2^2, \dots, p_h^2] = \Lambda_h \\ \bar{k}_{jj} &= k_{jj} + k_{ji} \psi_j \\ \bar{k}_{hj} &= \bar{k}_{jh} = 0\end{aligned}$$

由于 $\psi_h$ 为正则化主模态,故 $\bar{m}_{hh}$ 为 $h$ 阶单位对角矩阵, $\bar{k}_{hh}$ 对频率 $(p_i)$ 平方对角矩阵。阻尼阵 $c_{hh}$ 一般为非对角阵,在比例阻尼情况下,则可化为对角的模态阻尼阵。

方程式(2.8)为任一子系统(2.5)的模态座标 $q^{(g)}$ 和界面座标 $x^{(g)}$ 表达的减缩方程,按照界面位移协调条件,装配各子结构的方程,即得总体系统的运动方程

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F(t) - \varepsilon F_N(q, \dot{q}) \quad (2.9)$$

其中广义座标 $q$ ,包括界面座标和各子结构模态座标子集, $F(t)$ 由各外激励力矢量经模态变换集总而成, $\varepsilon F_N(q, \dot{q})$ 为各非线性外力矢量经模态变换而集成,界面力将不出现在方程中。这一结果同样可看成是由位能型变分原理导出的Ritz法得到的近似方程<sup>[8]</sup>,这里的推导中只是把阻尼力当成结点外力而已。

下面以两部件为例,来说明其装配过程。把子结构右端力矢量都分别按内部座标和界面座标的位置分开,顺便指出对界面自由度和非界面(内部)自由度均可安排一指示矩阵加以区别。

$$r(t) = \begin{bmatrix} r_i \\ r_j \end{bmatrix} \quad \bar{r}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ f_j \end{bmatrix} \quad f_N = \begin{bmatrix} f_{iN} \\ f_{jN} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

利用界面位移协调条件 $x_i^{(1)} = x_i^{(2)}$ 把广义座标 $q$ 记为

$$q^T = [q_h^{(1)T}, q_h^{(2)T}, x_j^T]$$

得

$$\begin{aligned}M &= \begin{bmatrix} I_{hh}^{(1)} & 0 & \bar{m}_{hj}^{(1)} \\ 0 & I_{hh}^{(2)} & \bar{m}_{hj}^{(2)} \\ \bar{m}_{hj}^{(1)T} & \bar{m}_{hj}^{(2)T} & \bar{m}_{jj}^{(1)} + \bar{m}_{jj}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{hh}^{(1)} & 0 & \bar{c}_{hj}^{(1)} \\ 0 & c_{hh}^{(2)} & \bar{c}_{hj}^{(2)} \\ \bar{c}_{hj}^{(1)T} & \bar{c}_{hj}^{(2)T} & \bar{c}_{jj}^{(1)} + \bar{c}_{jj}^{(2)} \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} \Lambda_h^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_h^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_{jj}^{(1)} + \bar{k}_{jj}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \psi_h^{(1)T} r_i^{(1)} \\ \psi_h^{(2)T} r_i^{(2)} \\ \psi_j^{(1)T} r_i^{(1)} + \psi_j^{(2)T} r_i^{(2)} + r_j^{(1)} + r_j^{(2)} \end{bmatrix} \\ F_N &= \begin{bmatrix} \psi_h^{(1)T} f_{iN}^{(1)} \\ \psi_h^{(2)T} f_{iN}^{(2)} \\ \psi_j^{(1)T} f_{iN}^{(1)} + \psi_j^{(2)T} f_{iN}^{(2)} + f_{jN}^{(1)} + f_{jN}^{(2)} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

在总系统方程(2.9)中,左端项均为线性项,右端首项由外激励变换而来,只有 $\varepsilon F_N(q, \dot{q})$ 为非线性项,是由各子系统变换而来,包括非线性力均需利用关系(2.7)。当 $\varepsilon=0$ ,

方程(2.9)退化为线性系统的固定界面模态综合法。

## (2) 修改自由界面法

在界面完全放松下,由方程(2.3)求得自由界面主模态,通常也只取低阶保留主模态 $\Phi_k$ 。此外还取以界面力作用下求出静位移作为附着模态 $Y$ 。即由方程

$$kx = \bar{f}_j,$$

由 $\bar{f}_j$ 中对应非零的界面力依次取1,而其余为零时求出,用矩阵表达为

$$Y = k^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_j \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

其中 $I_j$ 为单位对角矩阵。由于 $\Phi_k$ 为正则主模态,故

$$\Phi_k^T m \Phi_k = I_k, \quad \Phi_k^T k \Phi_k = L_k = \text{diag}[p_k^2, p_k^2, \dots, p_k^2] \quad (2.12)$$

于是得

$$Y = \Phi_k L_k^{-1} \Phi_k^T I_j + \Phi_k L_k^{-1} \Phi_k^T I_j \quad (2.13)$$

其中 $\Phi_k$ 是高阶剩余模态,且有

$$\Phi_k^T I_j = \Phi_k^T \begin{bmatrix} 0 \\ I_j \end{bmatrix}, \quad \Phi_k^T I_j = \Phi_k^T \begin{bmatrix} 0 \\ I_j \end{bmatrix}, \quad L_k = \Phi_k^T k \Phi_k = \text{diag}[p_{k+1}^2, p_{k+2}^2, \dots, p_k^2] \quad (2.14)$$

以上分析对自由界面子结构 $k^{-1}$ 存在才能成立,若 $k^{-1}$ 不存在时,可采用移频法求得 $Y$ 。为了保证 $Y$ 与保留模态 $\Phi_k$ 正交,取剩余模态

$$G = Y - \Phi_k L_k^{-1} \Phi_k^T I_j \quad (2.15)$$

现在对子结构作座标变换

$$x = [G \ \Phi_k] \begin{bmatrix} f_j \\ q_k \end{bmatrix} = [\Phi] \begin{bmatrix} f_j \\ q_k \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

这里把界面力 $f_j$ 取作广义座标, $q_k$ 表示模态座标,代入子结构方程(2.1)',得

$$\begin{bmatrix} G^T m G & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{f}_j \\ \ddot{q}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G^T c G & G^T c \Phi_k \\ \Phi_k^T c G & \Phi_k^T c \Phi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{f}_j \\ \dot{q}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G^T k G & 0 \\ 0 & L_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_j \\ q_k \end{bmatrix} = \Phi^T f + \Phi^T \bar{f}_j - \varepsilon \Phi^T f_N \quad (2.17)$$

仍以两部件为例来说明其装配过程,利用界面力协调条件

$$f_j^{(1)} + f_j^{(2)} = 0 \quad (2.18)$$

进行装配,再利用界面位移协调条件

$$x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = \Phi_{kj}^{(1)} q_k^{(1)} + G_j^{(1)} f_j^{(1)} = \Phi_{kj}^{(2)} q_k^{(2)} + G_j^{(2)} f_j^{(2)} \quad (2.19)$$

把界面力消去,即得形式和(2.9)一样的综合方程,右端界面力也都消去,其中质量矩阵

$$M = \begin{bmatrix} \Phi_{kj}^{(1)T} A^T \bar{m} A \Phi_{kj}^{(1)} + I_k^{(1)} & -\Phi_{kj}^{(1)T} A^T \bar{m} A \Phi_{kj}^{(2)} \\ -\Phi_{kj}^{(2)T} A^T \bar{m} A \Phi_{kj}^{(1)} & \Phi_{kj}^{(2)T} A^T \bar{m} A \Phi_{kj}^{(2)} + I_k^{(2)} \end{bmatrix}$$

其中

$$\bar{m} = \sum_{\sigma=1,2} G^{(\sigma)T} m^{(\sigma)} G^{(\sigma)}, \quad A = [G_j^{(1)} + G_j^{(2)}]^{-1}, \quad G_j = [0 \ I_j] G$$

注意逆阵 $\mathbf{A}$ 并不一定存在。对于刚度阵 $\mathbf{K}$ 形式和质量阵相似，只需将 $\bar{\mathbf{m}}$ 用 $\bar{\mathbf{k}}$ 代替， $\mathbf{l}_k$ 用 $\mathbf{L}_k$ 代替。 $\bar{\mathbf{k}}$ 为

$$\bar{\mathbf{k}} = \sum_{g=1,2} \mathbf{G}^{(g)T} \mathbf{k}^{(g)} \mathbf{G}^{(g)}$$

阻尼矩阵

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2$$

其中

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{hj}^{(1)T} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{c}} \mathbf{A} \Phi_{hj}^{(1)} + \Phi_h^{(1)T} \mathbf{c} \Phi_h^{(1)} & -\Phi_{hj}^{(1)T} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{c}} \mathbf{A} \Phi_{hj}^{(2)} \\ -\Phi_{hj}^{(2)T} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{c}} \mathbf{A} \Phi_{hj}^{(1)} & \Phi_{hj}^{(2)T} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{c}} \mathbf{A} \Phi_{hj}^{(2)} + \Phi_h^{(2)T} \mathbf{c} \Phi_h^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{c}_{ji}^{(1)} \mathbf{A}^T \Phi_{hj}^{(1)} - \Phi_{hj}^{(1)T} \mathbf{A}^T \mathbf{c}_{ij}^{(1)} & \mathbf{c}_{ji}^{(1)} \mathbf{A} \Phi_{hj}^{(2)} + \Phi_{hj}^{(2)T} \mathbf{A}^T \mathbf{c}_{ij}^{(2)} \\ \Phi_{hj}^{(2)T} \mathbf{A}^T \mathbf{c}_{ij}^{(1)} + \mathbf{c}_{ji}^{(2)} \mathbf{A} \Phi_{hj}^{(1)} & -\Phi_{hj}^{(2)T} \mathbf{A}^T \mathbf{c}_{ij}^{(2)} - \mathbf{c}_{ji}^{(2)} \mathbf{A} \Phi_{hj}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{c}} = \sum_{g=1,2} \mathbf{G}^{(g)T} \mathbf{c}^{(g)} \mathbf{G}^{(g)}, \quad \mathbf{c}_{ji}^{(g)} = \Phi_h^{(g)T} \mathbf{c}^{(g)} \mathbf{G}^{(g)}, \quad \mathbf{c}_{ij}^{(g)} = \mathbf{G}^{(g)T} \mathbf{c}^{(g)} \Phi_h^{(g)}$$

右端非线性力

$$\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} -\Phi_{hj}^{(1)T} \mathbf{A}^T (\mathbf{G}^{(1)T} \mathbf{f}_N^{(1)} - \mathbf{G}^{(2)T} \mathbf{f}_N^{(2)}) + \Phi_h^{(1)T} \mathbf{f}_N^{(1)} \\ -\Phi_{hj}^{(2)T} \mathbf{A}^T (\mathbf{G}^{(2)T} \mathbf{f}_N^{(2)} - \mathbf{G}^{(1)T} \mathbf{f}_N^{(1)}) + \Phi_h^{(2)T} \mathbf{f}_N^{(2)} \end{bmatrix}$$

外激励力 $\mathbf{F}(t)$ 表达式和上式相似，只需用 $\mathbf{r}_i^{(g)}$ 代替 $\mathbf{f}_N^{(g)}$ 即可。

应该指出的是，以上综合方法对左端综合方程的建立完全可沿用线性系统的模态综合方法，对于非线性系统只是处理成右端的载荷项。

### 三、非线性方程的求解

经减缩后的非线性方程

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}(t) - \varepsilon \mathbf{F}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.9)$$

和通常的非线性方程一样，精确解是难于得到的，但可有效地利用许多著名的数值积分方法<sup>[10][11]</sup>，在[9]中已作过讨论，方程(2.9)和文[9]中方程(3.12)有相同形式，这里非线性项已不再包括线性项，因而具有更简单的形式，采用文[9]中指出的迭代法或增量法进行计算都是适用的，本文将不再重复。由于方程(2.9)比原系统方程已作了很大减缩，虽然同样可使用数值积分进行计算，但效率也大大提高。直接从有限元离散得到的非线性动力方程，一般往往自由度过高而难于采用数值积分，本文提供的方法将克服这一困难。

### 四、算例

图1表示一弹簧-质量系统，该系统自由度为100，设 $m_1 = m_2 = \dots = m_{100} = 1$ 。弹性力的非线性关系如图2所示，并取 $\alpha = 1.0$ ， $\beta = 0.2$ 。

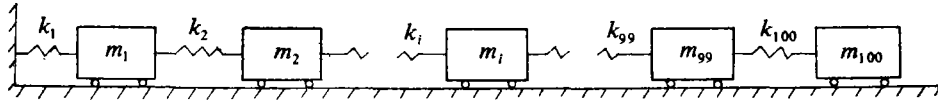


图 1

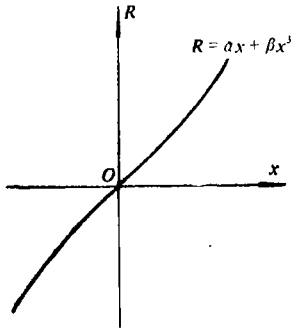


图 2

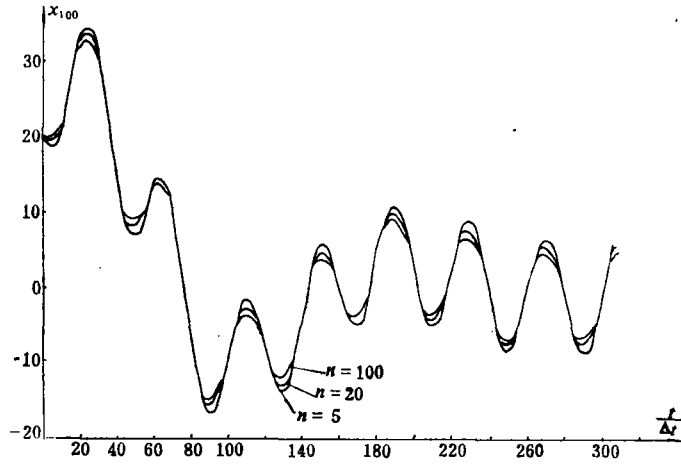


图 3

取比例阻尼

$$C = \alpha M + \beta K$$

计算中取  $\alpha = 0.01$ ,  $\beta = 0.005$ .  $K$  为线性刚度矩阵. 设在第 20、40、60、80、100 个质量上作用有周期性外激振力如下

$$F_i = 0.005i \cdot \sin \frac{\pi}{50} t \quad (i = 20, 40, 60, 80, 100)$$

按上述方法, 进行不同的自由度缩减, 利用 Newmark- $\beta$  法 [取  $\beta = 0.25, \gamma = 0.5, \Delta t = 2.5$

( $\approx \frac{T_p}{40}$ )] 减缩后自由度为 20, 5 与原自由度  $n = 100$  比较, 计算响应曲线如图 3.

图 3 表明减缩自由度为 5 时与  $n = 100$  有良好的近似, 各峰值比较如表 1.

表 1

$t/\Delta t$	23	48	61	89	103	126
$n=5$	34.43	7.436	14.31	-16.66	-1.531	-13.68
$n=20$	33.88	8.444	14.13	-15.23	-2.869	-12.40
$n=100$	33.74	8.321	14.09	-14.96	-3.123	-12.19
$t/\Delta t$	149	166	186	206	225	247
$n=5$	5.671	-4.899	10.76	-5.002	7.629	-8.306
$n=20$	4.341	-3.738	9.625	-3.837	7.634	-7.045
$n=100$	4.080	-3.512	9.405	-3.622	7.435	-6.862

取图 4 所示三角波脉冲激励, 其各最大值为

$$F_i^{(0)} = 0.005i \quad (i=20, 40, 60, 80, 100)$$

取  $\Delta t = \frac{T_m}{50} = 8.04008$  ( $T_m$  为最大周期)。初始条件为

$$x_{i0} = 0, \dot{x}_{i0} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, 100)$$

取比例阻尼的系数  $a=b=0$  可得无阻尼响应曲线如图5, 各峰值比较如表2。

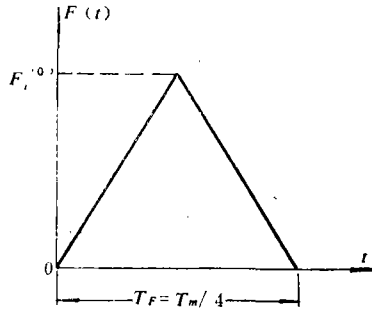


图 4

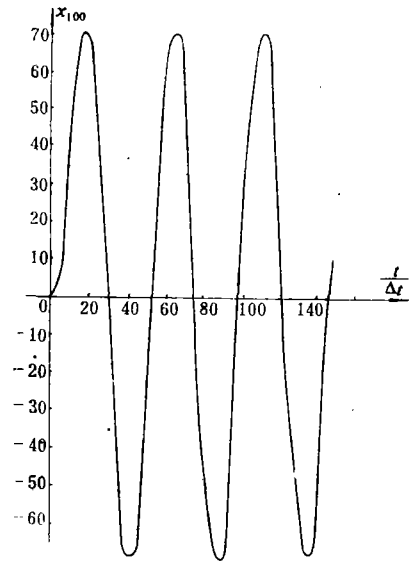


图 5

表 2

$t/\Delta t$	18	42	113	137	160	184
$n=5$	70.5075	-70.4057	69.8088	-69.9535	68.9535	-68.1948
$n=20$	70.5294	-70.3020	69.7022	-69.4732	68.9944	-68.1731
$n=100$	70.5279	-70.3026	69.6919	-69.4888	68.9911	-68.1886

下面将图 1 系统分成两部分, I 部分 60 个自由度, II 部分 40 个自由度, 在 I 部分中取  $n_I$  个模态, II 部分中取  $n_{II}$  个模态, 另外取  $n_b$  个约束模态. 用固定界面法计算, 这里所用正弦激励力和算法同前, 所得结果见图 6, 各峰值比较如表 3。

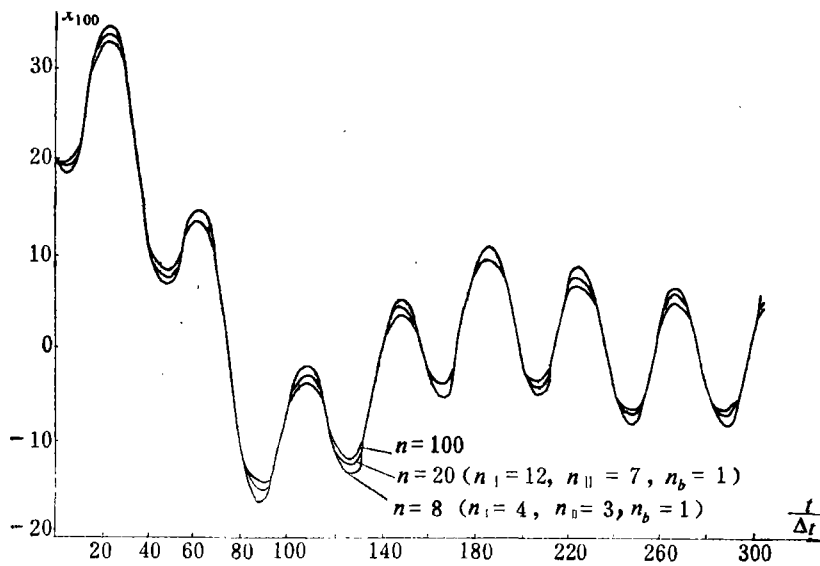


图 6

表 3

$t/\Delta t$			23	48	61	89	108	126
$n_r$	$n_x$	$n_b$						
4	3	1	34.22	7.465	14.11	-16.32	-1.881	-13.38
12	7	1	33.95	8.375	14.20	-15.32	-2.746	-12.53
整体解 $n=100$			33.74	8.321	14.09	-14.96	-3.123	-12.19
$t/\Delta t$			149	166	186	206	225	247
$n_r$	$n_x$	$n_b$						
4	3	1	5.364	-4.708	10.55	-4.727	8.426	-8.014
12	7	1	4.418	-3.888	9.705	-3.927	7.755	-7.128
整体解 $n=100$			4.080	-3.512	9.405	-3.622	7.435	-6.862

若激励用图 4 所示的三角脉冲, 取零阻尼, 用模态综合法所得的各峰值比较见表 4.

表 4

$t/\Delta t$			18	42	66	89	113	137
$n_r$	$n_x$	$n_b$						
3	2	1	70.4550	-70.2979	69.9588	-69.7093	69.5275	-69.2896
12	7	1	70.5351	-70.3207	69.9895	-69.9513	69.7642	-69.4594
整体解 $n=100$			70.5279	-70.3026	69.9987	-69.9798	69.6919	-69.4888

## 参 考 文 献

- [1] Hurty, W. C., Vibration of structure systems by component mode synthesis, *ASCE, J. Engr. Mech. Div.*, 85(1960), 1-66.
- [2] Hurty, W. C., Dynamic analysis of structural systems using component modes, *AIAA, J.*, 3(1965), 678-685.
- [3] Craig, R. R. and Ching-jone Chang, free interface methods of substructure coupling for dynamic analysis, *AIAA, J.*, 14, 11(1976).
- [4] 王文亮、杜作润、陈康元, 模态综合短评和一种新的改进, *航空学报*, 3(1979).
- [5] 胡海昌, 很多自由度体系的固有振动(约束模态法), *航空学报*, 2(1980).
- [6] D. Zhu.(朱德懋), Improved substructure method for structural dynamic analysis, *AIAA paper 81-0622*, 发表于 *AIAA Dynamics Specialists Conference*, Atlanta, GA (1981).
- [7] 郑兆昌, 复杂结构振动研究的模态综合技术, *振动与冲击* 1, 1, (1982).
- [8] 邢京堂、郑兆昌, 基于弹性动力学变分原理的模态综合法研究, *固体力学学报*, 2(1983).
- [9] 郑兆昌, 非线性系统动力分析的模态综合技术, *应用数学和力学*, 4, 4, (1983). 曾发表于 *Symposium on Modal Analysis and Signal Processing (Vibration) Shanghai, China*, (May 1982).
- [10] Bathe, K. J. and E. L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Inc.



- [11] Argyris, J. H. et al., Numerical solutions of transient nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 17/18, Part I/Feb (1979).

## Numerical Method in Dynamic Responses of Nonlinear Systems

Zheng Zhao-chang    Tan Ming-yi

(*Tsinghua University, Beijing*)

### Abstract

A kind of modal synthesis techniques, which is applicable to vibration analysis for linear substructures with nonlinear coupling attachments, is extended to nonlinear dynamic analysis. In this paper, a process is suggested that modal synthesis techniques are further extended to dynamic analysis of large complex structural systems with nonlinear characteristics of each substructure. At the end of this paper, an example shows the good accuracy of the results and the high efficiency of this process.