应用数学和力学，第6卷第1期（1985年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

多套函数有限元逼近与拟协调板元*

张鸿庆　王　鸣

（大连工学院应用数学系，1984年3月15日收到）

摘　要

继[1]、[2]的工作，本文根据多套函数有限元逼近的思想，建立了唐立民等人[3]、[4]提出的拟协调板元的数学基础。

一、引　言

本文企图建立拟协调元的数学基础，为此我们以周边固定的薄板弯曲问题为例叙述我们的结果。这些结果可推广到更一般的情形。

熟知，周边固定的薄板弯曲问题有下述三个等价的描述（见[5]、[6]）

$$\left.\begin{aligned}&\Delta^2 u_0=f \quad (\text{在}\Omega\text{内})\\ &u_0\Big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial u_0}{\partial N}\Big|_{\partial\Omega}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

$$u_0\in H_0^2(\Omega),\ \ J(u_0)=\inf_{v\in H_0^2(\Omega)} J(v) \tag{1.2}$$

及

$$u\in H_0^2(\Omega),\ \int_\Omega (u_{xx}v_{xx}+2u_{xy}v_{xy}+u_{yy}v_{yy})d\Omega=\int_\Omega fv d\Omega \quad (\forall v\in H_0^2(\Omega)) \tag{1.3}$$

其中

$$J(v)=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}(v_{xx}^2+2v_{xy}^2+v_{yy}^2)-fv\right]d\Omega \tag{1.4}$$

$H_0^2(\Omega)$是所有具有直到二阶平方可积的广义导数且满足$u\Big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{\partial\Omega}=0$的函数组成的集合；$u_{xx}$，$v_{xx}$，$u_{xy}$，$v_{xy}$，$u_{yy}$，$v_{yy}$应理解为Sobolev意义下的广义导数；$f\in L^2(\Omega)$。

(1.1)、(1.2)、(1.3)的等价性是指若u_0是其中一个问题的解，那么u_0也是另外两个问题的解。对问题(1.2)或(1.3)有限元方法是一个有力的求解工具。最初人们用$H_0^2(\Omega)$的一个有限维子空间（通常为分片多项式空间）V_h代替$H_0^2(\Omega)$，求解问题

$$u_h\in V_h,\ \ J(u_h)=\inf_{v\in V_h} J(v) \tag{1.5}$$

* 本文曾在全国第四次数学代表大会上宣读。

或

$$u_h\in V_h,\ \int_\Omega[(u_h)_{xx}v_{xx}+2(u_h)_{xy}v_{xy}+(u_h)_{yy}v_{yy}]d\Omega=\int_\Omega fvd\Omega,\ \forall v\in V_h \tag{1.6}$$

以(1.5)或(1.6)的解u_h做为(1.1)的近似解．这个方法叫做协调方法．但是要求$V_h\subset H_0^2(\Omega)$给实际计算带来麻烦．例如，在三角形剖分的情形下，要使$V_h\subset H_0^2(\Omega)$需取完整的分片五次多项式．为避免这一问题出现了非协调、杂交、混合及拟协调等许多方法．

设K_τ是Ω的一个有限元剖分，K是剖分K_τ的一个单元，在早期的有限元方法中，如果在K上用$\Pi_K u$逼近u，则分别用$\partial_x\Pi_K u$，$\partial_y\Pi_K u$，$\partial_{xx}^2\Pi_K u$，$\partial_{xy}^2\Pi_K u$，$\partial_{yy}^2\Pi_K u$逼近$\partial_x u,\partial_y u,\partial_{xx}^2 u$，$\partial_{xy}^2 u$，$\partial_{yy}^2 u$．只要$\Pi_K u$一确定$\partial_x\Pi_K u$，…，也随之确定，因此我们把这种逼近叫做一套函数逼近．在拟协调元方法中却用$\Pi_K^{00}u,\Pi_K^{10}u,\Pi_K^{01}u,\Pi_K^{20}u,\Pi_K^{11}u,\Pi_K^{02}u$分别逼近$u,\partial_x u$，$\partial_y u$，$\partial_{xx}^2 u$，$\partial_{xy}^2 u$，$\partial_{yy}^2 u$．并且一般地，$\Pi_K^{10}u\neq\partial_x\Pi_K^{00}u,\Pi_K^{20}u\neq\partial_x\Pi_K^{10}u,\cdots$，所以$\Pi_K^{00}u,\cdots$，$\Pi_K^{02}$在这种意义上是独立的．我们把这种逼近叫做多套函数逼近．显然一套函数逼近是多套函数逼近的特例．为此本文作者之一在[2]中引入了多套函数有限元逼近的思想．

设Ω是R^2中的区域，记$L^{2,2}(\Omega)=\{u=(u^{00},\ u^{10},\ u^{01},\ u^{20},\ u^{11},u^{02})\,|\,u^{00},\cdots,\ u^{02}\in L^2(\Omega)\}$．$L^{2,2}(\Omega)$配备下述内积及相应的范数

$$(u,v)_{L^{2,2}(\Omega)}=\int_\Omega(u^{00}v^{00}+u^{10}v^{10}+u^{01}v^{01}+u^{20}v^{20}+u^{11}v^{11}+u^{02}v^{02})d\Omega\quad(u,\ v\in L^{2,2}(\Omega)),$$

$$\|u\|_{L^{2,2}(\Omega)}=(u,\ u)^{1/2}_{L^{2,2}(\Omega)}\quad(u\in L^{2,2}(\Omega))$$

是Hilbert空间．$H_0^2(\Omega)$按嵌入映射：$E\omega=(\omega,\ \omega_x,\ \omega_y,\ \omega_{xx},\ \omega_{xy},\ \omega_{yy})\quad(\omega\in H_0^2(\Omega))$，成为$L^{2,2}(\Omega)$的闭子空间，记以$U_0=EH_0^2(\Omega)$．

我们把$J(v)$看成是定义在$L^{2,2}(\Omega)$上，记

$$J(v)=\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}[(v^{20})^2+2(v^{11})^2+(v^{02})^2]-fv^{00}\right\}d\Omega\quad(v\in L^{2,2}(\Omega)) \tag{1.7}$$

$$a(u,v)=\int_\Omega(u^{20}v^{20}+2u^{11}v^{11}+u^{02}v^{02})d\Omega\quad(u,v\in L^{2,2}(\Omega)) \tag{1.8}$$

则(1.2)及(1.3)可以写成

$$u_0\in U_0,\ J(u_0)=\inf_{v\in U_0}J(v) \tag{1.2$'$}$$

$$u_0\in U_0,\ a(u_0,\ v)=f(v)\ \ (\forall v\in U_0) \tag{1.3$'$}$$

这里我们记$f(v)=\int_\Omega fv^{00}d\Omega$，把$f$看成$L^{2,2}(\Omega)$上的线性连续泛函，即$f\in(L^{2,2}(\Omega))^*$．

设U_τ $(\tau=1,2,\cdots)$是$L^{2,2}(\Omega)$的一列有限维子空间，则称问题

$$u_\tau\in U_\tau,\ J(u_\tau)=\inf_{v\in U_\tau}J(v)\qquad(\tau=1,2,\cdots) \tag{1.9}$$

$$u_\tau\in U_\tau,\ a(u_\tau,\ v)=f(v)\quad(\forall v\in U_\tau,\ \tau=1,2,\cdots) \tag{1.10}$$

为(1.2)或(1.3)的多套函数有限元逼近．U_τ称为$H_0^2(\Omega)$的逼近空间．当(1.10)有唯一解时，(1.9)也有唯一解且两解相同．

设$\varphi_\tau^1,\cdots,\varphi_\tau^{l_\tau}\in U_\tau$是$U_\tau$的一组基底，记$u_\tau=\sum_{i=1}^{l_\tau}b_\tau^i\varphi_\tau^i$，则(1.9)、(1.10)均化成下列代数方程组：

$$A_\tau B_\tau=F_\tau \tag{1.11}$$

其中$B_\tau=\{b_\tau^1, \cdots, b_\tau^{l_\tau}\}^T$，$F_\tau=\{f(\varphi_\tau^1), \cdots, f(\varphi_\tau^{l_\tau})\}^T$，$A_\tau=(a_{ij})_{l_\tau\times l_\tau}$，$a_{ij}=a(\varphi_\tau^i, \varphi_\tau^j)$ $(i,j=1,2,\cdots,l_\tau)$。

值得指出的是，我们并不要求$U_\tau\subset U_0$，即对任意$u\in U_\tau$，一般地$\partial_x u^{00}\neq u^{10}$，$\partial_x u^{10}\neq u^{20}$，等等。所以(1.9)或(1.10)才称做多套函数有限元逼近。

二、拟协调板元的构造方法

本节叙述唐立民等人[3]、[4]提出的构造拟协调板元的逼近空间的方法。这里我们的叙述较为一般一些。设Ω是R^2中的区域，$\{K_\tau\}_{\tau\in\mathfrak{T}}$是$\Omega$的一族有限元剖分，满足通常的假定（见[2]或[7]）。

在K_τ的每个单元K上给定域内函数插值算子Π_K^{00}，边界函数插值算子$\Pi_{\partial K}$，∂K上的切向及法向导数插值算子$\Pi_{\partial K}^S$及$\Pi_{\partial K}^N$；再给五个由K上的多项式组成的有限维空间N_K^{10}, N_K^{01}, N_K^{20}，N_K^{11}，N_K^{02}。

对任意$u\in H^2(K)$，$\Pi_K^{00}u$，$\Pi_{\partial K}u$，$\Pi_{\partial K}^N u$及$\Pi_{\partial K}^S u$分别是$u, u\big|_{\partial K}$，$\dfrac{\partial u}{\partial N}\Big|_{\partial K}$及$\dfrac{\partial u}{\partial S}\Big|_{\partial K}$的逼近*；而$\partial_x u, \partial_y u$，$\partial^2_{xx}u$，$\partial^2_{xy}u$，$\partial^2_{yy}u$ 的逼近函数$\Pi_K^{10}u, \Pi_K^{01}u, \Pi_K^{20}u, \Pi_K^{11}u, \Pi_K^{02}u$这样确定：$\Pi_K^{10}u\in N_K^{10}$，$\Pi_K^{01}u\in N_K^{01}$，$\Pi_K^{20}u\in N_K^{20}$，$\Pi_K^{11}u\in N_K^{11}$，$\Pi_K^{02}u\in N_K^{02}$且分别满足：

$$\forall P\in N_K^{10},\ \int_K P\Pi_K^{10}u\,d\Omega=\int_{\partial K}PN_1\Pi_{\partial K}u\,ds-\int_K P_x\Pi_K^{00}u\,d\Omega \tag{2.1}$$

$$\forall P\in N_K^{01},\ \int_K P\Pi_K^{01}u\,d\Omega=\int_{\partial K}PN_2\Pi_{\partial K}u\,ds-\int_K P_y\Pi_K^{00}u\,d\Omega \tag{2.2}$$

$$\forall P\in N_K^{20},\ \int_K P\Pi_K^{20}u\,d\Omega=\int_{\partial K}P[N_1^2\Pi_{\partial K}^N u-N_1N_2\Pi_{\partial K}^S u]ds-\int_K P_x\Pi_K^{10}u\,d\Omega \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\forall P\in N_K^{11}, 2\int_K P\Pi_K^{11}u\,d\Omega=&\int_{\partial K}P[2N_1N_2\Pi_{\partial K}^N u+(N_1^2-N_2^2)\,\Pi_{\partial K}^S u]ds\\&-\int_K(P_x\Pi_K^{01}u+P_y\Pi_K^{10}u)d\Omega\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\forall P\in N_K^{02},\ \int_K P\Pi_K^{02}u\,d\Omega=\int_{\partial K}P[N_2^2\Pi_{\partial K}^N u+N_1N_2\Pi_{\partial K}^S u]ds-\int_K P_y\Pi_K^{01}u\,d\Omega \tag{2.5}$$

其中(N_1, N_2)是∂K的单位外法线向量，当r是整数，$H^r(K)$为Sobolev空间[6]。

对$\forall u\in H_0^2(\Omega)$，它的逼近函数$\Pi_\tau u\in L^{2,2}(\Omega)$这样确定：在$K_\tau$的每个单元$K$上，$(\Pi_\tau u)^{00}|_K$ $=\Pi_K^{00}(u|_K)$，$(\Pi_\tau u)^{10}|_K=\Pi_K^{10}(u|_K)$，$(\Pi_\tau u)^{01}|_K=\Pi_K^{01}(u|_K)$，$(\Pi_\tau u)^{20}|_K=\Pi_K^{20}(u|_K)$，$(\Pi_\tau u)^{11}|_K=\Pi_K^{11}(u|_K)$，$(\Pi_\tau u)^{02}|_K=\Pi_K^{02}(u|_K)$。这里$u|_K$是$u$在$K$上的限制，其它的相同。

令$U_\tau=\Pi_\tau H_0^2(\Omega)=\{\Pi_\tau u|u\in H_0^2(\Omega)\}$，这样就得到了$H_0^2(\Omega)$的逼近空间。简称上述构造逼近空间的方法为QFE方法。

---

* $\dfrac{\partial u}{\partial N}\Big|_{\partial K}$，$\dfrac{\partial u}{\partial S}\Big|_{\partial K}$分别是$u$在$\partial K$上的外法向导数和切向导数，切向以逆时针为正。

注一．如果$u\in H^2(K)$，$v\in H^1(K)$，有Green公式：

$$\int_K v\partial_x u d\Omega=\int_{\partial K} vuN_1 ds-\int_K u\partial_x v d\Omega \tag{2.6}$$

$$\int_K v\partial_y u d\Omega=\int_{\partial K} vuN_2 ds-\int_K u\partial_y v d\Omega \tag{2.7}$$

$$\int_K v\begin{bmatrix}u_{xx}\\ 2u_{xy}\\ u_{yy}\end{bmatrix}d\Omega=\int_{\partial K} v\begin{bmatrix}N_1^2 & -N_1N_2\\ 2N_1N_2 & N_1^2-N_2^2\\ N_2^2 & N_1N_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial N}\\ \dfrac{\partial u}{\partial S}\end{bmatrix}ds-\int_K\begin{bmatrix}v_x & 0\\ v_y & v_x\\ 0 & v_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}d\Omega \tag{2.8}$$

拟协调元方法是把(2.6)式中K上的u，$\partial_x u$用$\Pi_K^{00}u$，$\Pi_K^{10}u$代替，∂K上的u用$\Pi_{\partial K}u$代替，使(2.6)式对$v\in N_K^{10}$仍然成立，这就是(2.1)式．(2.2)～(2.5)式用类似的思想得到．

注二．一般地对$\forall u\in H^2(K)$，等式$\Pi_K^{10}u=\partial_x\Pi_K^{00}u$，$\Pi_K^{01}u=\partial_y\Pi_K^{00}u$，$\Pi_K^{20}u=\partial_x\Pi_K^{10}u$，$\Pi_K^{11}u=\partial_x\Pi_K^{01}u=\partial_y\Pi_K^{10}u$，$\Pi_K^{02}u=\partial_y\Pi_K^{01}u$并不一定成立．它们成立的一个充分条件是$\Pi_K^{00}u|_{\partial K}=\Pi_{\partial K}u$，$\Pi_{\partial K}^S u=\dfrac{\partial}{\partial S}\Pi_K^{00}u|_{\partial K}$，$\Pi_{\partial K}^N u=\dfrac{\partial}{\partial N}\Pi_K^{00}u|_{\partial K}$，且$\partial_x\Pi_K^{00}u\in N_K^{10}$，$\partial_y\Pi_K^{00}u\in N_K^{01}$，$\partial_x^2\Pi_K^{00}u\in N_K^{20}$，$\partial_{xy}^2\Pi_K^{00}u\in N_K^{11}$，$\partial_{yy}^2\Pi_K^{00}u\in N_K^{02}$．这时拟协调方法就是熟知的协调或非协调方法．

我们以几个例子结束本节．它们均为三角形单元．

1． **9参元**[3] 给定K上的u的九个节点参数如图1．取$N_K^{20}=N_K^{11}=N_K^{02}=\mathscr{P}_1(K)$，$N_K^{10}=N_K^{01}=\mathscr{P}_2(K)$；$\Pi_{\partial K}^N u$在$ij$边上为在$i$，$j$点取$u$的法向导数值的一次多项式，$0\leqslant i<j\leqslant 2$；$\Pi_K^{00}u$为在$K$的节点上取$u$的相应参数值且在$K$的形心上取值为$\alpha$的三次多项式：$\Pi_{\partial K}u=\Pi_K^{00}u|_{\partial K}$，$\Pi_{\partial K}^S u=\dfrac{\partial}{\partial S}\Pi_K^{00}u|_{\partial K}$．这里$\alpha$这样定：因为$\Pi_{\partial K}u$在$ij$边上为三次多项式，而且在$i$，$j$点取$u$的函数值及切向导数值，因而它由节点参数唯一确定．记α_{ij}为$\Pi_{\partial K}u$在ij边中点的值．在ij边中点和h点($h\neq i$，j)的连线上做二次多项式它在h点取u的函数值及沿这连线的切向导数值，在ij边中点取值为α_{ij}．记α_h为此多项式在K的形心的值．则$\alpha=\dfrac{1}{3}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)$．若$r$是非负整数，$\mathscr{P}_r(K)=\{P|P$是次数不高于$r$的多项式$\}$．

2． **12参元**[3] 给定u的十二个参数如图2．取$N_K^{20}=N_K^{11}=N_K^{02}=\mathscr{P}_2(K)$，$N_K^{10}=N_K^{01}=\mathscr{P}_3(K)$；$\Pi_{\partial K}^N u$在$ij$边上为在$i$，$j$点及$ij$边中点取$u$的法向导数的二次多项式；$\Pi_{\partial K}u=\Pi_K^{00}u|_{\partial K}$，$\Pi_{\partial K}^S u=\dfrac{\partial}{\partial S}\Pi_K^{00}u|_{\partial K}$；设$W_h(h=0,1,2)$为取$K$的顶点的参数值及$h$点的对边中点参数值的三次多项式，则$\Pi_K^{00}u=\dfrac{1}{3}(W_0+W_1+W_2)$．

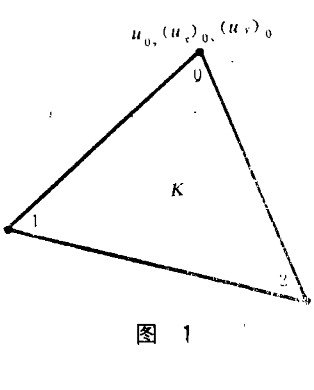

图 1

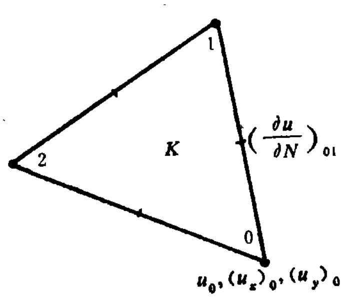

图 2

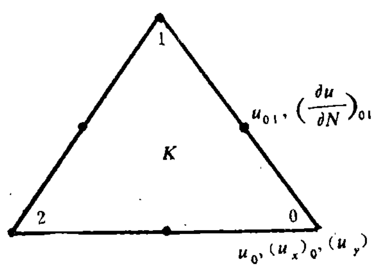

图 3

3. **15参元**[4] 给定u的十五个节点参数如图3. 取$N_K^{20}=N_K^{11}=N_K^{02}=\mathscr{P}_2(K)$, $N_K^{10}=N_K^{01}=\mathscr{P}_3(K)$; $\Pi_{\partial K}^N u$在ij边上为在i,j点及ij边中点取u的法向导数值的二次多项式; $\Pi_{\partial K}u=\Pi_K^{00}u|_{\partial K}$, $\Pi_{\partial K}^S u=\frac{\partial}{\partial S}\Pi_K^{00}u|_{\partial K}$; $\Pi_K^{00}u$为在K的节点上取u的相应参数值的四次多项式.

4. **18参元**[4] 给定u的十八个参数如图4. 取$N_K^{20}=N_K^{11}=N_K^{02}=\mathscr{P}_3(K)$; $N_K^{10}=N_K^{01}=\mathscr{P}_4(K)$; $\Pi_{\partial K}^N u$在ij边上为在i, j点取u的法向导数及其切向导数值的三次多项式; $\Pi_{\partial K}u=\Pi_K^{00}u|_{\partial K}$, $\Pi_{\partial K}^S u=\frac{\partial}{\partial S}\Pi_K^{00}u|_{\partial K}$; $\Pi_K^{00}u$为在K的节点上取u的参数值且在三边的中点处的法向导数值等$\Pi_{\partial K}^N u$在该点的值的五次多项式.

5. **21参元**[4]. 给定u的21个参数如图5. 取$N_K^{20}=N_K^{11}=N_K^{02}=\mathscr{P}_3(K)$, $N_K^{10}=N_K^{01}=\mathscr{P}_4(K)$; $\Pi_K^{00}u$为在K的节点处取u的参数值的五次多项式; $\Pi_{\partial K}u=\Pi_K^{00}u|_{\partial K}$, $\frac{\partial}{\partial S}\Pi_K^{00}u|_{\partial K}=\Pi_{\partial K}^S u$, $\Pi_{\partial K}^N u=\frac{\partial}{\partial N}\Pi_K^{00}u|_{\partial K}$. 这就是熟知的五次协调元.

在上面五个例子中, 因为$\Pi_{\partial K}u=\Pi_K^{00}u|_{\partial K}$以及$N_K^{10}$、$N_K^{01}$的取法, 都有$\Pi_K^{10}u=\partial_x\Pi_K^{00}u$, $\Pi_K^{01}u=\partial_y\Pi_K^{00}u$.

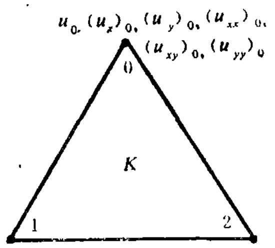

图 4

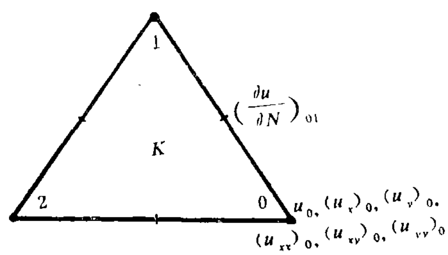

图 5

三、主 要 结 果

本节给出有关多套函数有限元逼近和拟协调板元的一些结果.

首先为了保证(1.10)的解存在唯一, 假定下述条件(A)成立.

(A): 存在与τ无关的常数η_1, η_2, 使得不等式:

$$\sup_{u,v\in U_\tau-\{0\}}\frac{|a(u,v)|}{\|u\|_{L^{2,2}(\Omega)}\|v\|_{L^{2,2}(\Omega)}}\leqslant\eta_1 \tag{3.1}$$

$$\inf_{u\in U_\tau-\{0\}}\sup_{v\in U_\tau-\{0\}}\frac{|a(u,v)|}{\|u\|_{L^{2,2}(\Omega)}\|v\|_{L^{2,2}(\Omega)}}\geqslant\eta_2>0 \tag{3.2}$$

对任意$\tau=1, 2, \cdots$一致成立.

在我们考虑的问题中，$a(\cdot,\cdot)$是满足(3.1)式的，但(3.2)式却需要验证．对此验证工作我们将另文讨论．在本文我们总是假定逼近空间$\{U_\tau\}_1^\infty$满足(3.2)式．如果在(1.11)中，我们选择的基底为在$L^{2,2}(\Omega)$意义下的标准正交基，则A_τ的最小特征值λ_τ满足$\inf\limits_\tau \lambda_\tau>0$时，(3.2)式成立．由Lax-Milgram定理[6]，条件(A)成立时(1.9)及(1.10)对$\forall f\in(L^{2,2}(\Omega))^*$总有唯一解．

定理1 假设条件(A)成立，则对任意$f\in(L^{2,2}(\Omega))^*$，(1.10)的解u_τ收敛于(1.3)′的解u_0，即$\lim\limits_{\tau\to\infty}\|u_0-u_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}=0$等价于下面两个条件成立：

1) 对任意$u\in U_0$，$\lim\limits_{\tau\to\infty}\ \inf\limits_{v\in U_\tau}\|u-v\|_{L^{2,2}(\Omega)}=0$；

2) 如果$v_\tau\in U_\tau$（$\tau=1,2,\cdots,$）且$\sup\limits_\tau\|v_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}<\infty$，则当$\tau\to\infty$时，有

$$T_{0,1}(\varphi,\ v_\tau)=\int_\Omega[\partial_x\varphi v_\tau^{00}+\varphi v_\tau^{10}]d\Omega\to0,\ T_{0,2}(\varphi,\ v_\tau)=\int_\Omega[\partial_y\varphi v_\tau^{00}+\varphi v_\tau^{01}]d\Omega\to0$$

$$T_{1,1}(\varphi,\ v_\tau)=\int_\Omega[\partial_x\varphi v_\tau^{10}+\varphi v_\tau^{20}]d\Omega\to0,\ T_{1,2}(\varphi,\ v_\tau)=\int_\Omega[\partial_y\varphi v_\tau^{10}+\varphi v_\tau^{11}]d\Omega\to0$$

$$T_{2,1}(\varphi,\ v_\tau)=\int_\Omega[\partial_x\varphi v_\tau^{01}+\varphi v_\tau^{11}]d\Omega\to0,\ T_{2,2}(\varphi,\ v_\tau)=\int_\Omega[\partial_y\varphi v_\tau^{01}+\varphi v_\tau^{02}]\,d\Omega\to0$$

其中φ是$C_0^\infty(R^n)$中的任意函数．

定理1完全类似于[7]的结果，差别是我们引进了多套函数的概念，按[7]的说法，当$\{U_\tau\}$满足条件1)时称为具有逼近性，满足条件2)时称为通过广义分片检验．在条件(A)成立的前提下，由定理1可知，要证明多套函数有限元逼近解的收敛性只须证明$\{U_\tau\}$具有逼近性且通过广义分片检验．下面给出QFE方法构造的逼近空间具有逼近性及通过广义分片检验的条件．

设Ω为在R^2上的有界多边形域，$\{K_\tau\}_1^\infty$是Ω的三角形（或矩形）剖分族，满足条件B1，B2，B3．

B1． $K\in K_\tau$为闭集，$\bar\Omega=\bigcup\limits_{K\in K_\tau}K$，（$\tau=1,2,\cdots$）

B2． 任意两个不同的单元K，$K'\in K_\tau$，$K\cap K'$或是空集或是K及K'的一条完整的公共边，或是一个点；

B3． 记ρ_K是K的最大内含圆直径，h_K是K的外径，$h_\tau=\sup\limits_{K\in K_\tau}h_K$（$\tau=1,2,\cdots$），则存在$\xi>0$使得$\xi h_\tau\leqslant\rho_K$对任意$K\in K_\tau(\tau=1,2,\cdots)$一致成立；而$\lim\limits_{\tau\to\infty}h_\tau=0$．

在这样的假设下我们有

定理2． 设q，$r\geqslant2$为整数．若在QFE方法中，N_K^{10}，N_K^{01}均包含$\mathscr{P}_{r-1}(K)$，N_K^{20}，N_K^{11}，N_K^{02}均包含$\mathscr{P}_{r-2}(K)$，而且N_K^{10}，N_K^{01}，N_K^{20}，N_K^{11}，$N_K^{02}\subset\mathscr{P}_q(K)$，则存在常数$c>0$使得不等式：

$$|\partial_x u-(\Pi_\tau u)^{10}|_{0,\Omega}^2+|\partial_y u-(\Pi_\tau u)^{01}|_{0,\Omega}^2\leqslant c\,\{h_\tau^{2r}|u|_{r+1,\Omega}^2+h_\tau^{-2}\sum_{K\in K_\tau}|u-\Pi_K^{00}u|_{0,K}^2+h_\tau^{-1}\sum_{K\in K_\tau}|u-\Pi_{\partial K}u|_{0,\partial K}^2\}\tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}&|\partial_{xx}^2 u-(\Pi_\tau u)_{20}|_{0,\Omega}^2+|\partial_{xy}^2 u-(\Pi_\tau u)^{11}|_{0,\Omega}^2+|\partial_{yy}^2 u-(\Pi_\tau u)^{02}|_{0,\Omega}^2\\&\leqslant c\Big\{h_\tau^{2(r-1)}|u|_{r+1,\Omega}^2+h_\tau^{-4}\sum_{K\in K_\tau}|u-\Pi_K^{00}u|_{0,K}^2+h_\tau^{-3}\sum_{K\in K_\tau}|u-\Pi_{\partial K}u|_{0,\partial K}^2\\&\quad+h_\tau^{-1}\sum_{K\in K_\tau}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial N}-\Pi_{\partial K}^N u\Big|_{0,\partial K}^2+\Big|\frac{\partial u}{\partial S}-\Pi_{\partial K}^S u\Big|_{0,\partial K}^2\Big)\Big\}\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\|Eu-\Pi_\tau u\|_{L^{2,2}(\Omega)}^2\leqslant c\Big\{&h_\tau^{2(r-1)}|u|_{r+1,\Omega}^2+h_\tau^{-4}\sum_{K\cdot K_\tau}|u-\Pi_K^{00}u|_{0,K}^2+h_\tau^{-3}\sum_{K\partial K_\tau}|u\\&-\Pi_{\partial K}u|_{0,\partial K}^2+h_\tau^{-1}\sum_{K\in K_\tau}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial N}-\Pi_{\partial K}^N u\Big|_{0,\partial K}^2+\Big|\frac{\partial u}{\partial S}-\Pi_{\partial K}^S u\Big|_{0,\partial K}^2\Big)\Big\}\end{aligned}\tag{3.5}$$

对$\forall u\in H^{r+1}(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$，$\forall\tau=1,\ 2,\ \cdots$，一致成立。

其中$|\cdot|_{l,\Omega}$，$|\cdot|_{l,K}$分别是$H^l(\Omega)$，$H^l(K)$上的Sobolev半范，$|\cdot|_{0,\partial K}=\|\cdot\|_{L^2(\partial K)}$。

定理 2 实际上已经给出用 QFE 方法构造的逼近空间具是逼近性的条件。大致说来，$|u-\Pi_K^{00}u|_{0,K}$，$|u-\Pi_{\partial K}u|_{0,\partial K}$，$\Big|\frac{\partial u}{\partial N}-\Pi_{\partial K}^N u\Big|_{0,\partial K}+\Big|\frac{\partial u}{\partial N}-\Pi_{\partial K}^S u\Big|_{0,\partial K}$分别是$o(h_\tau^2)$，$o(h_\tau^{\frac{3}{2}})$，$o(h^{\frac{1}{2}})$就可以满足逼近条件。而这只要$\Pi_K^{00}u$，$\Pi_{\partial K}u$为不低于二次的插值多项式，$\Pi_{\partial K}^N u,\Pi_{\partial K}^S u$为不低于一次的插值多项式就能办到。严格地我们有如下推论。

推论3. 设q，r_1，r_2，r_3，r_4，r_5均为不小于 2 的整数，如果在QFE方法中，有

1) N_K^{10}，N_K^{01}均包含$\mathscr{P}_{r_1-1}(K)$，N_K^{20}，N_K^{11}，N_K^{02}均包含$\mathscr{P}_{r_1-2}(K)$，且N_K^{10}，N_K^{01}，N_K^{20}，N_K^{11}，$N_K^{02}\subset\mathscr{P}_q(K)$；

2) Π_K^{00}，$\Pi_{\partial K}$，$\Pi_{\partial K}^S$分别是不低于r_2，r_3，r_4-1阶多项式插值算子，且对$\forall P\in\mathscr{P}_{r_2}(K)$有$\Pi_K^{00}P=P$，$\forall P\in\mathscr{P}_{r_3}(K)$有$\Pi_{\partial K}P=P|_{\partial K}$，$\forall P\in\mathscr{P}_{r_4}(K)$有$\Pi_{\partial K}^S P=\frac{\partial}{\partial S}P|_{\partial K}$；若$\Pi_K^{00}$（或$\Pi_{\partial K}$，$\Pi_{\partial K}^S$）有$l$阶导数插值点则要求$r_2$(或$r_3$，$r_4$)$\geqslant l+1$；$\{\Pi_K^{00}\}$，$\{\Pi_{\partial K}\}$，$\{\Pi_{\partial K}^S\}$均具有仿射等价性(见[8])。

3) 在∂K的每一边F上，$\Pi_{\partial K}^N$是用$r_5'(\geqslant1)$个法向导数插值点、r_5''个法向导数的切向导数插值点构造的r_5-1阶法向导数插值算子，这里$r_5=r_5'+r_5''$，$r_5''\neq0$时$r_5\geqslant3$；插值点在F上的相对位置不随F和K而变。

则存在常数$c>0$，使得

$$\|Eu-\Pi_\tau u\|_{L^{2,2}(\Omega)}\leqslant c\sum_{i=1}^{5}h_\tau^{r_i-1}|u|_{r_i+1,\Omega}\tag{3.6}$$

对$\forall u\in H^r(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$，$\forall\tau=1,2,\cdots$，一致成立．$r=\max\limits_i(r_i+1)$．

这一推论说明，当其条件满足时，$U_\tau=\Pi_\tau H_0^2(\Omega)$具有逼近性．下面讨论通过广义分片检验的条件．

定理4． 假设在QFE方法中，有

1）对三角形（或矩形）剖分，N_K^{10}，N_K^{01}，N_K^{20}，N_K^{11}，N_K^{02}均包含$\mathscr{P}_1(K)$(或$\mathscr{L}_1(K)$)，这里$\mathscr{L}_1(K)=\{P|P$是x、y的次数不高于1的多项式$\}$；

2）当F是不同的单元K，K'的一条共同边时，对$\forall u\in H_0^2(\Omega)$有

$$P\in\mathscr{P}_1(F),\ \int_F P\begin{bmatrix}\Pi_{\partial K}u\\ \Pi_{\partial K}^N u\\ \Pi_{\partial K}^S u\end{bmatrix}ds=\int_F P\begin{bmatrix}\Pi_{\partial K'}u\\ -\Pi_{\partial K'}^{N'}u\\ -\Pi_{\partial K'}^{S'}u\end{bmatrix}ds \tag{3.7}$$

3）当$F=K\cap\partial\Omega$是K的一条边时，对$\forall u\in H_0^2(\Omega)$有

$$P\in\mathscr{P}_1(F),\int_F P\Pi_{\partial K}uds=\int_F P\Pi_{\partial K}^N uds=\int_F P\Pi_{\partial K}^S uds=0$$

则$U_\tau=\Pi_\tau H_0^2(\Omega)$通过广义分片检验．

综合上面的讨论可以给出QFE方法收敛的条件．

定理5． 设Ω的剖分族$\{K_\tau\}$（三角形剖分或矩形剖分）满足B1，B2，B3；设$U_\tau=\Pi_\tau H_0^2(\Omega)$ $(\tau=1,2,\cdots)$满足条件(A)；q，r_1，r_2，r_3，r_4为不小于2的整数．如果在QFE方法中有：

1）对三角形（或矩形）剖分，N_K^{10}，N_K^{01}，N_K^{20}，N_K^{11}，N_K^{02}均包含$\mathscr{P}_1(K)$(或$\mathscr{L}_1(K)$)，且N_K^{10}，N_K^{01}，N_K^{20}，N_K^{11}，$N_K^{02}\subset\mathscr{P}_q(K)$；

2）Π_K^{00}，$\Pi_{\partial K}$，$\Pi_{\partial K}^S$分别是不低于r_1，r_2，r_3-1阶的多项式插值算子，对$\forall P\in\mathscr{P}_{r_1}(K)$有$\Pi_K^{00}P=P$，$\forall P\in\mathscr{P}_{r_2}(K)$有$\Pi_{\partial K}P=P|_{\partial K}$，$\forall P\in\mathscr{P}_{r_3}(K)$有$\left.\dfrac{\partial P}{\partial S}\right|_{\partial K}=\Pi_{\partial K}^S P$；若$\Pi_K^{00}$（或$\Pi_{\partial K}$，$\Pi_{\partial K}^S$）有$l$阶导数插值点则$r_1$（或$r_2,r_3$）$\geqslant l+1$；$\{\Pi_K^{00}\}$，$\{\Pi_{\partial K}\}$，$\{\Pi_{\partial K}^S\}$均具有仿射等价性；

3）在∂K的每一边F上，$\Pi_{\partial K}^N$是用$r_4'(\geqslant1)$个法向导数、r_4''个法向导数的切向导数插值点构造的r_4-1阶法向导数插值算子，这里$r_4=r_4'+r_4''$，$r_4''\neq0$时$r_4\geqslant3$；插值点在F上的相对位置不随F，K变；

4）当F是两个不同单元K，K'的公共边时，对$\forall u\in H_0^2(\Omega)$有

$$P\in\mathscr{P}_1(F),\ \int_F P\begin{bmatrix}\Pi_{\partial K}u\\ \Pi_{\partial K}^S u\end{bmatrix}ds=\int_F P\begin{bmatrix}\Pi_{\partial K'}u\\ -\Pi_{\partial K'}^{S'}u\end{bmatrix}ds$$

当$F=K\cap\partial\Omega$是K的一条边时，对$\forall u\in H_0^2(\Omega)$，$\forall P\in\mathscr{P}_1(F)$，有$\int_F P\Pi_{\partial K}uds=\int_F P\Pi_{\partial K}^N uds=\int_F P\Pi_{\partial K}^S uds=0$．

则当$U_\tau=\Pi_\tau H_0^2(\Omega)$ $(\tau=1,2,\cdots)$时，(1.10)的u_τ收敛于(1.3)′的解u_0．

容易验证，第二节中的五个例子均具有逼近性且通过广义分片检验．

例如9参元，由于Π_K^{00}的构造只用切向导数和函数插值点，所以具有仿射等价性，而且

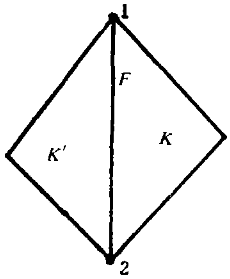

图 6

显然有$\Pi_K^{00}P=P$，$P\in\mathscr{P}_2(K)$。所以定理5的1)～3)满足。由于$\Pi_K^{00}u$，$\Pi_{K'}^{00}u$在F上的值完全由节点1、2的函数值、切向导数值确定，所以$\Pi_{\partial K}u|_F=\Pi_{\partial K'}u|_F$，$\Pi_{\partial K}^S u|_F=-\Pi_{\partial K'}^{S'}u|_F$。再注意$K$，$K'$在边$F$上的外法向反向，所以有$\Pi_{\partial K}^N u|_F=-\Pi_{\partial K'}^{N'}u|_F$；而当节点在$\partial\Omega$时节点参数均为零，所以$\Pi_{\partial K}u|_F=\Pi_{\partial K}^S u|_F=\Pi_{\partial K}^N u|_F=0$当$F=K\cap\partial\Omega$时，这说明定理5的条件4)成立。因而9参元具有逼近性且通过广义分片检验。

四、主要结果的证明

本节我们证明第三节的结果。定理1的证明类似于[7]文的结果。其它结论的证明需要如下几个引理。假定第三节中关于$\{K_\tau\}$的假设成立。

引理1　设$r\geqslant1$为整数，线性连续算子Π_K：$H^{r+1}(K)\to H^m(K)$　$(0<m\leqslant r+1)$满足$\Pi_K P=P$，$\forall P\in\mathscr{P}_r(K)$，且$\{\Pi_K\}$具有仿射等价性，则存在常数$c>0$使得

$$|u-\Pi_K u|_{l,k}\leqslant ch_\tau^{r+1-l}|u|_{r+1,K}\quad(0\leqslant l\leqslant m)\tag{4.1}$$

$$|u-\Pi_K u|_{0,\partial K}\leqslant ch_\tau^{r+\frac12}|u|_{r+1,K}\tag{4.2}$$

$$|\partial_x(u-\Pi_K u)|_{0,\partial K}+|\partial_y(u-\Pi_K u)|_{0,\partial K}\leqslant ch_\tau^{r-\frac12}|u|_{r+1,K}\tag{4.3}$$

对$\forall u\in H^{r+1}(K)$，$\forall K\in K_\tau$　$(\tau=1,2,\cdots)$一致成立。特别地令$\Pi_K=P_r^K$：$L^2(K)\to\mathscr{P}_r(K)$是正交投影算子，则(4.1)～(4.3)成立。

引理2.　设$r\geqslant1$为整数，下面两个结论成立。

1)　如果线性连续算子$\Pi_{\partial K}$：$H^{r+1}(K)\to L^2(\partial K)$满足$\forall P\in\mathscr{P}_r(K)$，$\Pi_{\partial K}P=P|_{\partial K}$，且$\{\Pi_{\partial K}\}$具有仿射等价性，则存在常数$c>0$使得

$$|u-\Pi_{\partial K}u|_{0,\partial K}\leqslant ch_\tau^{r+\frac12}|u|_{r+1,K}\tag{4.4}$$

对$\forall u\in H^{r+1}(K)$，$\forall K\in K_\tau(\tau=1,2,\cdots)$一致成立。

2)　如果线性连续算子$\Pi_{\partial K}^S$：$H^{r+1}(K)\to L^2(\partial K)$满足$\forall P\in\mathscr{P}_r(K)$，$\Pi_{\partial K}^S P=\left.\dfrac{\partial P}{\partial S}\right|_{\partial K}$，$\{\Pi_{\partial K}^S\}$具有仿射等价性，则存在常数$c>0$使得

$$\left|\frac{\partial u}{\partial S}-\Pi_{\partial K}^S u\right|_{0,\partial K}\leqslant ch_\tau^{r-\frac12}|u|_{r+1,K}\tag{4.5}$$

对$\forall u\in H^{r+1}(K)$，$\forall K\in K_\tau(\tau=1,2,\cdots)$一致成立。

引理3.　对任意整数q，存在$c_q>0$使得

$$\max_{x\in K}|P(x)|\leqslant c_q h_\tau^{-1}|P|_{0,K}\tag{4.6}$$

$$|P|_{t+1,K}\leqslant c_q h_\tau^{-1}|P|_{t,K}\quad(t=0,1,2,\cdots)\tag{4.7}$$

对$\forall P\in\mathscr{P}_q(K)$，$\forall K\in K_\tau(\tau=1,2,\cdots)$，一致成立。

引理1、2可以利用Bramble-Hilbert引理[6]及仿射变换的技巧[8]得到，而引理3可以利用有限维空间各范数等价及仿射变换的技巧得到。

定理2的证明：记$\omega=P_\tau^K u$，则

$$|u_x-(\Pi_\tau u)^{10}|_{0,K}\leqslant|u_x-\omega_x|_{0,K}+|\omega_x-(\Pi_\tau u)^{10}|_{0,K}$$

利用引理1，注意$(\Pi_\tau u)^{10}|_K=\Pi_K^{10}u$，有

$$|u_x-(\Pi_\tau u)^{10}|_{0,K}\leqslant ch_\tau^r|u|_{r+1,K}+|\omega_x-\Pi_K^{10}u|_{0,K} \tag{4.8}$$

而利用(2.6)式，$\omega_x-\Pi_K^{10}u\in N_K^{10}$及(2.1)式有

$$\begin{aligned}|\omega_x-\Pi_K^{10}u|_{0,K}^2&=\int_K(\omega_x-\Pi_K^{10}u)(\omega_x-\Pi_K^{10}u)d\Omega\\&=\int_{\partial K}N_1(\omega_x-\Pi_K^{10}u)(\omega-\Pi_{\partial K}u)ds-\int_K\partial_x(\omega_x-\Pi_K^{10}u)(\omega-\Pi_K^{00}u)d\Omega\\&\leqslant|\omega_x-\Pi_K^{10}u|_{0,\partial K}|\omega-\Pi_{\partial K}u|_{0,\partial K}+|\omega_x-\Pi_K^{10}u|_{1,K}|\omega-\Pi_K^{00}u|_{0,K}\\&\leqslant c|\omega_x-\Pi_K^{10}u|_{0,K}[h_\tau^{-\frac{1}{2}}|\omega-\Pi_{\partial K}u|_{0,\partial K}+h_\tau^{-1}|\omega-\Pi_K^{00}u|_{0,K}]\end{aligned}$$

这里我们利用了引理3，再利用引理1、(4.8)式及

$$|\omega-\Pi_{\partial K}u|_{0,\partial K}\leqslant|\omega-u|_{0,\partial K}+|u-\Pi_{\partial K}u|_{0,\partial K},$$

$$|\omega-\Pi_K^{00}u|_{0,K}\leqslant|\omega-u|_{0,K}+|u-\Pi_K^{00}u|_{0,K}$$

得

$$|u_x-(\Pi_\tau u)^{10}|_{0,K}\leqslant c\{h_\tau^r|u|_{r+1,K}+h_\tau^{-1}|u-\Pi_K^{00}u|_{0,K}+h_\tau^{-\frac{1}{2}}|u-\Pi_{\partial K}u|_{0,K}\}$$

类似地可得

$$|u_y-(\Pi_\tau u)^{01}|_{0,K}\leqslant c\{h_\tau^r|u|_{r+1,K}+h_\tau^{-1}|u-\Pi_K^{00}u|_{0,K}+h_\tau^{-\frac{1}{2}}|u-\Pi_{\partial K}u|_{0,K}\}$$

注意到

$$|u_x-(\Pi_\tau u)^{10}|_{0,\Omega}^2+|u_y-(\Pi_\tau u)^{01}|_{0,\Omega}^2=\sum_{K\in K_\tau}[|u_x-(\Pi_\tau u)^{10}|_{0,K}^2+|u_y-(\Pi_\tau u)^{01}|_{0,K}^2]$$

于是得到(3.3)式。

类似地可以得到(3.4)式。(3.5)不过是(3.3)、(3.4)的推论。

定理2得证。

推论3的证明：由定理2及引理1、2，我们只须证明对∂K的每一边F，有与K、F无关的常数$c>0$使得

$$\left|\frac{\partial u}{\partial N}-\Pi_{\partial K}^N u\right|_{0,F}\leqslant ch_\tau^{r_5-\frac{1}{2}}|u|_{r_5+1,K} \tag{4.9}$$

对$\forall u\in H^{r_5+1}(K)$成立。

对固定的$K\in K_\tau$的每一边F，定义线性连续算子$\Pi_F^{\partial K}$：$H_*^r(K)\to L^2(\partial K)$满足$\Pi_F^{\partial K}$在$F$上为取$F$上法向导数插值点、法向导数的切向导数插值点分别为函数插值点、切向导数插值点的r_5-1阶函数插值多项式算子，而$\Pi_F^{\partial K}u|_{\partial K-F}=u|_{\partial K-F}$，$\forall u\in H^{r_5}(K)$，显然，$\forall P\in\mathscr{P}_{r_5-1}(K)$，$\Pi_F^{\partial K}P=P|_{\partial K}$，由于$\Pi_F^{\partial K}$只用函数及切向导数插值点，所以$\{\Pi_F^{\partial K}\}$具有仿射等价性，因而存在常数$c>0$使

$$|\omega-\Pi_F^{\partial K}\omega|_{0,F}\leqslant ch^{r_5-\frac{1}{2}}|\omega|_{r_5,K} \tag{4.10}$$

对$\forall F\subset\partial K$，$K\in K_\tau(\tau=1,2,\cdots)$，及$\omega\in H^{r_5}(K)$一致成立。特别地取$\omega=\dfrac{\partial u}{\partial N_F}$，$N_F$是$F$的外法向方向，就得(4.9)式。

推论 3 得证。

定理 4 的证明：设$v_\tau\in\Pi_\tau H_0^2(\Omega)(\tau=1,2,\cdots)$，$\sup\limits_\tau\|v_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}<\infty$，$\varphi\in C_0^\infty(R^n)$，为得定理 4 的结论要证明

$$\lim_{\tau\to\infty}T_{i,j}(\varphi,v_\tau)=0\quad(i=0,1,2;\ j=1,2).$$

记$u_\tau\in H_0^2(\Omega)$是v_τ的原象：$\Pi_\tau u_\tau=v_\tau$，$\Pi_\tau^*\varphi\in H^1(\Omega)$，在三角形剖分时$\Pi_\tau^*\varphi|_K\in\mathscr{P}_1(K)$且在$K$的顶点处取$\varphi$在该点的值，在矩形剖分时$\Pi_\tau^*\varphi|_K\in\mathscr{L}_1(K)$且在$K$的四个顶点取$\varphi$的在该点的值。利用定理 4 的条件及(2.1)式有

$$T_{0,1}(\varphi,v_\tau)=\sum_{K\in K_\tau}\int_K(\varphi v_\tau^{10}+\partial_x\varphi v_\tau^{00})d\Omega$$

$$=\sum_{K\in K_\tau}\int_K\{(\varphi-\Pi_\tau^*\varphi)v_\tau^{10}+\partial_x(\varphi-\Pi_\tau^*\varphi)v_\tau^{00}\}d\Omega+\sum_{K\in K_\tau}\int_{\partial K}\Pi_\tau^*\varphi\Pi_{\partial K}u_\tau N_1ds$$

$$=\sum_K\int_K[(\varphi-\Pi_\tau^*\varphi)v_\tau^{10}+\partial_x(\varphi-\Pi_\tau^*\varphi)v_\tau^{00}]d\Omega$$

利用Schwarz不等式及定理 1 得

$$|T_{0,1}(\varphi,v_\tau)|\leqslant ch_\tau\|v_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}|\varphi|_{2,\Omega}\quad(\tau=1,2,\cdots) \tag{4.11}$$

类似地得

$$|T_{0,2}(\varphi,v_\tau)|\leqslant ch_\tau\|v_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}|\varphi|_{2,\Omega}\quad(\tau=1,2,\cdots) \tag{4.12}$$

$$|T_{1,1}(\varphi,v_\tau)|\leqslant ch_\tau\|v_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}|\varphi|_{2,\Omega}\quad(\tau=1,2,\cdots) \tag{4.13}$$

$$|T_{2,2}(\varphi,v_\tau)|\leqslant ch_\tau\|v_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}|\varphi|_{2,\Omega}\quad(\tau=1,2,\cdots) \tag{4.14}$$

对其余的两个有

$$|T_{1,2}(\varphi,v_\tau)|\leqslant ch_\tau\|v_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}[|\varphi|_{2,\Omega}+|\varphi|_{3,\Omega}]\quad(\tau=1,2,\cdots) \tag{4.15}$$

$$|T_{2,1}(\varphi,v_\tau)|\leqslant ch_\tau\|v_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}[|\varphi|_{2,\Omega}+|\varphi|_{3,\Omega}]\quad(\tau=1,2,\cdots) \tag{4.16}$$

我们只证(4.15)。(4.16)类似可得。

$$2T_{1,2}(\varphi,v_\tau)=2\sum_K\int_K[\varphi v_\tau^{11}+\partial_y\varphi v_\tau^{10}]d\Omega$$

$$=\sum_K\int_K[2(\varphi-\Pi_\tau^*\varphi)v_\tau^{11}+\partial_y(\varphi-\Pi_\tau^*\varphi)v_\tau^{10}+\partial_x(\varphi-\Pi_\tau^*\varphi)v_\tau^{01}]d\Omega$$

$$+\sum_K\int_K[\partial_y\varphi v_\tau^{10}-\partial_x\varphi v_\tau^{01}]d\Omega \tag{4.17}$$

而 $\displaystyle\sum\int_K[\varphi_y v_\tau^{10}-\varphi_x v_\tau^{01}]d\Omega=\sum\int_K\{(\varphi_y-\Pi_\tau^*\varphi_y)v_\tau^{10}-(\varphi_x-\Pi_\tau^*\varphi_x)v_\tau^{01}$

$$+\partial_x(\varphi_y-\Pi_\tau^*\varphi_y)v_\tau^{00}-\partial_y(\varphi_x-\Pi_\tau^*\varphi_x)v_\tau^{00}\}d\Omega$$

将上式代入(4.17)，利用Schwarz不等式及引理 1 可得(4.15)．由于 $\lim_{\tau\to\infty} h_\tau = 0$，所以定理 4 结论成立．

定理 4 得证．

至于定理 5 完全是前几个结论的推论．

至此，主要结果证毕．

最后我们对唐立民教授的热情支持和鼓励表示谢意．

参 考 文 献

[1] Zhang Hong-qing, The generalized patch test and 9-parameter quasi-conforming element, *Proceedings of Sino-France Symposinm on Finite Element Methods*, Edited by Feng Kang and J. L. Lions, Science press, Gordon and Breach, Science Publishers, (1983), 566-583.

[2] 张鸿庆，多套函数广义分片检验与12参数拟协调元，大连工学院学报，21，3(1982)，11—19.

[3] 唐立民、陈万吉、刘迎曦，有限元分析中的拟协调元，大连工学院学报，19，2(1980)，19—35.

[4] 蒋和洋，用拟协调元法推导高精度三角形板弯曲单元，大连工学院学报，20，增刊 2(1981)，21—28.

[5] 钱伟长，《变分法与有限元》，上册，科学出版社，(1980).

[6] Oden, J. T. and J. N. Reddy., *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, Wiley-Interscience, New York, (1976).

[7] Stummel, F., The generalized patch test, *SIAM J. Nun. Anal.*, 16(1976), 449-471.

[8] Ciarlet, P. C., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford (1978).

Finite Element Approximations with Multiple Sets of Functions and Quasi-Conforming Elements for Plate Bending Problems

Zhang Hong-qing Wang Ming

(*Department of Applied Mathematics, Dalian Institute of Technology*)

Abstract

Continuing papers [1], [2], we try to establish here the mathematical foundation of quasi-conforming elements suggested by Prof. Tang Limin and his colleagues for plate bending problems[3,4]. The main theme used in this paper is the finite element approximations with multiple sets of functions.