

集中力作用于剪切模量沿深度线性变化的半空间的公式

云天铨

(华中工学院, 1983年10月31日收到)

摘要

根据一个引理和一个假设, 本文给出集中力作用于泊桑比 ν 为常数和剪切模量 G 沿深度线性变化的半空间的公式。当用积分方程法分析桩和其它地学工程问题时, 这些公式可以用作一近似的基本解。

一、概述

应用弹性力学研究的趋势之一将是从小均匀介质到非均匀介质。因为这样的非均匀介质模型是更精确地反映许多情形的本质。例如, 在地学工程中, 近期发表的实测结果 (Pan Fulan^[1]) 表明许多土壤的剪切模量 G , 杨氏模量 E 等皆随深度增加而增加。已有的许多联系到非均匀介质的地学工程问题的研究, 如 [2] 至 [5], 但都较少采用积分方程法。虽然如所周知, 对半空间问题用积分方程法较之有限元分析精确且经济, 但它需要一基本解。不幸的是至今仍未在已发表的文章中找到适合于非均匀半空间的基本解^[6]。Davies和Banerjee^[6]指出集中力作用于三维弹性体中只有三种封闭型式的解答是知道的, 那就是: Kelvin(1846)的点力作用于全空间的解, Mindlin (1936)的点力作用于半空间的解和 Plevako (1969)的点力作用于两个不同弹性性质的连接在一起的半空间的交界面的解。Davies和Banerjee给出了点力作用于有两层介质交界面的半空间的位移场^[6]。利用这一位移解, 他们构造了一个近似的点力解, 然后用边界元算法分析嵌在非均匀土壤中的桩^[6]。不过, 使用他们的方法有许多不便。首先, 他们在文献 [5] 并没有列出用 [6] 的位移解构造出来的近似的点力解, 只是写在一个未发表的算法中。因此人们不知道这个近似的点力解是怎样的, 更谈不上应用它们。其次, [6] 中的位移函数以包括指数和 Bessel 函数的无限积分为项来表达, 而其中有的是不能精确地积出。因此, 这些函数的计算是既费力又不能精确积出。最后, 许多实际情形不满足载荷要作用于两层之间的交界面这一要求, 因此这方法很难适用于一般情形。

另一极端是建议的适用于非均匀半空间的集中力的公式太简单了, 例如, 只是将 Mindlin 公式改为以 $G(z)$ 代替 G (如 [7] 等), 因而其它点的 G 的影响没能够考虑进去。

本文企图克服这些缺点。根据一个引理及一个假设, 给出集中力作用于 ν 为常数和 G 为

$G_0 + mz$ 的非均匀半空间的公式。这些公式作者在另一文章中已用来作桩的分析。

二、一个引理及一个假设

引理。(组合定理)

令 u_{0i}^k, σ_{0ij}^k 为第 k 个 ($k=1, 2$) 均匀、各向同性的弹性静力问题的解。假定每个这些弹性体有同样的边界, 不同的弹性常数, 不同的载荷及边界条件。则“组合的”弹性静力问题的解是:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{0ij}^1 + \sigma_{0ij}^2, \quad u_i = au_{0i}^1 + bu_{0i}^2 \quad (2.1)$$

式中诸常数 a, b, λ, G 满足:

$$a = \lambda^1 / \lambda = G^1 / G, \quad b = \lambda^2 / \lambda = G^2 / G \quad (2.2)$$

其中 $\lambda^k, G^k, \lambda, G$ 分别为第 k 个弹性体及组合体的 Lamé 系数; 体积力 F_i , 给定的边界力 T_i , 给定的位移 \bar{u}_i 满足:

$$F_i = F_i^1 + F_i^2, \quad T_i = T_i^1 + T_i^2, \quad \bar{u}_i = a\bar{u}_i^1 + b\bar{u}_i^2 \quad (2.3)$$

式中 $F_i^k, T_i^k, \bar{u}_i^k$ 分别为第 k 个弹性体的体积力, 给定的边界力和位移。

证明: (2.1) 式满足平衡微分方程:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \sigma_{0ij,j}^1 + \sigma_{0ij,j}^2 + F_i^1 + F_i^2 = 0$$

(2.1) 式也满足位移-应变和应力-应变关系式:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{0ij}^1 + \sigma_{0ij}^2 \\ &= \delta_{ij} \lambda^1 e_{0kk}^1 + 2G^1 e_{0ij}^1 + \delta_{ij} \lambda^2 e_{0kk}^2 + 2G^2 e_{0ij}^2 \\ &= \delta_{ij} \lambda e_{kk} + 2G e_{ij} \end{aligned}$$

故 (2.1) 式满足弹性力学基本方程式。而 (2.3) 式表明组合问题的边界条件也是满足的。

特例: 若 $G = G^1 + G^2$, 则 (2.2) 式给出: $\nu = \nu^1 = \nu^2, \lambda = \lambda^1 + \lambda^2$ 。或者, 如 $G = G^1 + G^2, \lambda = \lambda^1 + \lambda^2, \nu = \nu^1 = \nu^2$, 则 (2.2) 式成立。

现在我们考虑一特殊的组合。如第 2 个弹性体是不受力的 (即零应力) 与第 1 个弹性体同形状大小, 同 ν , 但其剪切模量为 G^2 , 以及组合体的 G, ν 服从 (2.4) 式, 即 (2.2) 式成立, 则据引理有:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{0ij}^1, \quad u_i = au_{0i}^1, \quad a = G^1 / (G^1 + G^2) \quad (2.5)$$

应用这一引理分析一受载的二层介质的半空间, 让我们考虑带二水平层的半空间。令

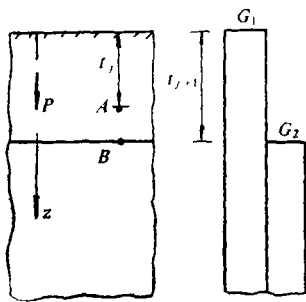


图 1

$A(x, y, t_i)$ 和 $B(x, y, t_{j+1})$ 分别为位于上层和两层交界面上的两点 (图 1)。令 V_1 为受载的带 ν, G_1 的均匀的半空间; V_2 为一零应力的带 ν, G_2 的与下层具有同样的边界的半空间。则据引理, 组合部份 ($V_1 \cap V_2$) 或者是下层的解 (略去上标 1) 为:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{0ij}, \quad u_i = au_{0i}, \quad a = G_1 / (G_1 + G_2) \quad (2.6)$$

但是, 怎样计算上层部份 ($V_1 \setminus (V_1 \cap V_2)$) 的位移呢? 我们需要一假设。

假设: 圣维南原理用于条件相同但弹性常数分别是均匀的和非均匀的两个问题, 给出同样的结果。

或者, 我们用图来把这一假设表达得更清楚一些。

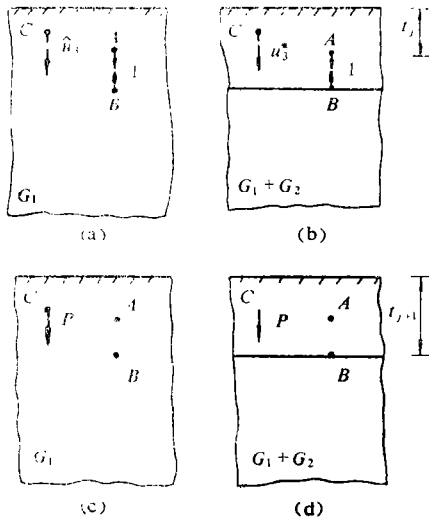


图 2

图 2 的(a)和(b)分别表示一均匀的和一层状的半空间.令 $\hat{u}_i(C; G_1)$ 和 $u_i^*(C; G_1+G_2)$ 分别表示一对单位力作用于 $A(x, y, t_j)$ 和 $B(x, y, t_{j+1})$ (A 点位于上层, B 点在上层或两层之间的界面) 时, 两个半空间中的点 $C(0, 0, c)$ 的位移. 则这个假设的意思是:

当 $\Delta t = t_{j+1} - t_j \rightarrow 0$ 时, 有

$$\hat{u}_i(C; G_1) = u_i^*(C; G_1+G_2) \quad (2.7)$$

据互易定理 (reciprocal theorem), 系统 1 (图 2 的(a)和(b)) 的外力在相应的系统 2 (图 2 的(c)和(d)) 的位移上所作的功等于系统 2 的外力在相应的系统 1 的位移所作的功, 我们有:

$$P \cdot \hat{u}_i(C; G_1) = 1 \cdot [u_{oi}(A; G_1) - u_{oi}(B; G_1)]$$

$$P \cdot u_i^*(C; G_1+G_2) = 1 \cdot [u_i(A; G_1+G_2) - u_i(B; G_1+G_2)]$$

由 (2.7) 式, 我们得:

$$u_i(A; G_1+G_2) - u_i(B; G_1+G_2) = u_{oi}(A; G_1) - u_{oi}(B; G_1) \quad (2.8)$$

这一方程意味着一个层状半空间的任意两个很近的点的相对位移等于均匀半空间的同样情况的两点的相对位移.

将 (2.6) 式代入 (2.8) 式的 $u_i(B; G_1+G_2)$, 我们得:

$$u_i(A; G_1+G_2) = u_{oi}(A; G_1) + G_1[1/(G_1+G_2) - 1/G_1]u_{oi}(B; G_1) \quad (2.9)$$

(2.6) 式和 (2.9) 式分别适用于“组合”体的闭包之内和闭包之外的点.

三、G连续地变化的情形的积分关系式的推导

一个 $G(z)$ 连续地变化的非均匀半空间可以用一个受载的均匀半空间 V_0 (带 G_0) 和一系列的零应力半空间 V_j (带 $\Delta G_j = G_{j+1} - G_j$) 在不同的水平层 $t_j = j \cdot \Delta t$ ($j = 1, 2, \dots$) 的组合, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 和 $j \rightarrow \infty$, 来逼近 (图 3).

由受集中力作用的半空间 G_0 和零应力半空间 G_j 的组合引起点 $A(x, y, t_j)$ 的位移根据 (2.6) 式为:

$$u_{oi}(x, y, t_j; G_0+G_j) = (G_0/(G_0+G_j))u_{oi}(x, y, t_j; G_0) \quad (3.1)$$

由半空间 G_0+G_j 和零应力半空间 $\Delta G_j = G_{j+1} - G_j$ 引起 $A(x, y, t_j)$ 的位移根据 (2.9) 式和 (3.1) 式为:

$$u_i(x, y, t_j; G_0+G_{j+1}) = u_{oi}(x, y, t_j; G_0+G_j) + G_0 \Delta(1/G_j) \cdot u_{oi}(x, y, t_{j+1}; G_0) \quad (3.2)$$

$$\text{式中} \quad \Delta(1/G_j) = 1/(G_0+G_{j+1}) - 1/(G_0+G_j) \quad (3.3)$$

将 G_{j+2} 代替 G_{j+1} 并利用 (3.2) 式, 得:

$$u_i(x, y, t_j; G_0+G_{j+2}) = u_{oi}(x, y, t_j; G_0+G_j) + G_0[\Delta(1/G_j)u_{oi}(x, y, t_{j+1}; G_0) + \Delta(1/G_{j+1})u_{oi}(x, y, t_{j+2}; G_0)] \quad (3.4)$$

递推可得:

$$u_i(x, y, t_j; G_0+G_{j+n}) = u_{oi}(x, y, t_j; G_0+G_j)$$

$$+G_0 \left\{ \sum_{m=1}^n \Delta(1/G_{j+m}) \cdot u_{0i}(x, y, t_{j+m}; G_0) \right\} \quad (3.5)$$

当 $\Delta t = t_{i+1} - t_i \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $t_j = z$, 则 (3.5) 式变成:

$$u_i(x, y, z) = G_0 \left\{ u_{0i}(x, y, z; G_0) / (G_0 + G_z) + \int_z^\infty [d(1/\underline{G}(t))/dt] u_{0i}(x, y, t; G_0) dt \right\} \quad (3.6)$$

式中 $u_i(x, y, z) = u_i(x, y, t_j; G_0 + G_\infty)$, $G_z = G_j$, $u_{0i}(x, y, z; G_0)$ 是 Mindlin 的解^[8], $\underline{G}(t) = G_0 + G(t)$.

对线性情形 $G = G_0 + mz$, 我们有:

$$u_i(x, y, z) = G_0 \left\{ u_{0i}(x, y, z; G_0) / (G_0 + mz) - m \int_z^\infty [u_{0i}(x, y, t; G_0) / (G_0 + mt)^2] dt \right\} \quad (3.7)$$

(3.7) 式是集中力作用于 ν 为常数和 G 为 $G_0 + mz$ 的半空间内引起的位移分量 ($i=1, 2, 3$) 的公式。利用积分表, 可以将 (3.7) 式的大多数项的积分积出。但是, 有几项积分是任何一本积分表都查不出其积分公式的, 诸如这些积分

$$\int_z^\infty (p+t)^{-2} (R_2+t+c)^{-1} dt, \int_z^\infty (p+t)^{-2} R_2^{-1} (R_2+t+c)^{-1} dt, \int_z^\infty (p+t)^{-2} R_2^{-1} (R_2+t+c)^{-2} dt$$

等。求这些积分的关键是作一变换, 也就是在相应的被积函数的分子和分母中同乘以 $[R_2 - (t+c)]$ 或 $[R_2 - (t+c)]^2$, 然后 (3.7) 式就可以积出, 得到的公式表达为封闭的型式。一旦求得位移, 应力可以通过应力-应变和应变-位移的关系式求得。

今将 (3.7) 式的结果列出如下。

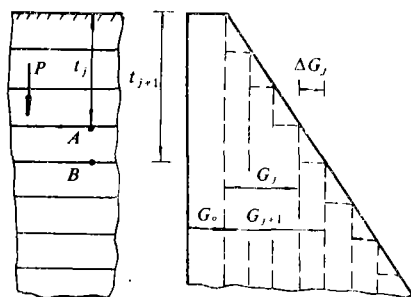


图 3

四、铅垂和水平集中力作用于 ν 为常数和 G 为 $G_0 + mz$ 半空间内的公式

铅垂集中力 P 作用于 $(0, 0, c)$ 的公式:

$$U(x, y, z) = G_0 \{ U_1(x, y, z) / (mv) - U_2(x, y, z) \} \quad (4.1)$$

$$W(x, y, z) = G_0 \{ W_1(x, y, z) / (mv) - W_2(x, y, z) \} \quad (4.2)$$

式中 U_1, U, W_1, W 分别为均匀和非均匀情形下的径向和铅垂方向的位移。

$$\left. \begin{aligned} U_1(x, y, z) &= P_r \{ (z-c)/R_1^3 + (3-4\nu)(z-c)/R_2^3 - 4(1-\nu)(1-2\nu)/[R_2(R_2 \\ &\quad + z+c)] + 6cz(z+c)/R_2^5 \} / [16\pi G_0(1-\nu)] \\ U_2(x, y, z) &= P_r \{ K_2 - (c+p)K_3 + (3-4\nu)[K_5 - (c+p)K_6] \\ &\quad - 4(1-\nu)(1-2\nu)[1/z - f_2 - (c-p)F_2]/r^2 + 6c \\ &\quad [K_8 + (c-2p)K_9 + p(p-c)K_{10}] \} / [16\pi m G_0(1-\nu)] \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} W_1(x, y, z) &= P \{ (3-4\nu)/R_1 + [8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)]/R_2 + (z-c)^2/R_1^3 \\ &\quad + [(z+c)^2(3-4\nu) - 2cz]/R_2^3 + 6cz(z+c)^2/R_2^5 \} / [16\pi G_0(1-\nu)] \\ W_2(x, y, z) &= P \{ (3-4\nu)F_1 + [8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)]F_2 + (C_1K_1 + C_2K_2 \\ &\quad + C_3K_3) + (C_4K_4 + C_5K_5 + C_6K_6) + (C_7K_7 + C_8K_8 + C_9K_9 \\ &\quad + C_{10}K_{10}) \} / [16\pi m G_0(1-\nu)] \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

式中:

$$\begin{aligned}
 r &= (x^2 + y^2)^{1/2} \\
 R_1 &= [x^2 + y^2 + (z-c)^2]^{1/2} = R_1(z) \\
 R_2 &= [x^2 + y^2 + (z+c)^2]^{1/2} = R_2(z) \\
 F_1 &= \int_z^\infty v^{-2} R_1(t)^{-1} dt = \{R_1 t_1 - 1 - [b_1/(2y_1)] f_1\} / y_1 \\
 F_2 &= \int_z^\infty v^{-2} R_2(t)^{-1} dt = \{R_2 t_1 - 1 - [b_2/(2y_2)] f_2\} / y_2 \\
 C_1 &= 1, \quad C_2 = -2(c+p), \quad C_3 = c^2 - p^2 - C_2 p, \\
 C_4 &= 3 - 4\nu, \quad C_5 = 4c(1 - 2\nu) - 2C_4 p, \quad C_6 = c^2(3 - 4\nu) - C_4 p^2 - C_5 p \\
 K_1 &= \int_z^\infty R_1(t)^{-3} dt = [1 - (z-c)/R_1] / r^2 \\
 K_4 &= \int_z^\infty R_2(t)^{-3} dt = [1 - (z+c)/R_2] / r^2 \\
 K_2 &= \int_z^\infty v^{-1} R_1(t)^{-3} dt = [-1/R_1 - (b_1/2)K_1 + f_1] / y_1 \\
 K_6 &= \int_z^\infty v^{-1} R_2(t)^{-3} dt = [-1/R_2 - (b_2/2)K_4 + f_2] / y_2 \\
 K_3 &= \int_z^\infty v^{-2} R_1(t)^{-3} dt = [1/(vR_1) - (5b_1/2)K_2 - 4K_1] / y_1 \\
 K_8 &= \int_z^\infty v^{-2} R_2(t)^{-3} dt = [1/(vR_2) - (5b_2/2)K_6 - 4K_4] / y_2 \\
 C_7 &= 6c, \quad C_8 = 12c^2 - 3C_7 p \\
 C_9 &= 6c^3 - 3C_7 p^2 - 2C_8 p, \quad C_{10} = -C_7 p^3 - C_8 p^2 - C_9 p \\
 K_7 &= \int_z^\infty v R_2(t)^{-5} dt = 1/(3R_2^2) - (b_2/2)K_6 \\
 K_8 &= \int_z^\infty R_2(t)^{-5} dt = 2/(3r^4) - (z+c)(1/R_2^2 + 2/r^2)/(3r^2 R_2) \\
 K_9 &= \int_z^\infty v^{-1} R_2(t)^{-5} dt = [-1/(3R_2^3) + f_3 - (b_2/2)K_8] / y_2 \\
 K_{10} &= \int_z^\infty v^{-2} R_2(t)^{-5} dt = [1/(VR_2^3) - (5b_2/2)K_8 - 4K_6] / y_2 \\
 f_3 &= [-1/R_2 + f_2 - (b_2/2)K_4] / y_2 \\
 f_2 &= -\ln[(x_{02} + (1 + x_{02}^2)^{1/2}) / (x_{12} + (1 + x_{12}^2)^{1/2})] / (y_2)^{1/2} \\
 f_1 &= -\ln[(x_{01} + (1 + x_{01}^2)^{1/2}) / (x_{11} + (1 + x_{11}^2)^{1/2})] / (y_1)^{1/2} \\
 x_{01} &= -(c+p)/r, \quad x_{02} = (c-p)/r \\
 x_{11} &= (2y_1 t_1 + b_1) / (2r), \quad x_{12} = (2y_2 t_1 + b_2) / (2r) \\
 y_1 &= (c+p)^2 + r^2, \quad y_2 = (c-p)^2 + r^2 \\
 b_1 &= -2(c+p), \quad b_2 = 2(c-p), \quad t_1 = 1/(z+p) \\
 v &= p+z, \quad p = G_0/m
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

水平点力 P 作用于 $(0, 0, c)$ 并与 x 轴同向的公式:

$$\left. \begin{aligned}
 u(x, y, z) &= G_0 \{u_1(x, y, z) / [m(p+z)] - u_2(x, y, z)\} \\
 v(x, y, z) &= G_0 \{v_1(x, y, z) / [m(p+z)] - v_2(x, y, z)\} \\
 w(x, y, z) &= G_0 \{w_1(x, y, z) / [m(p+z)] - w_2(x, y, z)\}
 \end{aligned} \right\} \tag{4.6}$$

式中 u, v, w 和 u_1, v_1, w_1 分别为非均匀和均匀情形 (即 Mindlin 公式) 下的直角坐标的位移分量。

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, y, z) &= \{P/[16\pi G_0(1-\nu)]\} \left\{ (3-4\nu)/R_1 + 1/R_2 + x^2/R_1^3 + (3-4\nu)x^2/R_2^3 \right. \\ &\quad \left. + (2cz/R_2^3)(1-3x^2/R_2^2) + [4(1-\nu)(1-2\nu)(R_2+z+c)] \right. \\ &\quad \left. \cdot [1-x^2/[R_2(R_2+z+c)]] \right\} \\ v_1(x, y, z) &= \{Pxy/[16\pi G_0(1-\nu)]\} \left\{ 1/R_1^3 + (3-4\nu)/R_2^3 - 6cz/R_2^5 \right. \\ &\quad \left. - 4(1-\nu)(1-2\nu)/[R_2(R_2+z+c)^2] \right\} \\ w_1(x, y, z) &= \{Px/[16\pi G_0(1-\nu)]\} \left\{ (z-c)/R_1^3 + (3-4\nu)(z-c)/R_2^5 \right. \\ &\quad \left. - 6cz(z+c)/R_2^5 + 4(1-\nu)(1-2\nu)/[R_2(R_2+z+c)] \right\} \end{aligned} \right\} (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned} u_2(x, y, z) &= \{P/[16\pi m G_0(1-\nu)]\} \left\{ (3-4\nu)F_1 + F_2 + x^2K_3 + (3-4\nu)x^2K_6 \right. \\ &\quad \left. + 2cK_5 - 2cpK_6 - 6cx^2K_6 + 6cpx^2K_{10} + [4(1-\nu)(1-2\nu)/r^2] \right. \\ &\quad \left\{ -1 + R_2/(z+p) + (c-p)(f_2 - 1/(z+p))(1-2x^2/r^2) + (1- \right. \\ &\quad \left. 2x^2/r^2) \ln [(2p/r)/[(z+c)/r + [1+(z+c)^2/r^2]^{1/2}/(1+2/p)]] \right. \\ &\quad \left. - (x^2/r^2)[r^2 + 2(c-p)^2]F_2 \right\} \right\} \\ v_2(x, y, z) &= \{Pxy/[16\pi m G_0(1-\nu)]\} \left\{ K_3 + (3-4\nu)K_6 - 6c(K_6 - pK_{10}) \right. \\ &\quad \left. + 4(1-\nu)(1-2\nu)[r^2 + 2(c-p)^2]F_2 + 2L_n[(2p/r)/[(z+c)/r \right. \\ &\quad \left. + [1+(z+c)^2/r^2]^{1/2}/(1+z/p)] + 2(c-p)(f_2 - 1/(z+p))] / r^4 \right\} \\ w_2(x, y, z) &= \{Px/[16\pi m G_0(1-\nu)]\} \left\{ K_2 - (c+p)K_3 + (3-4\nu)[K_5 \right. \\ &\quad \left. - (c+p)K_6] - 6c[K_8 + (c-2p)K_9 + p(p-c)K_{10}] \right. \\ &\quad \left. + 4(1-\nu)(1-2\nu)[1/(2+p) - f_2 - (c-p)F_2] / r^2 \right\} \end{aligned} \right\} (4.8)$$

式中 $R_1, R_2, F_1, F_2, f_2, K_1, \dots, K_{10}$ 等参看 (4.5) 式。

参 考 文 献

- [1] Pan Fulan, The relation between dynamic elastic parameters and depth of soil, *Soil Dynamic and Earthquake Engineering Conference* (Ed. by A. S. Cakmak et al.), 07, 13-15, Southampton, 1(1982), 47.
- [2] Gibson, R. E., Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half space, *Geotechnique*, 17, 1(1967), 58.
- [3] Randolph, M. F. and P. Wroth, Analysis of deformation of vertical loaded piles, ASCE, *Journal of Geotechnical Engineering Division*, GT, 12, Dec. (1978), 1465-1488.
- [4] Poulos, H. G., Settlement of single piles in non-homogeneous soil, *Journal of Geotechnical Engineering Division*, Proceeding of ASCE, no. GT5, 105, May (1979), 625-642.
- [5] Banerjee, P. K. and T. G. Davies, The behavior of axially and laterally loaded single piles embedded in nonhomogeneous soils, *Geotechnique*, 28, 3(1978), 309-326.
- [6] Davies, T. G. and P. K. Banerjee, The displacement field due to a point load at the interface of a two-layer elastic half-space, *Geotechnique*, 28, 1(1978), 43-56.
- [7] Poulos H. G., Load deflexion prediction for laterally loaded piles, *Aust. Geomechanics J.*, G3, 1(1973).

- [8] Mindlin, R. D., Force at a point in the interior of a semi-infinite half-space, *Journal of Physics*, 79, (1936), 195.

Formulae of Force at a Point in the Interior of a Half-Space with Shear Modulus Linearly Varied with Depth

Yun Tian-quan

(*Huazhong University of Science and Technology, Wuhan*)

Abstract

According to a lemma and an assumption, this paper presents formulae of force at a point in the interior of a half-space with Poisson's ratio $\nu = \text{const}$ and shear modulus G linearly varied with depth. These formulae can be used as an approximate basic solution when the integral equation method is employed for the analysis of piles and other geotechnical engineering problems.