

结构与内流体相互作用问题 的半解析方法

曹志远 张佑啟

(中国科学院工程力学所) (香港大学土木工程系)

(1984年8月3日收到)

摘 要

本文探讨一种结构-内流体组合单元, 沿流体两个正交方向取用解析函数族, 将结构与内流体耦联振动的三维问题化为一维问题求解, 致使计算工作量为减少。为适合各种不同类型问题, 文中建立了柱形与钳形组合单元, 给出了算例, 讨论了方法的精度。

一、引 言

结构与流体耦联振动是涉及诸如油罐、管道、近海设施等多种结构的一个重要研究课题, 由于问题的复杂性, 目前除了少数简单情况有解析解外, 大都采用一般有限元法的数值计算。鉴于流体介质具有三维特性, 因此其计算工作量通常是相当可观。

有限条^[1]等半解析方法应用于结构和土体-结构相互作用^[5]问题已收到相当满意的效果。本文将建立一种由有限壳条和半解析流体元结合成的组合单元, 用于分析结构与内流体的耦联振动, 算式中计入了流体晃动以及结构弹性变形等特性。

二、组 合 单 元

组合单元由锥环壳条和截圆锥形流体构成, 如图1所示, 取用 x, r, θ 柱坐标系。该单元适用于结构为各种形状旋转壳体(如球形、倒圆锥形、双曲线形、抛物线形、圆柱形等)的储液罐分析。

(一) 截圆锥体形内流元

根据理论研究^[2,3,4]分析, 对罐内理想、不可压缩流体的压力函数可设为周向及径向解

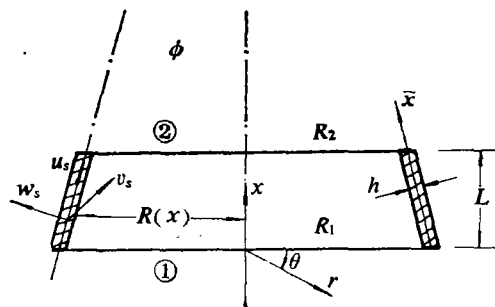


图 1

析函数与轴向低阶多项式插入的组合

$$P(\eta, \zeta, \theta, t) = \sum_{m=1}^r \cos m\theta \sum_{n=1}^q H_n(\zeta) \sum_{k=1}^s N_k(\eta) p_{1(mn)}^{(k)} \\ + \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{r}} \cos \bar{m}\theta \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{q}} \bar{H}_{\bar{n}}(\zeta) \sum_{\bar{k}=1}^{\bar{s}} N_{\bar{k}}(\eta) p_{2(m\bar{n})}^{(\bar{k})} \quad (2.1)$$

式中 $\eta = \frac{x}{L}$, $\zeta = \frac{r}{R}$, $N_k(\eta)$ 及 $N_{\bar{k}}(\eta)$ 为多项式形函数^[1], $p_{1(mn)}^{(k)}$ 及 $p_{2(m\bar{n})}^{(\bar{k})}$ 为结面广义压力参数. 式(2.1)中第一部份代表撞动, 其液面保持水平, 故计算中液面单元的 $p_{1(mn)}^{(k)} \equiv 0$; 第二部份代表晃动, 其液面自由起伏, 其波高可根据液面单元压力函数计算为

$$\Theta(\zeta, \theta, t) = P(1, \zeta, \theta, t) / \rho \cdot g$$

$H_n(\zeta)$ 及 $\bar{H}_{\bar{n}}(\zeta)$ 分别为流体压力撞动、晃动部份沿径向分布的解析函数族, 一般可取为

$$H_n(\zeta) = \zeta^n, \quad \bar{H}_{\bar{n}}(\zeta) = \sin(2\bar{n}-1) \frac{\pi}{2} \zeta$$

因此式(2.1)可写为

$$P(\eta, \zeta, \theta, t) = \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^q [(1-\eta)p_{1(mn)}^{(1)} + \eta p_{1(mn)}^{(2)}] \zeta^n \cos m\theta \\ + \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{r}} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{q}} [(1-\eta)p_{2(m\bar{n})}^{(1)} + \eta p_{2(m\bar{n})}^{(2)}] \sin(2\bar{n}-1) \frac{\pi}{2} \zeta \cos \bar{m}\theta \quad (2.2)$$

即

$$P = [[N_1] [N_2]] \begin{Bmatrix} \{p_1\} \\ \{p_2\} \end{Bmatrix} = [N_L] \{p\} \quad (2.3)$$

流体动力学的变分方程为

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iiint_V \frac{1}{2} (\nabla P)^2 dV + \iint_{S_1} \frac{1}{2g} P \dot{P} dS_1 + \iint_{S_2} \rho P \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} dS_2 \right\} dt = 0 \quad (2.4a)$$

$$(\nabla P)^2 = \left(\frac{\partial P}{R \partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{R \zeta \partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{L \partial \eta} \right)^2 \quad (2.4b)$$

其中 S_1 为自由液面, S_2 为流体与结构接触面, w_s 为结构法向挠度.

将式(2.3)代入式(2.4), 经变分运算, 可得流体单元离散化矩阵方程

$$[M_L] \{\dot{p}\} + [H] \{p\} = \{F_s\} \quad (2.5)$$

其中, 子矩阵 $[H_{ij}]$ ($i, j=1, 2$) 中第 k 行 l 列元素为

$$H_{ij(kl)} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial N_{i(k)}}{R \partial \zeta} \right) \left(\frac{\partial N_{j(l)}}{R \partial \zeta} \right) + \left(\frac{\partial N_{i(k)}}{R \zeta \partial \theta} \right) \left(\frac{\partial N_{j(l)}}{R \zeta \partial \theta} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial N_{i(k)}}{L \partial \eta} \right) \left(\frac{\partial N_{j(l)}}{L \partial \eta} \right) \right] R^2 L \zeta d\theta d\eta d\zeta \quad (2.6a)$$

$$R = R(\eta) = [(R_2 - R_1)\eta + R_1] \quad (2.6b)$$

式中 $N_{i(k)}$ 及 $N_{j(l)}$ 分别为 $[N_i]$ 中第 k 个元素和 $[N_j]$ 中第 l 个元素.

而

$$[M_L] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \quad (2.7a)$$

子矩阵 $[M]$ 中第 k 行 l 列元素为

$$M_{(kl)} = \begin{cases} \frac{1}{2g} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [N_{2(k)} N_{2(l)}]_{\eta=1} R_0^2 \xi d\theta d\xi & \text{液面单元} \\ 0 & \text{其它单元} \end{cases} \quad (2.7b)$$

式(2.5)右边项之列阵

$$\{F_\delta\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} \quad (2.8a)$$

$\{F_i\}$ ($i=1,2$)中第 k 个元素

$$F_{i(k)} = - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\rho_i \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} N_{i(k)} \right]_{\xi=1} \frac{RL}{\cos\phi} d\theta d\eta \quad (2.8b)$$

该项将和结构变形发生耦合。

(二) 圆锥形及圆柱形环壳条

设壳条内三个位移分量为周向解析函数与轴向低阶多项式插入的组合

$$\left. \begin{aligned} u_s(\eta, \theta, t) &= \sum_{m=0}^r \cos m\theta \sum_{k=1}^s N_k(\eta) u_{km} \\ v_s(\eta, \theta, t) &= \sum_{m=0}^r \overline{\sin m\theta} \sum_{k=1}^s N_k(\eta) v_{km} \\ w_s(\eta, \theta, t) &= \sum_{m=0}^r \cos m\theta \sum_{k=1}^s N_k(\eta) w_{km} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

式中

$$\overline{\sin m\theta} = \begin{cases} 1 & m=0 \\ \sin m\theta & m \neq 0 \end{cases}$$

用矩阵表示即为

$$\{f\} = \sum_{m=0}^r [N_s]_m \{\delta\}_m = [N_s] \{\delta\} \quad (2.10)$$

相应的广义应变-位移关系为

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [\varepsilon_{\bar{x}} \quad \varepsilon_\theta \quad \gamma_{\bar{x}\theta} \quad \chi_{\bar{x}} \quad \chi_\theta \quad \chi_{\bar{x}\theta}]^T \\ &= \left[\left(\frac{\partial u_s}{\partial x} \cos\phi \right) \left(R_0 \frac{\partial v_s}{\partial \theta} + \frac{w_s \cos\phi + u_s \sin\phi}{R_0} \right) \left(R_0 \frac{\partial u_s}{\partial \theta} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \cos\phi - \frac{v_s}{R_0} \sin\phi \right) \right. \\ &\quad \left(- \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \cos^2\phi \right) \left(- \frac{\partial^2 w_s}{R_0^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial v_s}{R_0^2 \partial \theta} \cos\phi - \frac{\partial w_s}{R_0 \partial x} \sin\phi \cos\phi \right) \\ &\quad \left. 2 \left(- \frac{\partial^2 w_s}{R_0 \partial x \partial \theta} \cos\phi + \frac{\partial w_s}{R_0^2 \partial \theta} \sin\phi + \frac{\partial v_s}{R_0 \partial x} \cos^2\phi - \frac{v_s}{R_0^2} \sin\phi \cos\phi \right) \right]^T \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^r [B]_m \{\delta\}_m = [B]_m \{\delta\} \quad (2.11)$$

式中

$$R_0 = R_0(x) = R_0(\eta) = R(\eta) + \frac{h}{2}$$

广义应力矩阵为

$$\{Q\} = [T_x \ T_\theta \ T_{x\theta} \ M_x \ M_\theta \ M_{x\theta}]^T = [D] \{\varepsilon\} \quad (2.12)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_1] & [0] \\ [0] & [D_2] \end{bmatrix}, \quad [D_1] = \frac{E_s h}{1 - \nu_s^2} = \begin{bmatrix} 1 & \nu_s & 0 \\ \nu_s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_s}{2} \end{bmatrix}$$

$$[D_2] = \frac{E_s h^3}{12(1 - \nu_s^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_s & 0 \\ \nu_s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_s}{2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

按一般方法可得结构振动的矩阵方程

$$[M_s] \{\ddot{\delta}\} + [K] \{\delta\} = \{F_p\} + \{F_s\} \quad (2.14)$$

其中, 单元局部坐标系刚度矩阵的子矩阵

$$[K']_{mn} = \frac{L}{\cos \phi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [B]_m^T [D] [B]_n R_0(\eta) d\theta d\eta \quad (2.15a)$$

其在公共坐标系相应的子矩阵可通过转换

$$[K]_{mn} = [R] [K']_{mn} [R]^T \quad (2.15b)$$

式中转换矩阵 (例如, $s=2$)

$$[R] = \begin{bmatrix} [R_0] & [0] \\ [0] & [R_0] \end{bmatrix}, \quad [R_0] = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 1 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

单元局部坐标系质量矩阵的子矩阵

$$[M']_{mn} = \frac{L}{\cos \phi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [N]_m^T [\rho] [N]_n R_0(\eta) d\theta d\eta \quad (2.17a)$$

式中

$$[\rho] = \rho_s h [I] \quad (2.18)$$

转换到公共坐标系有

$$[M_s]_{mn} = [R] [M']_{mn} [R]^T \quad (2.17b)$$

由作用在结构上外载引起的动载荷列阵的子矩阵

$$\{F_s\}_m = \frac{L}{\cos \phi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [N_s]_m^T \{q_s\} R_0(\eta) d\theta d\eta \quad (2.19a)$$

而

$$\{q_s\} = [p_{sx} \ p_{s\theta} \ p_{sr}]^T \quad (2.19b)$$

由内流体作用引起的动载荷列阵

$$\{F_p\} = \frac{L}{\cos \phi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [N_s]^T \{q_p\} R(\eta) d\theta d\eta$$

$$= \frac{L}{\cos\phi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [N_1^T \ N_2^T \ N_3^T]^T \{q_p\} R(\eta) d\theta d\eta$$

而

$$\begin{aligned} \{q_p\} &= [P(\eta, 1, \theta, t) \sin\phi \ 0 \ P(\eta, 1, \theta, t) \cos\phi]^T \\ &= [[N_1^T] \sin\phi \{p\} \ 0 \ [N_2^T] \cos\phi \{p\}]^T \\ [N_1^T] &= [N_L]_{\xi-1} \end{aligned}$$

所以

$$\{F_p\} = [S] \{p\} \quad (2.20a)$$

$$[S] = \frac{L}{\cos\phi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [[N_1^T]^T \sin\phi + [N_2^T]^T \cos\phi] [N_1^T] R(\eta) d\theta d\eta \quad (2.20b)$$

将式(2.9)中 w_s 代入式(2.8b), 则式(2.8a)可表达为

$$\{F_\delta\} = -\rho_i [S^3]^T \{\delta\} \quad (2.21a)$$

$$[S^3]^T = \frac{L}{\cos\phi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [N_1^T]^T [N_3^T] [R]^T R(\eta) d\theta d\eta \quad (2.21b)$$

因此, 对于结构-内流体组合单元, 将有下列一锥耦合矩阵方程组

$$[M_s] \{\delta\} + [K] \{\delta\} = [S] \{p\} + \{F_s\} \quad (2.22a)$$

$$[M_L] \{\dot{p}\} + [H] \{p\} = \{F_\delta\} = -\rho_i [S^3]^T \{\delta\} \quad (2.22b)$$

(三) 几种特殊情况

1. 计入流体晃动, 但不计入结构变形

这种情况下, 式(2.22a)消失, 仅剩下方程(2.22b)

(1) 自由振动

式(2.22b)中右边项消失, 进一步导出

$$\begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{p}_1\} \\ \{\dot{p}_2\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] \\ [H_{21}] & [H_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p_1\} \\ \{p_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

由第一式解出 $\{p_1\}$ 代入第二式, 可聚缩为

$$[M] \{\dot{p}_2\} + [[H_{22}] - [H_{21}][H_{11}]^{-1}[H_{21}]] \{p_2\} = \{0\} \quad (2.24)$$

来求解特征值问题。

(2) 地面运动引起的强迫振动

若 $\theta=0$ 方向有地面运动 $w_g(t)$, 式(2.8b)中 $\frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2}$ 现为 $\ddot{w}_g(t) \cos\theta \cos\phi$, 即式(2.22b)中

$$\{F_\delta\} = -\rho_i [S]^T \ddot{w}_g(t) \quad (2.25a)$$

$$[S_g]^T = L \int_0^1 \int_0^{2\pi} [N_1^T]^T \cos\theta \cdot R(\eta) d\theta d\eta \quad (2.25b)$$

2. 不计入流体晃动, 而计入结构变形

这种情况下, 流体晃动分量 $\{p_2\} = 0$, 则式(2.22)改为

$$[M_s] \{\delta\} + [K] \{\delta\} = [S_1] \{p_1\} + \{F_s\} \quad (2.26a)$$

$$[H_{11}] \{p_1\} = \{F_\delta\} = -\rho_i [S_1^T]^T \{\delta\} \quad (2.26b)$$

其中

$$[S_1] = \frac{L}{\cos\phi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [[N_1^T]^T \sin\phi + [N_2^T]^T \cos\phi] [N_1^T] R(\eta) d\eta d\theta \quad (2.26c)$$

$$[S_1^T]^T = \frac{L}{\cos\phi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [N_1^T]^T [N_2^T]^T [R]^T R(\eta) d\eta d\theta \quad (2.26d)$$

而

$$[N_1^T] = [N_1]_{\xi-1} \quad (2.26e)$$

将式(2.26b)代入式(2.26a)则简化为结构位移的独立方程

$$[M_s]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = -\rho_i [S_1][H_{11}]^{-1}[S_1^T]^T\{\ddot{\delta}\} + \{F_s\}$$

也即

$$([M_s] + [M_p])\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F_s\} \quad (2.27a)$$

式(2.27a)表明, 若忽略流体晃动, 内流体对结构动力问题的效应相当附加流体质量矩阵

$$[M_p] = \rho_i [S_1][H_{11}]^{-1}[S_1^T]^T \quad (2.27b)$$

3. 不计入流体晃动和结构变形, 但有地面运动 $w_g(t)$

这种情况下, $\{p_2\} = \{\delta\} = 0$, 相当式(2.26b)中

$$\{F_s\} = -\rho_i [S_{g1}]^T \ddot{w}_g(t) \quad (2.28a)$$

而

$$[S_{g1}]^T = L \int_0^1 \int_0^{2\pi} [N_1^T]^T \cos\theta \cdot R(\eta) d\theta d\eta \quad (2.28b)$$

则方程为

$$[H_{11}]\{p_1\} = -\rho_i [S_{g1}]^T \ddot{w}_g(t) \quad (2.28c)$$

可直接解出动水压力

$$\{p_1\} = -\rho_i [H_{11}]^{-1} [S_{g1}]^T \ddot{w}_g(t) \quad (2.28d)$$

虽然以上推导都按圆锥壳条进行, 但当取 $\phi=0$ 及 $R(\eta)=R$ 时即为圆柱壳条公式。

三、算 例

(一) 圆形储液罐的晃动频率

刚性圆柱形储液罐具有下列参数: $R=720$ in (1829 cm), $H=480$ in (1219 cm), $\rho_i = 0.9345 \times 10^{-4}$ lb·sec²/in⁴ (1.02×10^{-6} kg·sec²/cm⁴)。采用六个截柱形单元, m, \bar{m} 取4项, n, \bar{n} 取3项, 按上述方法计算晃动频率并和有限元^[7]及解析解^[2]结果比较列于表1。

表中解析解计算是根据熟知的晃动频率公式

$$\omega_n^2 = \frac{g}{R} y_n \text{th} \left(\frac{H}{R} y_n \right)$$

其中 y_n 为一阶 Bessel 函数方程

$$J_1'(y) = 0$$

之根。

有限元计算是首先假定流体压力振型沿周向 $\cos\theta$ 分布, 简化为二维问题进行的。即使如此, 其所需单元及自由度数约为同样精度的半解析方法的十倍左右。在本法中采用少数几项即具有足够精度说明, 所选取的解析函数级数基本上反映了理论上的晃动振型^[8]。

表 1

径向波数 \ 周向波数 方法	1		2		3		4	
	半解析法	有限元解	析解解	半解析解	半解析法	半解析法	半解析法	半解析法
1	0.1466	0.15	0.145	0.2156	0.2721	0.3110		
2	0.2691	0.27	0.268	0.2949	0.3244	0.3504		
3	0.3474	0.34	0.341	0.3631	0.3835	0.4031		
自由度	21	191						
单元数	6	63						

(二) 脉冲运动下的动水压力

同一储液罐，地面有一矩形脉冲运动(图2)。取计算时间步长为0.0125sec，算得侧壁动水压力分布(沿 $\theta=0$ 处)和解析公式^[2]结果比较列于表2。

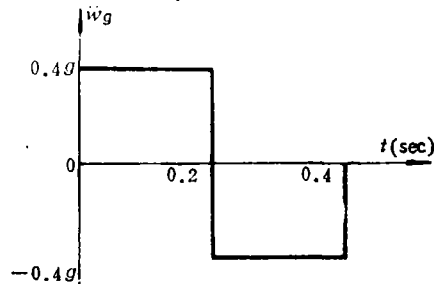


图 2

表 2

离地高度	时刻 方法	0.1sec		0.4sec	
		半解析法	解析解	半解析法	解析解
H		-0.0523	-0.0519	-0.427	-0.403
$5/6 H$		-2.433	-2.457	+2.092	+2.173
$4/6 H$		-3.776	-3.773	+3.538	+3.514
$3/6 H$		-4.707	-4.674	+4.486	+4.438
$2/6 H$		-5.287	-5.251	+5.126	+5.035
$1/6 H$		-5.621	-5.583	+5.499	+5.397
0		-5.708	-5.670	+5.573	+5.494

参 考 文 献

- [1] Cheung, Y. K., *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press, (1976).
- [2] Housner, G. W., Dynamic pressures on accelerated fluid containers, *Bull. Seim. Soc. Amer.*, 47, 1(1957).
- [3] Jacobsen, L. S., Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and of fluid surrounding a cylindrical pier, *Bull. Seim. Soc. Amer.*, 39, July(1949).
- [4] Veletsos, A. S., et. al., Earthquake response of liquid storage tanks, *Proc. Annual EMD Specially Conf. ASCE* (1977).
- [5] Cao Zhiyuan and Y. K. Cheung, Dynamic analysis of prismatic structures embedded in infinite soil medium, *Proc. 5-th Inter. Conf. Num. Meth. Geomech.*, (1985).
- [6] Haroun, M. A., Dynamic analysis of liquid storage tanks, *EERL Rep. 80-04*, (1980)
- [7] Shaabam, S. H. and W. A. Nash, Finite element analysis of a seismically excited cylindrical storage tank ground supported and partially filled with liquid, *Dept. Civil Eng., Uni. Mass., 01002*, July (1976).
- [8] Edwards, N. W., A procedure for dynamic analysis of cylindrical liquid storage tanks, *Ph. D. Thesis of Michigan Uni.*, (1969).

A Semi-Analytical Method for Structure-Internal Liquid Interaction Problems

Cao Zhi-yuan

(Institute of Engineering Mechanics, Academia Sinica, Haerbin)

Y. K. Cheung

(University of Hong Kong, Hong Kong)

Abstract

A composite structure-internal liquid element is proposed in this paper. Through the use of analytical functions in two orthogonal directions, the three-dimensional problem of coupled structure-internal liquid vibration is reduced to a one-dimensional one, resulting in a drastic reduction in computing efforts.

Cylindrical and conical frustum composite elements are proposed to suit different problems, and examples are presented to demonstrate the accuracy of the method.