

半无穷平面到半无穷长圆管 的低雷诺数流动

吴望一 R.斯加拉克

(北京大学力学系) (哥伦比亚大学土木工程和工程力学系)

(1984年1月6日收到)

摘 要

本文利用匹配法和配置法求出了粘性流体从半无穷平面到半无穷长圆管的 Stokes 流动的无穷级数形式的解。结果表明, 经过圆柱半径的一半路程之后, 速度剖面和 Poiseuille 剖面只差 1%。初始段长度比 Dagan 的有限长圆管情形显著缩短, 在孔口外的半无穷空间内, 孔口右边的边界只对孔口附近一倍管径的区域有强烈影响, 在此以外的区域内几乎没有影响。此外, 本文还对压力和流量的关系进行了研究。

一、引 言

最近, Dagan^[1] 等人成功地利用匹配法处理了粘性流体经过有限长小孔的 Stokes 流动。将一个复杂的流场分解为两个简单的流动区域, 在每一个简单的流动区域内都找出合适的级数展式, 然后让这两组解在交接面上满足运动学和动力学匹配条件, 由此确定出级数展式中的待定系数。Dagan 的解对于了解生物膜和人造膜的输运及渗滤过程很有帮助, 对于了解毛细血管中的 Fahraeus 效应也有一定的参考价值。但是, 由于在低雷诺数流动中, 有限长圆管和无限长圆管的解在数量上存在着显著的差别 (参看吴望一和 Skalak^[2]), 因此要确切地了解比半径长得多的毛细血管内的流动特性, 应该研究半无穷空间经过小孔到半无穷圆管的 Stokes 流。本文在文献 [1], [2] 的基础上, 应用文 [1] 中发展起来的匹配法求得了上述问题的解。结果表明, 和入口流问题一样, 入口段的长度比有限长圆管情形显著地缩短。应该指出, 在处理的技巧上, 本文和文 [1] 略有不同。Dagan 等人在交接面满足的条件中利用了反演法, 而在本文中则利用配置法。由于在不少较复杂的问题中不能得到反演后的分析表达式, 因此使用配置法解方程组具有更大的适用范围。

二、数 学 提 法

考虑粘性流体自半无穷空间通过小孔流入半无穷长圆管的低雷诺数运动。利用轴对称运

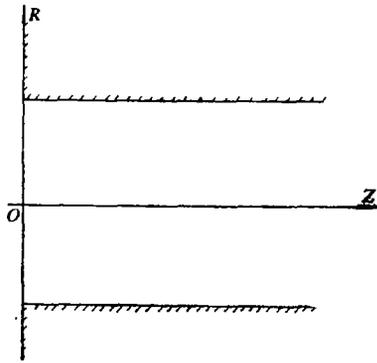


图1 从半无穷平面到半无穷长圆管的Stokes流动的几何图形

动的流函数, 并引进 a , U , $\frac{\mu U}{a}$, Ua^2 为长度, 速度, 压力和流函数的特征值, 则无量纲流函数满足下列方程

$$D^2(D^2\psi) = 0 \quad (2.1)$$

其中 a 为圆柱的半径, U 是圆管内的平均流速, μ 为流体的动力学粘性系数, D^2 是推广轴对称Stokes算子, 它在图1所示的柱坐标系中具有以下表达式

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

ψ 与无量纲轴向速度 v_z , 无量纲径向速度 v_R 以及无量纲压力 p 之间的关系为

$$v_z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R}, \quad v_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} (D^2\psi), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (D^2\psi) \quad (2.4)$$

将整个流场划分为两个区域: 小孔外的半无穷空间 I 和小孔内被半无穷长圆管所包围的区域 II.

Parmet 和 Seibel^[3] 给出了区域 I 内的解, 其形式为

$$\psi^I(R, z) = \int_0^\infty R J_1(\omega R) [A(\omega) + zB(\omega)] e^{\omega z} d\omega \quad (z \leq 0) \quad (2.5)$$

其中 J_1 为一阶 Bessel 函数, $A(\omega)$, $B(\omega)$ 是待定的函数. 利用 (2.3) 式及 (2.4) 式, 区域 I 内的速度及压力表达式为:

$$v_z^I(R, z) = \int_0^\infty \omega J_0(\omega R) [A(\omega) + zB(\omega)] e^{\omega z} d\omega \quad (2.6a)$$

$$v_R^I(R, z) = -\int_0^\infty \omega J_1(\omega R) \left\{ \frac{1}{\omega} [\omega A(\omega) + (1 + \omega z) B(\omega)] e^{\omega z} \right\} d\omega \quad (2.6b)$$

$$p^I(R, z) = p_{-\infty} + 2 \int_0^\infty \omega J_0(\omega R) B(\omega) e^{\omega z} d\omega \quad (2.6c)$$

其中 $p_{-\infty}$ 是负无穷远处的压力.

引进

$$F^*(\omega, z) = [A(\omega) + zB(\omega)] e^{\omega z} \quad (2.7a)$$

$$G^*(\omega, z) = -\frac{1}{\omega} [\omega A(\omega) + (1 + \omega z) B(\omega)] e^{\omega z} \quad (2.7b)$$

于是 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$ 可通过 $F^*(\omega, 0)$, $G^*(\omega, 0)$ 表出, 它们之间的关系为:

$$A(\omega) = F^*(\omega, 0), \quad B(\omega) = \omega [G^*(\omega, 0) - F^*(\omega, 0)] \quad (2.8)$$

利用 (2.7) 式可得到 $F^*(\omega, z)$, $G^*(\omega, z)$ 与 $F^*(\omega, 0)$, $G^*(\omega, 0)$ 之间的关系:

$$F^*(\omega, z) = \{F^*(\omega, 0) + \omega z [G^*(\omega, 0) - F^*(\omega, 0)]\} e^{\omega z} \quad (2.9a)$$

$$G^*(\omega, z) = \{-\omega z F^*(\omega, 0) + (1 + \omega z) G^*(\omega, 0)\} e^{\omega z} \quad (2.9b)$$

将 (2.5), (2.6) 式中的 $A(\omega)$, $B(\omega)$ 用 F^* , G^* 代替, 我们有:

$$\psi^1(R, z) = \int_0^\infty R J_1(\omega R) F^*(\omega, z) d\omega \quad (2.10a)$$

$$v_z^1(R, z) = \int_0^\infty \omega J_0(\omega R) F^*(\omega, z) d\omega \quad (2.10b)$$

$$v_R^1(R, z) = - \int_0^\infty \omega J_1(\omega R) G^*(\omega, z) d\omega \quad (2.10c)$$

$$p^1(R, z) = p_{-\infty} + 2 \int_0^\infty \omega^2 J_0(\omega R) [G^*(\omega, 0) - F^*(\omega, 0)] e^{\omega z} d\omega \quad (2.10d)$$

设孔口截面上的速度为

$$v_z^1(R, 0) = f(R)/R = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(k_n R) \quad (2.11a)$$

$$v_R^1(R, 0) = -g(R)/R = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_1(q_n R) \quad (2.11b)$$

其中 $f(R)$, $g(R)$ 为待求的函数, k_n , q_n 是零阶和一阶 Bessel 函数的 n 级零点. a_n , b_n 是 $f(R)$, $g(R)$ 的 Bessel 展式中的待定系数. 现在 $F^*(\omega, 0)$, $G^*(\omega, 0)$ 可通过 $f(R)$, $g(R)$ 或 a_n , b_n 表出. 为此令 (2.6a), (2.6b) 满足 $z=0$ 上的下列边界条件

$$v_z^1(R, 0) = \begin{cases} 0 & (R > 1) \\ f(R)/R & (0 < R < 1) \end{cases} \quad (2.12a)$$

$$v_R^1(R, 0) = \begin{cases} 0 & (R > 1) \\ -g(R)/R & (0 < R < 1) \end{cases} \quad (2.12b)$$

由此得:

$$\int_0^\infty \omega J_0(\omega R) F^*(\omega, 0) d\omega = f(R)/R, \quad - \int_0^\infty \omega J_1(\omega R) G^*(\omega, 0) d\omega = -g(R)/R$$

将上述 Hankel 变换反演之, 并考虑到 (2.11a) 及 (2.11b) 式我们有:

$$F^*(\omega, 0) = \int_0^1 f(\xi) J_0(\omega \xi) d\xi = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{k_n J_1(k_n)}{\omega^2 - k_n^2} J_0(\omega) \quad (2.13a)$$

$$G^*(\omega, 0) = \int_0^1 g(\xi) J_1(\omega \xi) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{q_n J_0(q_n)}{\omega^2 - q_n^2} J_1(\omega) \quad (2.13b)$$

将 (2.13) 式代入 (2.9) 式及 (2.10) 式中去, 经过整理后得:

$$v_z^1(R, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n M_n^{(1)}(R, z) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n N_n^{(1)}(R, z) \quad (2.14a)$$

$$v_R^1(R, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n M_n^{(2)}(R, z) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n N_n^{(2)}(R, z) \quad (2.14b)$$

$$\psi^1(R, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n M_n^{(3)}(R, z) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n N_n^{(3)}(R, z) \quad (2.14c)$$

$$p^1(R, z) = p_{-\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n M_n^{(4)}(R, z) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n N_n^{(4)}(R, z) \quad (2.14d)$$

$$\frac{\partial p^1}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n M_n^{(5)}(R, z) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n N_n^{(5)}(R, z) \quad (2.14e)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} M_n^{(1)}(R, z) &= -k_n J_1(k_n) \int_0^{\infty} (1-\omega z) e^{\omega z} \frac{1}{\omega^2 - k_n^2} \omega J_0(\omega) J_0(\omega R) d\omega \\ N_n^{(1)}(R, z) &= q_n J_0(q_n) \int_0^{\infty} \omega z e^{\omega z} \frac{1}{\omega^2 - q_n^2} \omega J_1(\omega) J_0(\omega R) d\omega \\ M_n^{(2)}(R, z) &= -k_n J_1(k_n) \int_0^{\infty} \omega z e^{\omega z} \frac{1}{\omega^2 - k_n^2} \omega J_0(\omega) J_1(\omega R) d\omega \\ N_n^{(2)}(R, z) &= -q_n J_0(q_n) \int_0^{\infty} (1+\omega z) e^{\omega z} \frac{1}{\omega^2 - q_n^2} \omega J_1(\omega) J_1(\omega R) d\omega \\ M_n^{(3)}(R, z) &= -k_n J_1(k_n) \int_0^{\infty} (1-\omega z) e^{\omega z} \frac{1}{\omega^2 - k_n^2} R J_0(\omega) J_1(\omega R) d\omega \\ N_n^{(3)}(R, z) &= q_n J_0(q_n) \int_0^{\infty} \omega z e^{\omega z} \frac{1}{\omega^2 - q_n^2} R J_1(\omega) J_1(\omega R) d\omega \\ M_n^{(4)}(R, z) &= k_n J_1(k_n) \int_0^{\infty} 2\omega^2 e^{\omega z} \frac{1}{\omega^2 - k_n^2} J_0(\omega) J_0(\omega R) d\omega \\ N_n^{(4)}(R, z) &= q_n J_0(q_n) \int_0^{\infty} 2\omega^2 e^{\omega z} \frac{1}{\omega^2 - q_n^2} J_1(\omega) J_0(\omega R) d\omega \\ M_n^{(5)}(R, z) &= k_n J_1(k_n) \int_0^{\infty} 2\omega^3 e^{\omega z} \frac{1}{\omega^2 - k_n^2} J_0(\omega) J_0(\omega R) d\omega \\ N_n^{(6)}(R, z) &= q_n J_0(q_n) \int_0^{\infty} 2\omega^3 e^{\omega z} \frac{1}{\omega^2 - q_n^2} J_1(\omega) J_0(\omega R) d\omega \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

区域 I 内的解已由吴望一及Skalak^[2]给出, 它们是:

$$v_r^1(R, z) = 2(1-R^2) + \sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(1)}(R, z) + E_{2n} W_{2n}^{(1)}(R, z)] \quad (2.16a)$$

$$v_z^1(R, z) = \sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(2)}(R, z) + E_{2n} W_{2n}^{(2)}(R, z)] \quad (2.16b)$$

$$\psi^1(R, z) = R^2 - \frac{1}{2} R^4 + \sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(3)}(R, z) + E_{2n} W_{2n}^{(3)}(R, z)] \quad (2.16c)$$

$$p^1(R, z) = p_c - 8z + \sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(4)}(R, z) + E_{2n} W_{2n}^{(4)}(R, z)] \quad (2.16d)$$

$$\frac{\partial p^1}{\partial z} = -8 + \sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(5)}(R, z) + E_{2n} W_{2n}^{(5)}(R, z)] \quad (2.16e)$$

其中 p_c 是参考压力, 而

$$\begin{aligned}
W_{1n}^{(1)}(R, z) &= (1+k_n z) \exp(-k_n z) k_n^2 J_0(k_n R) + \int_0^\infty h_1^{(1)}(R, t) F_1(t) \cos(zt) dt \\
W_{2n}^{(1)}(R, z) &= q_n z \exp(-q_n z) q_n^2 J_0(q_n R) + \int_0^\infty h_2^{(1)}(R, t) F_2(t) \sin(zt) dt \\
W_{1n}^{(2)}(R, z) &= k_n^3 z \exp(-k_n z) J_1(k_n R) + \int_0^\infty h_1^{(2)}(R, t) F_1(t) \sin(zt) dt \\
W_{2n}^{(2)}(R, z) &= q_n^2 (q_n z - 1) \exp(-q_n z) J_1(q_n R) - \int_0^\infty h_2^{(2)}(R, t) F_2(t) \cos(zt) dt \\
W_{1n}^{(3)}(R, z) &= (1+k_n z) \exp(-k_n z) k_n R J_1(k_n R) + \int_0^\infty h_1^{(3)}(R, t) F_1(t) \cos(zt) dt \\
W_{2n}^{(3)}(R, z) &= q_n z \exp(-q_n z) q_n R J_1(q_n R) + \int_0^\infty h_2^{(3)}(R, t) F_2(t) \sin(zt) dt \\
W_{1n}^{(4)}(R, z) &= 2k_n^2 \exp(-k_n z) J_0(k_n R) + \int_0^\infty h_1^{(4)}(R, t) F_1(t) \sin(zt) dt \\
W_{2n}^{(4)}(R, z) &= 2q_n^2 \exp(-q_n z) J_0(q_n R) - \int_0^\infty h_2^{(4)}(R, t) F_2(t) \cos(zt) dt \\
W_{1n}^{(5)}(R, z) &= -2k_n^4 \exp(-k_n z) J_0(k_n R) + \int_0^\infty t h_1^{(4)}(R, t) F_1(t) \cos(zt) dt \\
W_{2n}^{(5)}(R, z) &= -2q_n^4 \exp(-q_n z) J_0(q_n R) + \int_0^\infty t h_2^{(4)}(R, t) F_2(t) \sin(zt) dt
\end{aligned} \tag{2.17}$$

这里

$$\begin{aligned}
h_1^{(1)}(R, t) &= \frac{t^2 I_1(t)}{H(t)} I_0(Rt) - \frac{t^2 I_0(t)}{H(t)} R I_1(Rt) \\
h_1^{(2)}(R, t) &= -\frac{t^2 I_0(t)}{H(t)} R I_0(Rt) + \frac{t[2I_0(t) + tI_1(t)]}{H(t)} I_1(Rt) \\
h_1^{(3)}(R, t) &= \frac{R}{t} h_1^{(2)}(R, t), \quad h_1^{(4)}(R, t) = -\frac{2t^2 I_0(t)}{H(t)} I_0(Rt) \\
h_2^{(1)}(R, t) &= -\frac{2I_1(t) - tI_0(t)}{H(t)} I_0(Rt) + \frac{tI_1(t)}{H(t)} R I_1(Rt) \\
h_2^{(2)}(R, t) &= \frac{tI_1(t)}{H(t)} R I_0(Rt) - \frac{tI_0(t)}{H(t)} I_1(Rt) \\
h_2^{(3)}(R, t) &= \frac{R}{t} h_2^{(2)}(R, t), \quad h_2^{(4)}(R, t) = \frac{2tI_1(t)}{H(t)} I_0(Rt) \\
F_1(t) &= \frac{4}{\pi} \frac{k_n^4 J_1(k_n)}{(k_n^2 + t^2)^2}, \quad F_2(t) = \frac{4}{\pi} \frac{q_n^4 J_0(q_n)}{(q_n^2 + t^2)^2}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

(2.14)式和(2.16)中有四套系数 a_n , b_n , E_{1n} , E_{2n} , 需要补充四组方程, 它们由区域 I 内的解和区域 II 内的解在孔口满足运动学和动力学匹配条件给出.

运动学匹配等价于(2.16a)及(2.16b)满足边界条件

$$v_r^I(R, 0) = f(R)/R, \quad v_r^II(R, 0) = g(R)/R \quad (0 < R < 1)$$

由此推出

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} W_{1n}^{(1)}(R, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} W_{2n}^{(1)}(R, 0) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(k_n R) &= -2(1-R^2) \\ \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} W_{1n}^{(2)}(R, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} W_{2n}^{(2)}(R, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_1(q_n R) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

动力学匹配要求满足

$$\tau_{ij}^I = \tau_{ij}^I \quad (z=0, 0 < R < 1) \quad (2.20)$$

其中 τ_{ij} 为应力张量, Dagen 等人在文[1]中已证明满足(2.20)等价于满足下列两个式子

$$p^I = p^I \quad (0 < R < 1, z=0), \quad \frac{\partial p^I}{\partial z} = \frac{\partial p^I}{\partial z} \quad (0 < R < 1, z=0) \quad (2.21)$$

考虑到(2.14d)及(2.16d), 并满足(2.21)后, 我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} W_{1n}^{(4)}(R, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} W_{2n}^{(4)}(R, 0) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n M_n^{(4)}(R, 0) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n N_n^{(4)}(R, 0) = \Delta \bar{p} \quad (2.22a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} W_{1n}^{(6)}(R, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} W_{2n}^{(6)}(R, 0) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n M_n^{(6)}(R, 0) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n N_n^{(6)}(R, 0) = 8 \quad (2.22b)$$

其中 $\Delta \bar{p} = p_{-\infty} - p_0$.

由于表达式(2.22)中的无穷积分在 $R=1$ 时发散, 为了消除此奇性, 我们按照 Dagen 的方法, 将(2.22)式对半径为 R 的圆进行平均, (2.22a)平均一次, (2.22b)平均二次, 于是得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} W_{1n}^{(0)}(R) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} W_{2n}^{(0)}(R) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n M_n^{(0)}(R) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n N_n^{(0)}(R) + \frac{1}{4} \Delta \bar{p} R = 0 \quad (2.23a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} W_{1n}^{(2)}(R) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} W_{2n}^{(2)}(R) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n M_n^{(2)}(R) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n N_n^{(2)}(R) = -R^2 \quad (2.23b)$$

其中

$$W_{1n}^{(0)}(R) = -k_n^2 J_1(k_n R) \quad (2.24a)$$

$$W_{2n}^{(0)}(R) = -q_n^2 J_1(q_n R) + \int_0^{\infty} \frac{I_1(t)}{H(t)} I_1(Rt) F_2(t) dt \quad (2.24b)$$

$$W_{1n}^{(2)}(R) = -k_n^2 [J_0(k_n R) - 1] + \int_0^{\infty} \frac{t I_0(t)}{H(t)} F_1(t) [I_0(Rt) - 1] dt \quad (2.24c)$$

$$W_{2n}^{(2)}(R) = -q_n^2 [J_0(q_n R) - 1] \quad (2.24d)$$

$$M_n^{(0)}(R) = k_n J_1(k_n) \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\omega^2 - k_n^2} J_0(\omega) J_1(\omega R) d\omega \quad (2.24e)$$

$$= -\frac{1}{2} k_n J_1(k_n) \int_0^\pi \left[H_1(k_n \sqrt{1+R^2-2R\cos\theta} - \frac{\pi}{2}) \frac{R-\cos\theta}{\sqrt{1+R^2-2R\cos\theta}} d\theta \right]$$

$$N_n^{(6)}(R) = q_n J_0(q_n) \int_0^\infty \frac{\omega}{\omega^2 - q_n^2} J_1(\omega) J_1(\omega R) d\omega = J_1(q_n R) \quad (2.24f)$$

$$\begin{aligned} M_n^{(7)}(R) &= -k_n J_1(k_n) \int_0^\infty \frac{\omega}{\omega^2 - k_n^2} J_0(\omega) [J_0(\omega R) - 1] d\omega \\ &= J_0(k_n R) - 1 \end{aligned} \quad (2.24g)$$

$$\begin{aligned} N_n^{(7)}(R) &= -q_n J_0(q_n) \int_0^\infty \frac{\omega}{\omega^2 - q_n^2} J_1(\omega) [J_0(\omega R) - 1] d\omega \\ &= -\frac{q_n J_0(q_n)}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1+R^2-2R\cos\theta}} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} \frac{q_n R (R - \cos\theta)}{\sqrt{1+R^2-2R\cos\theta}} \right. \\ &\quad \cdot H_0^{(1)}(q_n \sqrt{1+R^2-2R\cos\theta}) + \left. \left(\frac{1-R\cos\theta}{1+R^2-2R\cos\theta} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot [1 - \pi H_1(q_n \sqrt{1+R^2-2R\cos\theta})] \right\} d\theta + q_n J_0(q_n) \left[1 - \frac{\pi}{2} H_1(q_n) \right] \end{aligned} \quad (2.24h)$$

这里, H_ν 是 ν 阶 Struve 函数, 公式(2.24e)~(2.24h)的推导见附录。

(2.23)式表示力及其梯度在交接面上匹配以代替压力及压力梯度的匹配。

方程(2.22a)(2.22b)及(2.23a)(2.23b)组成了确定 E_{1n} , E_{2n} , a_n , b_n 的方程组。这是一个无限阶的线性代数方程组, 我们采用配置法求它的解。将级数(2.14)及(2.16)在 n 项的地方截断, 然后在孔口截面上适当地选取 $n+1$ 个点 (包括 $R=0$), 令方程组(2.19), (2.23)在这 $n+1$ 个点上满足。由于 $R=0$ 上有三个方程自动满足, 因此将得到 $4n+1$ 个方程确定 $4n+1$ 个未知系数 E_{1n} , E_{2n} , a_n , b_n 及 $\Delta\bar{p}$ 。解出这组线性代数方程组后代入(2.14)及(2.16)就得到区域 I 和区域 II 内的 n 阶近似解。显然, 如果解是收敛的, 则增加截断级数的项数和配置点的个数, 可以改善解的精度。

三、数值结果

首先检验配置法的收敛性。在孔口截面上取等距的 $n+1$ 个点 (包括 $R=0$, 但不包括 $R=1$)。比较不同 n 时, 孔口截面中心线上的轴向速度, $v_z(0,0)$ 和压力 $p_\infty - p(0,0)$ 结果表示在图 2 上。可以看出, 配置法具有很好的收敛性。从 $n=9$ 到 $n=11$, 相对误差分别为 0.56% 及 1%。因此一般说来取 $n=9$ 就可以得到相当精度的结果。

其次计算速度分布, 流函数和压力分布。取 $n=9$ 。将 I 中的正方形区域 $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq R \leq 1$ 和 II 中的正方形区域 $-2.5 \leq z \leq 0$, $0 \leq R \leq 2.5$ 都划分成 10×10 的等距网格。利用(2.14)式及(2.16)式计算了节点上的物理量。表 1 和表 2 列出了区域 I 和区域 II 内的计算结果。不同截面上的

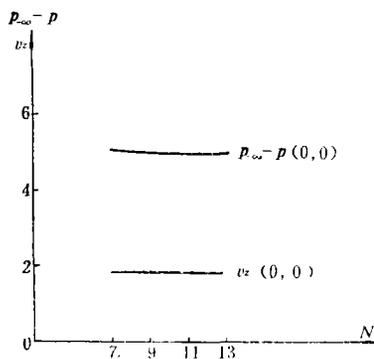


图 2 N 取不同值时 $v_z(0,0)$ 及 $p_\infty - p(0,0)$ 的收敛性试验

速度分布和压力分布表示在图3, 4和6中。图5画出了流线图。流线是利用节点上的流函数数值通过插值的方法求出的。可以看出, 在区域 I 中, 解很快地趋于 Poiseuille 剖面。当 $z=0.5$, 即从孔口向下游方向走过圆管半径一半的距离后, 轴向速度和 Poiseuille 剖面只相差 1% 左右。按照初始段长度的定义, 0.5 就是初始段长度。和 Dagan 等人的有限长圆管的结果相比较 ($z=0.5$ 时相差 1.5%), 初始段长度显著地缩短, 这和文 [2] 的结果是一致的。

我们将区域 I 内的计算结果和 Sampson^[4] 的准确解 (通过平面上圆形孔口的 Stokes 流动) 进行了详细的比较。结果表示在图 7, 8, 9, 10 上。这些图形清楚地说明, 不管是速度分布, 流函数还是压力分布, 离孔口一倍管径以外的地方, 本文的结果已和 Sampson 的结果基本上相等, 说明孔口右边的边界 (垂直壁面或者是圆管壁面) 离孔口一倍管径以外的地方几乎没有什么影响。它的影响集中在孔口附近一倍管径的区域内。此时两者的结果有显著的差别。

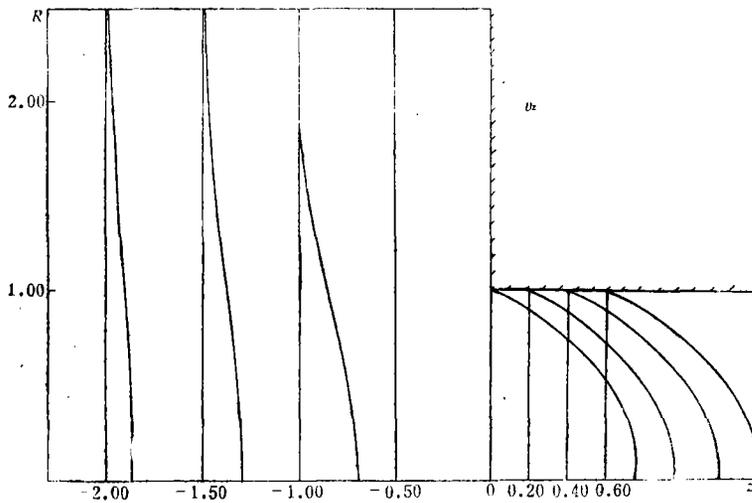


图3 不同横截面上的 v_z 剖面

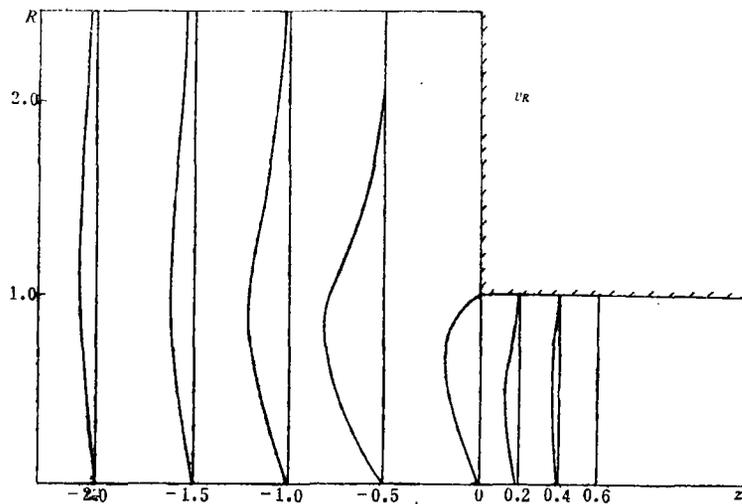


图4 不同横截面上的 v_R 剖面

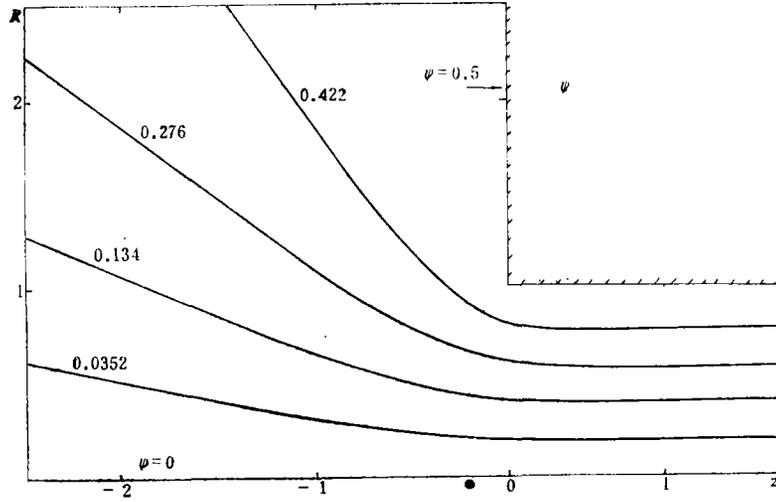


图5 流线图

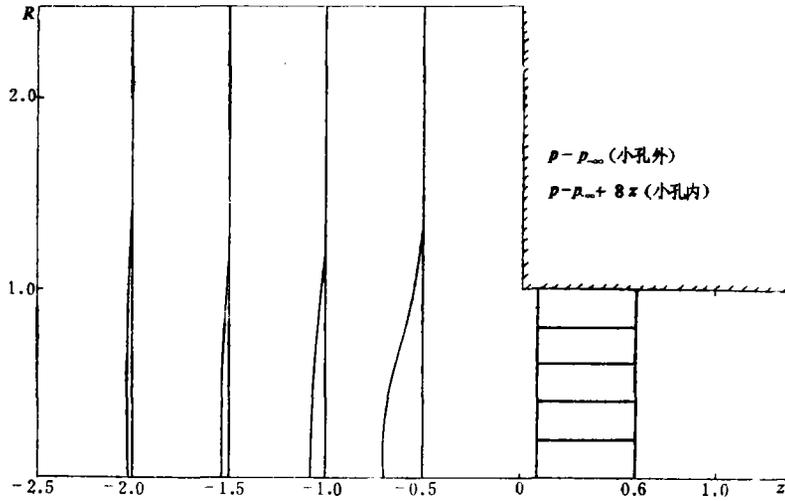


图6 横截面上的压力剖面

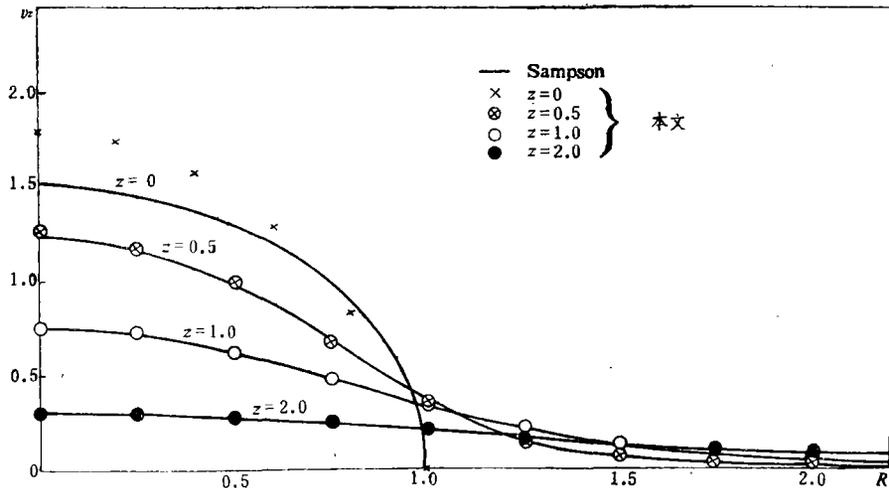


图7 本文的 v_z 和 Sampson 的 v_z 的比较

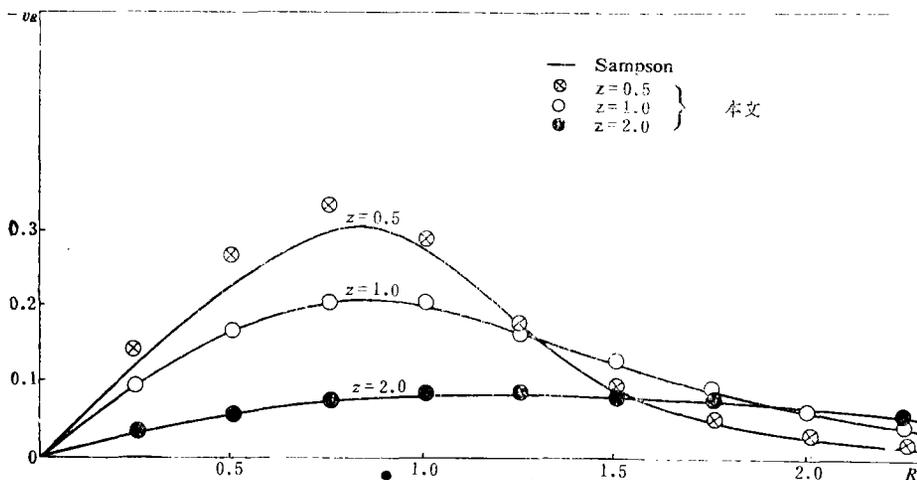
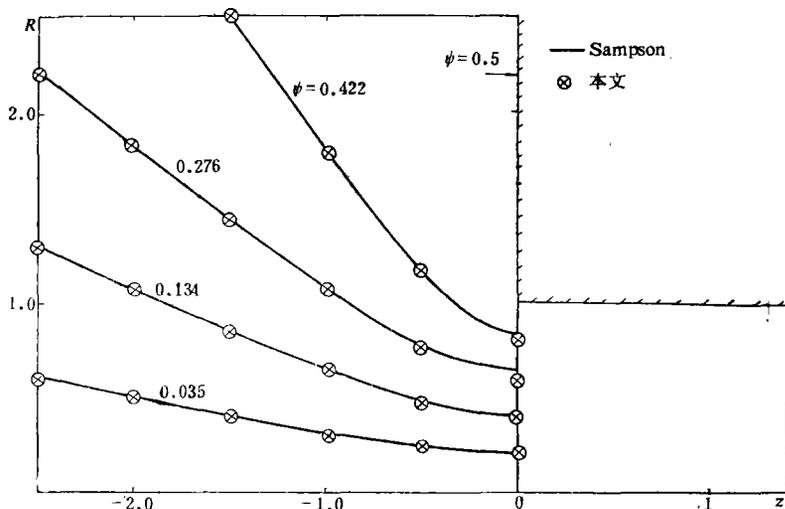
图8 本文的 v_R 和 Sampson 的 v_R 的比较

图9 本文的流线和 Sampson 的流线的比较

从 $-\infty$ 远处到孔口的压力降落可以通过体积流量 Q 表出, 它的表达式为

$$p'_{-\infty} - p'(0,0) = C \frac{Q' \mu}{a} \quad (3.1)$$

其中带“'”的都是有量纲量, $p'(0,0)$ 为孔口处中心轴线上的压力, C 为比例常数. 化成无量纲形式则为:

$$p_{-\infty} - p(0,0) = C\pi \quad (3.2)$$

Sampson 得到 $C=1.5$, 于是 $p_{-\infty} - p(0,0) = 4.712$. 我们的结果为 $p_{-\infty} - p(0,0) = 4.958$ (参看表 1), 如果将 $p(0,0)$ 换成孔口处的平均压力, 则 Sampson 的结果为 4.712, 而我们的结果为 4.75 左右. 说明孔口接无穷长圆管比孔口接半无穷空间, 能量损失稍大些.

在孔口内的区域 I 中, 压力降落的主要部分 $8z$ 是 Poiseuille 流动引起的. 初始段中压力降落和 $8z$ 的偏离只占 $8z$ 的很小一部分. 例如, 当 R 从 0 变到 1 时, Poiseuille 压力降落为 8, 而初始段平均压力偏离部分只有 0.30 左右, 只占 Poiseuille 压力降落的 3.75%. 无量纲形式

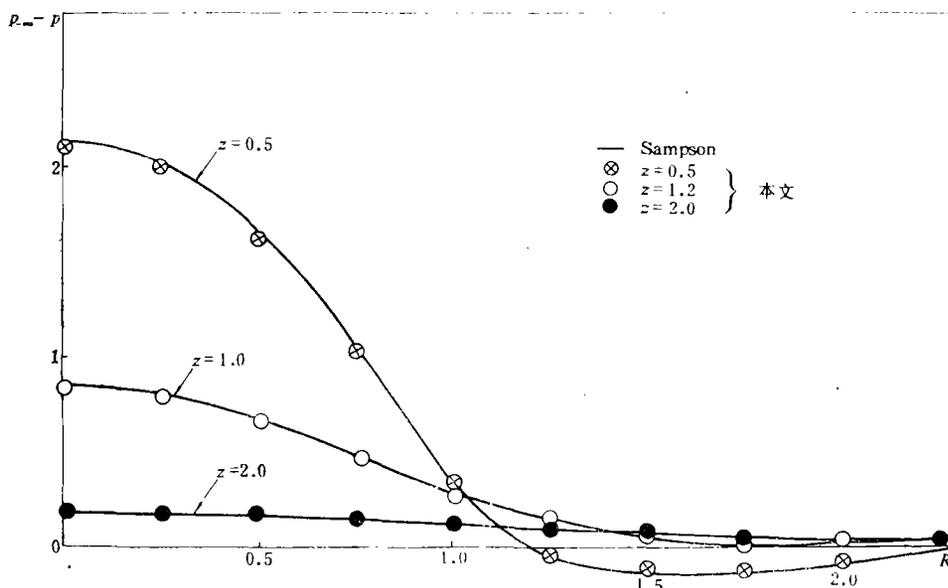


图 10 本文的压力分布和 Sampson 的结果的比较

压力降从 $-\infty$ 到任一 z 值的结果可归纳为下式:

$$p_{\infty} - p(0, z) = 5.0 + 8z \quad (z > 0.5) \quad (3.3)$$

当 $z > 0.5$ 时, 方程(3.3)的精度在0.5%以内, Dagan等人^[1]对穿过有限长小孔的压力降给出过类似的公式, 但是(3.3)中的常数被 $1.5\pi = 4.712$ 所替代。这是Sampson关于长度为零的小孔的结果, 对任意有限长的小孔其精度在1%以内。

附 录

本附录详细地描述如何用分析方法求(2.24e)~(2.24h)中的无穷积分的值。

根据Erdelyi^[5]等人和Oberhettinger^[6]的结果我们有:

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega J_0(\omega) J_0(\omega R)}{\omega^2 - k_n^2} d\omega = -\frac{\pi}{2} J_0(k_n R) Y_0(k_n) \quad (0 < R \leq 1) \quad (A.1)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega J_1(\omega) J_1(\omega R)}{\omega^2 - q_n^2} d\omega = -\frac{\pi}{2} J_1(q_n R) Y_1(q_n) \quad (0 < R \leq 1) \quad (A.2)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega J_1(b\omega)}{\omega^2 - q_n^2} d\omega = -\frac{\pi}{2} H_{-1}(bq_n) = 1 - \frac{\pi}{2} H_1(bq_n) \quad (A.3)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega J_0(\omega)}{\omega^2 - k_n^2} d\omega = -\frac{\pi}{2} Y_0(k_n) \quad (A.4)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(b\omega)}{\omega^2 - k_n^2} d\omega = -\frac{\pi}{2} k_n^{-1} H_0(k_n b) \quad (A.5)$$

其中 H_ν 是 ν 阶 struve 函数, Y_ν 是 ν 阶第二类 Bessel 函数, b 是参数。

考虑到(A.1), (A.2)及(A.4), 不难推出

$$\begin{aligned} N_n^{(6)}(R) &= q_n J_0(q_n) \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\omega^2 - q_n^2} J_1(\omega) J_1(\omega R) d\omega \\ &= -\frac{\pi}{2} q_n J_0(q_n) Y_1(q_n) J_1(q_n R) = J_1(q_n R) \end{aligned}$$

表1

区域 II 内的流场

v_z						
R	$z=0.0$	$z=0.1$	$z=0.2$	$z=0.3$	$z=0.4$	$z=0.5$
0.00	1.7906	1.8595	1.9112	1.9475	1.9714	1.9860
0.10	1.7762	1.8444	1.8950	1.9302	1.9531	1.9671
0.20	1.7339	1.7989	1.8461	1.8780	1.8982	1.9100
0.30	1.6624	1.7223	1.7637	1.7901	1.8057	1.8143
0.40	1.5618	1.6136	1.6463	1.6649	1.6744	1.6788
0.50	1.4295	1.4706	1.4914	1.4998	1.5023	1.5025
0.60	1.2651	1.2900	1.2948	1.2917	1.2874	1.2842
0.70	1.0611	1.0645	1.0499	1.0363	1.0279	1.0233
0.80	0.8152	0.7808	0.7479	0.7314	0.7240	0.7208
0.90	0.4761	0.4087	0.3880	0.3817	0.3795	0.3788
v_R						
R	$z=0.0$	$z=0.1$	$z=0.2$	$z=0.3$	$z=0.4$	$z=0.5$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	-0.0387	-0.0298	-0.0215	-0.0145	-0.0091	-0.0053
0.20	-0.0761	-0.0580	-0.0413	-0.0274	-0.0170	-0.0098
0.30	-0.1106	-0.0829	-0.0576	-0.0373	-0.0225	-0.0127
0.40	-0.1409	-0.1024	-0.0686	-0.0426	-0.0247	-0.0134
0.50	-0.1646	-0.1141	-0.0720	-0.0421	-0.0230	-0.0117
0.60	-0.1799	-0.1147	-0.0657	-0.0350	-0.0176	-0.0083
0.70	-0.1818	-0.0998	-0.0483	-0.0225	-0.0101	-0.0042
0.80	-0.1669	-0.0627	-0.0226	-0.0088	-0.0034	-0.0011
0.90	-0.1090	-0.0125	-0.0026	-0.0009	-0.0002	0.0000
ψ						
R	$z=0.0$	$z=0.1$	$z=0.2$	$z=0.3$	$z=0.4$	$z=0.5$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	0.0089	0.0092	0.0095	0.0096	0.0098	0.0098
0.20	0.0352	0.0365	0.0375	0.0382	0.0386	0.0389
0.30	0.0777	0.0806	0.0827	0.0841	0.0850	0.0855
0.40	0.1341	0.1389	0.1423	0.1445	0.1459	0.1466
0.50	0.2014	0.2084	0.2130	0.2168	0.2174	0.2182
0.60	0.2755	0.2843	0.2896	0.2926	0.2941	0.2948
0.70	0.3512	0.3609	0.3659	0.3683	0.3694	0.3699
0.80	0.4216	0.4303	0.4335	0.4346	0.4351	0.4353
0.90	0.4773	0.4812	0.4818	0.4819	0.4820	0.4820
p						
R	$z=0.0$	$z=0.1$	$z=0.2$	$z=0.3$	$z=0.4$	$z=0.5$
0.00	-4.958	-4.943	-4.935	-4.946	-4.964	-4.984
0.10	-4.984	-4.936	-4.931	-4.944	-4.964	-4.985
0.20	-4.922	-4.911	-4.918	-4.939	-4.964	-4.987
0.30	-4.892	-4.875	-4.900	-4.934	-4.969	-4.992
0.40	-4.770	-4.825	-4.880	-4.932	-4.973	-5.002
0.50	-4.708	-4.774	-4.869	-4.942	-4.990	-5.018
0.60	-4.496	-4.730	-4.884	-4.975	-5.021	-5.042
0.70	-4.464	-4.748	-4.959	-5.043	-5.069	-5.073
0.80	-4.002	-4.945	-5.143	-5.152	-5.129	-5.106
0.90	-5.383	-5.703	-5.423	-5.264	-5.178	-5.129

表 2 区域 I 内的流场

u_z					
R	$z=-0.50$	$z=-1.00$	$z=-1.50$	$z=-2.00$	$z=-2.50$
0.00	1.2519	0.7497	0.4554	0.2950	0.2034
0.25	1.1848	0.7133	0.4390	0.2874	0.1995
0.50	0.9856	0.6120	0.3934	0.2659	0.1886
0.75	0.6735	0.4690	0.3281	0.2341	0.1720
1.00	0.3407	0.3205	0.2561	0.1970	0.1517
1.25	0.1333	0.1990	0.1889	0.1594	0.1299
1.50	0.0508	0.1168	0.1336	0.1249	0.1084
1.75	0.0216	0.0676	0.0921	0.0955	0.0887
2.00	0.0101	0.0396	0.0628	0.0719	0.0714
2.25	0.0059	0.0239	0.0429	0.0537	0.0568
2.50	0.0008	0.0149	0.0295	0.0400	0.0449
u_R					
R	$z=-0.50$	$z=-1.00$	$z=-1.50$	$z=-2.00$	$z=-2.50$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	-0.1447	-0.0944	-0.0516	-0.0289	-0.0172
0.50	-0.2667	-0.1686	-0.0939	-0.0538	-0.0326
0.75	-0.3287	-0.2061	-0.1203	-0.0718	-0.0448
1.00	-0.2842	-0.2021	-0.1287	-0.0816	-0.0531
1.25	-0.1760	-0.1690	-0.1224	-0.0837	-0.0572
1.50	-0.0952	-0.1272	-0.1070	-0.0799	-0.0578
1.75	-0.0525	-0.0907	-0.0884	-0.0723	-0.0556
2.00	-0.0300	-0.0634	-0.0706	-0.0631	-0.0515
2.25	-0.0198	-0.0444	-0.0553	-0.0536	-0.0465
2.50	-0.0112	-0.0315	-0.0430	-0.0448	-0.0411
ψ					
R	$z=-0.50$	$z=-1.00$	$z=-1.50$	$z=-2.00$	$z=-2.50$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	0.0381	0.0229	0.0140	0.0091	0.0063
0.50	0.1398	0.0849	0.0530	0.0350	0.0245
0.75	0.2690	0.1689	0.1092	0.0740	0.0526
1.00	0.3770	0.2543	0.1727	0.1210	0.0880
1.25	0.4388	0.3258	0.2347	0.1709	0.1275
1.50	0.4676	0.3786	0.2894	0.2195	0.1683
1.75	0.4812	0.4148	0.3346	0.2739	0.2081
2.00	0.4881	0.4392	0.3703	0.3028	0.2454
2.25	0.4923	0.4556	0.3980	0.3358	0.2793
2.50	0.4940	0.4668	0.4191	0.3634	0.3093
p					
R	$z=-0.50$	$z=-1.00$	$z=-1.50$	$z=-2.00$	$z=-2.50$
0.00	-2.0962	-0.8283	-0.3657	-0.1844	-0.1036
0.25	-1.9846	-0.7820	-0.3501	-0.1787	-0.1013
0.50	-1.6328	-0.6522	-0.3069	-0.1627	-0.0947
0.75	-1.0233	-0.4686	-0.2455	-0.1393	-0.0846
1.00	0.3320	-0.2803	-0.1789	-0.1124	-0.0725
1.25	0.0509	-0.1334	-0.1186	-0.0856	-0.0597
1.50	0.1353	-0.0435	-0.0712	-0.0617	-0.0473
1.75	0.1227	0.0015	-0.0380	-0.0421	-0.0361
2.00	0.0968	0.0203	-0.0166	-0.0271	-0.0267
2.25	0.0715	0.0261	-0.0039	-0.0162	-0.0191
2.50	0.0636	0.0261	0.0032	-0.0087	-0.0131

$$\begin{aligned}
 M_n^{(7)}(R) &= -k_n J_1(k_n) \int_0^\infty \frac{\omega}{\omega^2 - k_n^2} J_0(\omega) [J_0(\omega R) - 1] d\omega \\
 &= -k_n J_1(k_n) \left[-\frac{\pi}{2} J_0(k_n R) Y_0(k_n) + \frac{\pi}{2} Y_0(k_n) \right] \\
 &= J_0(k_n R) - 1
 \end{aligned}$$

根据加法定理[参看 Watson^[7]], 可以得到

$$J_0(\omega) J_0(\omega R) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_0[\omega \sqrt{1+R^2-2R \cos \theta}] d\theta \quad (\text{A.6})$$

$$J_1(\omega) J_1(\omega R) = \frac{\omega^2 R}{\pi} \int_0^\pi \frac{J_1[\omega \sqrt{1+R^2-2R \cos \theta}]}{\omega \sqrt{1+R^2-2R \cos \theta}} \sin^2 \theta d\theta \quad (\text{A.7})$$

考虑到(A.6), (A.7)以及(A.3), (A.5), 经过一定的推导后, 可得:

$$\begin{aligned}
 M_n^{(6)}(R) &= k_n J_1(k_n) \int_0^\infty \frac{\omega}{\omega^2 - k_n^2} J_0(\omega) J_1(\omega R) d\omega \\
 &= -k_n J_1(k_n) \frac{d}{dR} \int_0^\infty \frac{J_0(\omega) J_0(\omega R)}{\omega^2 - k_n^2} d\omega \\
 &= -\frac{1}{2} k_n J_1(k_n) \int_0^\pi \left[H_1(k_n \sqrt{1+R^2-2R \cos \theta} - \frac{2}{\pi}) \frac{R - \cos \theta}{\sqrt{1+R^2-2R \cos \theta}} d\theta \right. \\
 &\quad \left. (A.8) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_n^{(7)}(R) &= -q_n J_0(q_n) \int_0^\infty \frac{\omega}{\omega^2 - q_n^2} J_1(\omega) [J_0(\omega R) - 1] d\omega \\
 &= -q_n J_0(q_n) \left\{ \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[R \int_0^\infty \frac{J_1(\omega) J_1(\omega R)}{\omega^2 - q_n^2} d\omega \right] - \left[1 - \frac{\pi}{2} H_1(q_n) \right] \right\} \\
 &= -\frac{q_n J_0(q_n)}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{1+R^2-2R \cos \theta}} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} \frac{q_n R (R - \cos \theta)}{\sqrt{1+R^2-2R \cos \theta}} \right. \\
 &\quad \cdot H_0(q_n \sqrt{1+R^2-2R \cos \theta}) + \left. \left(\frac{1 - R \cos \theta}{1+R^2-2R \cos \theta} \right) \cdot \left[1 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \pi H_1(q_n \sqrt{1+R^2-2R \cos \theta}) \right] \right\} d\theta + q_n J_0(q_n) \left[1 - \frac{\pi}{2} H_1(q_n) \right] \quad (\text{A.9})
 \end{aligned}$$

(A.8), (A.9)中的定积分可采用 Sampson 公式或高斯求积公式求出。

参 考 文 献

- [1] Dagan, Z., S. Weinbaum and R. Pfeffer, *J. Fluid Mech.*, 115(1982), 505—523.
- [2] 吴望一, R. Skalak, 应用数学和力学, 4, 6(1983), 743—756.
- [3] Parmet, I. L. and E. Seibel, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18(1965), 17.
- [4] Sampson, R. A., *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, A182(1891), 449.
- [5] Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettingen and F. G. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York, (1954).
- [6] Oberhettinger, F., *Tables of Bessel Transforms*, Springer, (1972).
- [7] Watson, G. M., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge University Press, (1958).

The Stokes Flow from Half-Space to Semi-Infinite Circular Cylinder

Wu Wang-yi

(Department of Mechanics, Peking University)

Richard Skalak

(Department of Civil Engineering and Engineering

Mechanics, Columbia University)

Abstract

The infinite-series solutions for the creeping motion of a viscous incompressible fluid from half-space to semi-infinite circular cylinder are presented. The results show that inside the cylinder beyond a distance equal to 0.5 times the radius of tube from the pore opening, the deviation of the velocity profile from the Poiseuille one becomes equal to or less than 1%. The inlet length in this case is considerably shorter than Dagan's finite circular cylinder one. In the half-space outside the cylinder pore the region, strongly affected by the tube wall, is restricted within a narrow limit no more than one radius of the tube from the orifice. Beyond this region the solutions match almost exactly the Sampson's one for a flow through an orifice of zero thickness. The relationship between the pressure drop and the volumetric flow rate is also considered in this paper.